正則関数は z の関数

高　橋　広　幸

概　　要

微分可能な実数値関数 $f(x)$ の x を z に置き換えれば，それが正則関数，という訳でもないですが，多項式や級数なら成り立つでしょう．直感的には，微分したものを積分すれば元に戻るでしょうし，定積分は始点と終点で定まり，それが同じ周回積分は 0 のはずです.（コーシーの定理は当たりまえ？）複素関数の美しい性質は何と言ってもコーシーの積分定理でしょうが，当たりまえのことなのでしょうか？(周回積分が 0 にならないのは原始関数が多価関数）ここは積分以前の話で，正則関数はその定義から z だけ（$\bar{z}$ を含まない）の関数ということ示します．1 章では普通に扱う微分可能の内容（2 変数関数の全微分からコーシーリーマン関係式）で目新しいものはありません．2 章は変数 $z, \bar{z}$ による全微分と偏微分の定義等で主題はこの章です．1 章はその準備です．

1　微分可能

複素数 $z = x + iy$ を定めたとき，複素数が定まればそれが複素数上の関数ですから，$x^2 + iy$ でも $x - iy$ でも実数 x や y でも $\sqrt{x^2 + y^2}$ を対応させても，もちろん関数です．微分可能性は，実数の微分同様極限をとって定まればよいということです．ただ h が 0 に近づく近づき方は，どんな近づき方でも同じ極限値をもつということです．実数は大きい方（右）からか小さい方（左）からかですが（もちろん振動しながらでもかまいませんが)，複素数値は平面上の点ですから，その点への近づき方は上から下から，どこからでもかまわないという条件になります．

定義（微分可能）　複素関数 $f(z)$ に対して，
極限値

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \tag{1}$$

が存在するとき，$f(z)$ は $z = \alpha$ で微分可能といい，$\dfrac{df}{dz}(\alpha)$ や $f'(\alpha)$ で表す．
$f'(\alpha)$ を α の関数とみたとき，$f(z)$ の導関数と呼ぶ．

複素数 $z = x + iy$ の関数は見方を変えれば実数 x, y 上で複素数値をとる関数ですから，(x, y) に任意の近づき方をしたときに極限値をとると考えて良さそうですが，そうではありません．もし，関数 $f(z)$ を $f(x, y)$ と考えて $(x + h, y)(h \in \mathbb{R})$ が $h \to 0$ で極限値をもてばそれは $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ で，$(x, y + h)$ が $h \to 0$ で極限値をもてばそれは $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ です．x, y を $u = x + y, v = x - y$ で変数変換すると（偏微分を添字で表し）$f_x = f_u + f_v, f_y = f_u - f_v$ これが等しければ，$f_x = f_y = f_u, f_v = 0$ です．しかも f_u, f_v も一致するなら $h \to 0$ での全ての極限値は 0 です．これは f は定数ということです．
x, y 上で複素数値をとる関数といっても実部と虚部を別々に考えれば，それぞれは実数値関数です．実数値をとる関数 $f(x, y)$ とすると，例えば $f(x, y)$ は x, y 平面上の高さで，曲面を表すと考えてもよいでしょう．その曲面のある点の接平面は偏微分で記述でき，接平面のある方向の勾配はその方向の偏微分となります．偏微分が全て等しいのはどの向きの勾配も等しいので水平面です．これでは何の面白みもありません．
一方複素平面上では $z - \alpha = h \in \mathbb{C}$ での極限の分母はもちろん複素数です．このため f の実部，虚部は $h \to 0$ での極限操作で変わることが大きな違いです．x, y 平面で $(x, y + h)$ が $h \to 0$ で $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ を考えるのと複素平面では $ih \to 0$ で $\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ を考えるのは実に大きな違いがでてきます．

(1) に戻って次に進みます．$z=x+yi$（以下同様），$\alpha=a+bi$ で $z-\alpha=h$ として $h\to 0$ の表現に変えて，実数 h_1 で h が実数のとき $h=h_1$ と純虚数のとき $h=ih_1$ で，$f(z)=f(x,y)$，実数 h_1 を用いて

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h_1}=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{ih_1}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

は一致しなければなりません．これより

定理 1.1 (コーシー・リーマン関係式)

複素関数 $f(z)$ が $z=x+yi$ が，$\alpha=a+bi$ で微分可能のとき，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2}$$

が成立する．

$f=u+vi$ として，実部と虚部を見比べれば，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

で，こちらの方が馴染みかもしれません．どちらも区別なくコーシー・リーマン関係式（方程式）と呼びます．

微分可能となる十分条件ですが，いきなり複素数関数では無理があるので実数部分，虚数部分を考えます．話の順序として，実数の 2 変数 x,y の関数について確認します．

定義（全微分可能）　$f(x,y)$ が (a,b) の近傍で定数 α,β をうまくとると

$$f(x,y)=f(a,b)+\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\epsilon(x,y) \tag{4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\epsilon(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\epsilon(x,y)}{|x-a|+|y-b|}=0 \tag{5}$$

が成り立つとき $f(x,y)$ は (a,b) で**全微分可能**という．

$z=\alpha(x-a)+\beta(y-b)$ は平面で，$f(x,y)$ は $f(a,b)$ を通る平面（接平面）で近似できるということです．全微分可能な条件を求めます．次の定理はあきらかでしょう．

定理 1.2 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能なら偏微分可能で，α,β はそれぞれ x,y についての偏微分係数である．

次は 2 変数関数の平均値の定理です．これは全微分可能を仮定しない定理ですが，θ の位置で全微分可能を仮定した別の平均値の定理 (1.7) があります．

定理 1.3 (平均値の定理) $f(x,y)$ が (a,b) を含む開集合 D で偏微分可能で (a,b) から $(a+h,b+k)$ にいたる線分が D に属するものとする．(x,y の偏微分を添え字を使って f_x,f_y で表します．)

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a+\theta h,b+k)+kf_y(a,b+\theta k) \tag{6}$$

なる $\theta(0<\theta<1)$ が存在する．

証明一変数関数 $g(t)$ を $g(t)=f(a+ht,b+k)+f(a,b+kt)$ とすると $g(t)$ は $0\leqq t\leqq 1$ で定義された微分可能関数ですから 1 変数の平均値の定理より $0<\theta<1$ のある θ で

$$g(1)-g(0)=f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a+\theta h,b+k)+kf_y(a,b+\theta k)$$

とすることができる．(証明終わり)

これより全微分可能な条件が求まります．

定理 1.4 開集合 D で f_x, f_y が連続なら，$f(x,y)$ は全微分可能である．

証明 $(a,b) \in D$ とそれに十分近い点 $(a+h, b+k)$ に対し，(6) が成り立ち，f_x, f_y の連続性より

$$f_x(a+\theta h, b+k) = f_x(a,b) + \epsilon_1, \quad f_y(a, b+\theta k) = f_y(a,b) + \epsilon_2$$

ここで $h, k \to 0$ のとき $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ より (4)(5) が成り立ちます.（証明終わり）

条件の偏微分の連続は x, y のどちらか一方だけで全微分可能に，多少緩められます.
f_x は (a,b) の近傍で連続，f_y は (a,b) で存在することにします.
（証明）$(a,b) \in D$ とそれに十分近い点 $(a+h, b+k)$ に対し，

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a,b)$$

$$= hf_x(a+\theta h, b+k) + k(f_y(a,b) + \epsilon_2) \quad (0 < \theta < 1)$$

$$= h(f_x(a,b) + \epsilon_1) + k(f_y(a,b) + \epsilon_2)$$

ここで $h, k \to 0$ のとき $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ で成り立ちます.（証明終わり）
これで応用上重要な方向の微分と合成関数の微分に関する定理ができます.（寄り道ですが，ここで触れるのが普通のようです.）

定理 1.5 (方向の微分係数) $f(x,y)$ は全微分可能，$x = \phi(t), y = \psi(t)$ が共に微分可能ならば，$f(\phi(t), \psi(t))$ は微分可能で

$$\frac{df(\phi(t), \psi(t))}{dt} = f_x(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t))\psi'(t) \tag{7}$$

（証明）$\Delta x = \phi(t+\Delta t) - \phi(t), \Delta y = \psi(t+\Delta t) - \psi(t)$ とおけば $\Delta t \to 0$ で $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to \phi'(t), \quad \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \to \psi'(t)$ で

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \epsilon$$

Δt で割って，$\phi'(t), \psi'(t)$ を代入すると $\Delta t \to 0$ で $\dfrac{\epsilon}{\Delta t} = \dfrac{\epsilon}{\Delta x} \cdot \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to 0$ となり成立します.（証明終わり）

定理 1.6 (合成関数の微分係数) $f(x,y)$ は全微分可能，$x = \phi(u,v), y = \psi(u,v)$ が共に全微分可能ならば，合成関数 $f(\phi(u,v), \psi(u,v))$ は全微分可能で

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u, \quad f_v = f_x x_v + f_y y_v \tag{8}$$

（証明）条件より前と同様に Δ を用い $\Delta x = x_u \Delta u + x_v \Delta v + \epsilon_1, \quad \Delta y = y_u \Delta u + y_v \Delta v + \epsilon_2$
また $\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \epsilon_3$ ですから，これに代入すれば，

$$\Delta f = f_x(x_u \Delta u + x_v \Delta v + \epsilon_1) + f_y(y_u \Delta u + y_v \Delta v + \epsilon_2) + \epsilon_3 = (f_x x_u + f_y y_u)\Delta u + (f_x x_v + f_y y_v)\Delta v + \epsilon$$

$$\frac{\epsilon}{|\Delta u| + |\Delta v|} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{|\Delta u| + |\Delta v|} + \frac{\epsilon_3}{|\Delta x| + |\Delta y|} \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|\Delta u| + |\Delta v|} \to 0 \quad (|\Delta u| + |\Delta v| \ \to 0)$$ （証明終わり）

定理 1.5 を用いた平均値の定理（全微分可能を想定しますが偏微分の変数 x, y が同じもの）を記します.

定理 1.7 (平均値の定理) $f(x,y)$ が (a,b) を含む開集合 D で全微分可能で (a,b) から $(a+h, b+k)$ にいたる線分が D に属するものとする.（x, y の偏微分を添え字を使って f_x, f_y で表します.）

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = hf_x(a+\theta h, b+\theta k) + kf_y(a+\theta h, b+\theta k) \tag{9}$$

なる $\theta (0 < \theta < 1)$ が存在する.

証明 $g(t)=f(a+ht,b+kt)$ とすると $g(t)$ は $0\leqq t\leqq 1$ で定義された微分可能関数ですから

$$g(1)-g(0)=f(a+h,b+k)-f(a,b)=hf_x(a+\theta h,b+\theta k)+kf_y(a+\theta h,b+\theta k)$$

となる $\theta(0<\theta<1)$ が存在する.（証明終わり）

C^1 級（偏微分が存在しそれが連続）なら全微分可能です.
複素関数 $f(z)$ の実部虚部がそれぞれ C^1 級のとき $f(z)$ は C^1 級といいます.
このとき，コーシー・リーマン関係式が成立すれば $z=\alpha$ で微分可能となります.

定理 1.8 (微分可能となる十分条件) $\alpha=a+bi$ を含む開集合 D 上で $f(z)$ は (x,y) の関数として C^1 級，かつ実数値関数 u,v で $f=u+iv$ が $\alpha=a+bi$ で $u_x=v_y,u_y=-v_x$ であれば α で微分可能である.

証明 $x+iy$ の関数を必要なら $u(x,y),v(x,y)$ と書いても問題ありません．要するに実の 2 変数関数です. u,v は C^1 級で全微分可能なので，前と同様に $a+bi$ から $x+yi$（(a,b) から (x,y)）の差に伴うものを 前同様に$\varDelta$ を用いて表示します.
$\varDelta u=u_x\varDelta x+u_y\varDelta y+\epsilon_1$， $\varDelta v=v_x\varDelta x+v_y\varDelta y+\epsilon_2$

$$\varDelta f=u_x\varDelta x+u_y\varDelta y+\epsilon_1+i(v_x\varDelta x+v_y\varDelta y+\epsilon_2)$$

$$=u_x(\varDelta x+i\varDelta y)+iv_x\varDelta x-v_x\varDelta y+\epsilon_1+i\epsilon_2$$

$$=(u_x+iv_x)(\varDelta x+i\varDelta y)+\epsilon_1+i\epsilon_2$$

$$\frac{\epsilon_1+i\epsilon_2}{|\varDelta x|+|\varDelta y|}\ \to 0\quad(|\varDelta x|+|\varDelta y|\to 0)$$

ですから

$$\frac{df(\alpha)}{dz}=\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}=u_x(\alpha)+iv_x(\alpha)=f_x(\alpha)$$

が成立し，極限が存在するので微分可能です.（証明終わり）

2　正則関数は z の関数

微分可能とはコーシー・リーマン関係式を成立させることですから，$f(x+iy)$ が実数値を与える x^2+y^2,x,y は $f=u+iv$ で v 従って v_x,v_y は 0 ですからコーシー・リーマン関係式は普通成立しません．ただし，$f=x^2+y^2$ は $f_x=2x,f_y=2y$ で $z=0$ では成立します．$z,\bar z$ で表すとき $f=z\bar z$ で $\bar z$ があっても $z=0$ では微分可能です．こうした煩わしさもあるのでしょう．点だけの微分は除きたいものです.
また (1) に戻ると，z の α への近づき方は任意です．このことを保証するためには，α は内点でなければならず，その結果正則関数は開集合上で定義される必要があります．細かいことを言えば，閉集合上の正則関数は，それより大きい開集合上で定義し，閉集合に限定したものという面倒な手続きを要します．正則関数は次のように定義されます.

定義（正則関数）　複素平面 C の開集合 D で定義された C^1 級関数 $f(z)$ が D の任意の点で微分可能なとき D で正則といい，$f(z)$ を正則関数という.
C^1 級をはずしても正則関数の導関数は正則というのがでてきますので，導関数の連続性あるいは C^1 級について記述していないのが多い様です．全微分可能等で余分な心配を減らすなら追加しておくべきでしょう．[1]
微分の定義に戻って (1) は，極限操作だけなので，微分可能な関数の和・差，複素数倍のみならず積商や合成関数の微分も実数と同様成立します.

[1] とりあえず正則関数に C^1 級は前提とします.

以下主に藤本「複素解析」[6] によります．全微分可能な $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ に戻って考えます．u,v は C^1 級の 2 実数関数とします．Δ も煩わしいので $a+bi$ とそれに十分近い $a+x+i(b+y)$ で考えます．

$$u(a+x,b+y)=u(a,b)+Ax+By+\epsilon_1 \tag{10}$$

$$v(a+x,b+y)=v(a,b)+Cx+Dy+\epsilon_2 \tag{11}$$

$\dfrac{\epsilon_1}{|x|+|y|},\dfrac{\epsilon_2}{|x|+|y|}\to 0\quad(|x|+|y|\to 0)$ が成立しています．$A=u_x,B=u_y,C=v_x,D=v_y$ です．これを複素数を使って書き換えます．

定理 2.1 関数 f が $\alpha=a+bi$ で全微分可能な必要十分条件は

$$f(\alpha+z)=f(\alpha)+\lambda z+\mu\bar{z}+\epsilon,\quad \frac{\epsilon}{z}\to 0\quad(|z|\to 0) \tag{12}$$

を満たす定数 λ,μ と z の関数 ϵ が存在することである．また λ,μ は一意的に

$$\lambda=\frac{1}{2}(f_x-if_y)=\frac{1}{2}(u_x+v_y+i(v_x-u_y)) \tag{13}$$

$$\mu=\frac{1}{2}(f_x+if_y)=\frac{1}{2}(u_x-v_y+i(v_x+u_y)) \tag{14}$$

となる．

証明　十分条件であることをまず示します．$\lambda=p+iq,\mu=r+si$ とすると $(p+iq)(x+iy)=px-qy+i(qx+py),(r+si)(x-iy)=rx+sy+i(sx-ry)$ より $(p+r)x+(-q+s)y+i((q+s)x+(p-r)y)$ ですから $A=p+r,B=-q+s,C=q+s,D=p-r$ とすれば，(10)(11) が成立します．
逆は (10) 式に i 倍した (11) 式を加え $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2},y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ を代入し $2(A+Ci)x+2(B+Di)y=(A+Ci)(z+\bar{z})-i(B+Di)(z-\bar{z})=((A+D)+i(C-B))z+((A-D)+i(C+B))\bar{z}$ を $2\lambda z+2\mu\bar{z}$ とすれば (12) および (13)(14) が成立します．
λ,μ の一意性は，$\lambda z+\mu\bar{z}+\epsilon(z)=\lambda_0 z+\mu_0\bar{z}+\epsilon_0(z)$ とすると $z\to 0$ のとき

$$(\mu-\mu_0)\frac{\bar{z}}{z}=(\lambda_0-\lambda)+\frac{\epsilon_0-\epsilon}{z}$$

で右辺は $\lambda_0-\lambda$ に収束するが，左辺 $\dfrac{\bar{z}}{z}$ は収束しないので，$\mu=\mu_0$ で同様に $\lambda=\lambda_0$ で一意です．(証明終わり)
z と $\bar{z}$ は独立変数ではないので λ,μ は偏微分係数ではありません．もちろん次の定義を用いれば $z,\bar{z}$ の偏微分係数となります．

定義（$z,\bar{z}$ に関する偏微分）　偏微分可能な関数 $f(z)$ に対して，$z,\bar{z}$ に関する偏微分を (13)(14) で定義する．すなわち

$$f_z=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\qquad f_{\bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{15}$$

この記号で (12) は

$$f(\alpha+z)=f(\alpha)+f_z z+f_{\bar{z}}\bar{z}+\epsilon,\quad \frac{\epsilon}{z}\to 0\quad(|z|\to 0) \tag{16}$$

と書けます．和，積，商及び合成関数の偏微分は普通の偏微分と同様に計算できます．($(fg)_z=f_z g+fg_z$ 等)
また実数開区間で定義された複素数値関数はその実数部分，虚数部分のそれぞれを考えることで実数と同様に微分が定義され，その和，積，商，合成関数の微分も計算できます．複素数を含む微積をいちいち除外していては埒があきません．(複素係数は気にしなくてもよいというだけのことです．)

定理 2.2 (Cauchy-Riemann 関係式) [2] 開区間 D 上の関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ と $\alpha=a+bi\in D$ について次のものは同値である．

(1) $f(z)$ は α で微分可能である．

(2) $f(z)$ は α で全微分可能であり，$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\alpha)=0$.

(3) u,v は共に (a,b) で全微分可能でコーシーリーマン関係式 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ が成り立つ．

証明 (1) のとき微分の定義から

$$f(\alpha+z)=f(\alpha)+f'(\alpha)z+\epsilon \quad \epsilon/z\to 0 \quad (|z|\to 0)$$

従って $\lambda=f'(\alpha),\mu=0$ として (12) が成立し，全微分可能で $f_{\bar{z}}(\alpha)=0$ しかも $f_z(\alpha)=f'(\alpha)$（微分と偏微分が同じ）です．(2) が成立します．逆は (12) で $f(\alpha+z)=f(\alpha)+f_z z+\epsilon$ より

$$f'(\alpha)=\lim_{z\to 0}\frac{f(\alpha+z)-f(\alpha)}{z}=f_z(\alpha)$$

と極限値が定まり (1) が成り立ちます．(2) と (3) は

$$2f_{\bar{z}}(\alpha)=u_x-v_y+i(u_y+v_x)=0$$

よりあきらかに同値です.（証明終わり）

x,y は $z,\bar{z}$ で表すと $z,\bar{z}$ の関数ということになります．普通の意味の $\bar{z}$ の偏微分が 0 とは $\bar{z}$ があらわれないことですから，正則関数は z だけの関数となる．ということです．これは，1 変数 x が z に変わっただけ．もちろん係数などは複素数が入っても問題ありません．これが（開集合上で）微分ができれば，正則というのは，本来 x,y の 2 変数関数を z の 1 変数関数で扱うという極めて強い条件が隠されています．なにしろ偏微分と微分が同じなのですから．

ところが x,y は $z,\bar{z}$ で表せますが，$z,\bar{z}$ は独立変数ではもちろんありません．z を決めることは x,y そして $\bar{z}$ も決めてしまいます．従って $z,\bar{z}$ に関する偏微分というには，おかしな話なのです．$\bar{z}$ を止めて z で微分する等ということはできません．z が 0 に近づけば，$\bar{z}$ も 0 に近づきます．x,y の 2 変数関数といっても x,y は 1 つの複素数を定めるだけです．$z,\bar{z}$ が独立なら（そんなことはありませんが）実 4 変数になってしまいます．$z,\bar{z}$ を使った議論は危険を伴うので，避けているのが多いようです.「独立変数云々は考えるな」と，わざわざ断るものもあります．実際は，$z,\bar{z}$ の**偏微分**は x,y の偏微分を用いて**定義**しています．ここにあげた $z,\bar{z}$ による全微分は，変数変換の結果ででてきます．x,y の全微分と同じですと言っているだけです．要は $z,\bar{z}$ の偏微分は全て x,y の偏微分によります．しかしこの定義に従えば $z,\bar{z}$ に関する偏微分は絶えず x,y の偏微分を通過することになります．これはかなり面倒です．そこでまず，$z,\bar{z}$ を $x+yi,x-yi$ に直し x,y の偏微分をして（例えば $z=x+iy$ を定義 (15) に従い x,y で偏微分等することで z の偏微分を求める.）

$$\frac{\partial z}{\partial z}=1,\frac{\partial z}{\partial \bar{z}}=0,\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}=0,\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}=1$$

を示し（簡単），後は 1 変数の微分と同様に偏微分も和，積，商と $z,\bar{z}$ を組み合わせたものを拡大します．例えば $(xx)'=x'x+xx'=2x$ 同様 $(zz)_z=z_z z+zz_z=2z,(z\bar{z})_z=z_z\bar{z}+z(\bar{z})_z=\bar{z}$ とできるので，多項式，有理式等は普通に $z,\bar{z}$ の偏微分するのと同じ，もちろん $z,\bar{z}$ で級数展開してあってもできます．さらに正則関数は級数展開できるので問題ない（多項式ができれば全てできる）としてしまえば単なる普通の偏微分と同じです．指数，三角関数等も級数展開で定義するので問題ありません．
独立変数が $z,\bar{z}$ であるのと同様 $z,\bar{z}$ で偏微分したものと一致します．要は何も考えないで普通に偏微分してかまわないということです．

z の関数 $f(z)$ は正則関数とは限らないので z だけで表現できません.（整関数，級数，有利関数とは限りません.）$f(x+iy)$ というより，やはり $f(x,y)$ の意味合いです．但し，すぐ正則関数がでてきて，その後扱うのは正則関数だけですから $f(z)$ で（z の関数で）問題はないのでしょう．

[2]藤本 [6] ではコーシーリーマン関係式の定理としています．

参考文献

[1] 一松　信「解析学序説　下巻」裳華房

[2] 高木貞治「解析概論」岩波書店

[3] 小松勇作「解析概論 [1]」廣川書店

[4] 神保道夫「現代数学への入門　複素関数入門」岩波書店

[5] 高橋陽一郎「現代数学への入門　微分と積分 2」岩波書店

[6] 藤本但孝「現代数学の基礎　複素解析」岩波書店

[7] 金子　元「複素微分とはなんですか. … 」数学セミナー 2018, 6 月号　日本評論社