

気象庁マグニチュード と地震のエネルギー

伊藤榮信

2015年7月13日

はじめに

気象庁は地震規模を表すためにマグニチュードを各地震毎に発表している。しかしながら案外この値は誤解して受けとめられているのではないであろうか。その理由は、マグニチュードとは地震のエネルギーを表す指標であるという「高度な情報」が流布しているからではないだろうか。

ここでは気象庁が発表するマグニチュードという数値と地震のエネルギーとの間にあるこの誤解について述べてみたい。もちろん、最終的には「マグニチュードとは地震のエネルギーを表す指標とみなす」という結論に到達することは明らかであろう。

以下の議論は、宇津徳治「地震学」第3版(共立出版, 2001年)を参考としており、(ほぼすべての)記号法と式番号もそれに合わせている。

1 各種のマグニチュード

地震の大きさを表すには震源域から放出される地震波のエネルギー E_s (Seismic wave energy) そのものを使用すればよいと考えられるが、 E_s を計測することが難しいことは明らかである。したがって、地震計が表示する値から普遍的な数値を考案し、地震の大きさ(マグニチュード)とするということとは自然な進め方である。

ローカルマグニチュード

Richiter(1935)は南 California の地震の統計的研究にあたり、地震のマグニチュードを「震央距離 $\Delta = 100\text{km}$ に置かれた Wood-Anderson 式地震計で、その記録紙上の1成分の最大振幅 A を μm 単位で測り、その常用対数をとった値」とした。このマグニチュードをローカルマグニチュードと呼び、 M_L で表す。現実的には震央距離 Δ に設置された計測器の A を測り

$$M_L = \log A + f(\Delta) \quad (5.8)$$

により M_L を決めた. ここで $f(\Delta)$ は校正関数で, 例えば $f(30) = -0.90, \dots, f(150) = 0.29, \dots, f(600) = 1.94$ などである.

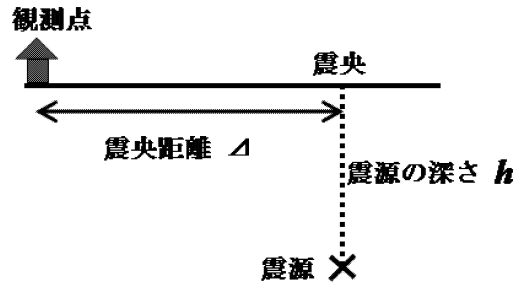


図 1: 震源, 震央, 震央距離

表面波マグニチュード

Gutenberg(1945) は当時の地震計で遠方の地震の表面波を記録すると周期 20 秒前後の波が顕著となることを発見した. そこで周期 20 秒程度の表面波の最大振幅 A (水平動 2 成分の合成で $\sqrt{A_N^2 + A_E^2}$, μm 単位) を用いてマグニチュードを求める方法を提案した:

$$M_s = \log A + f(\Delta) \quad (5.9)$$

で, M_s を表面波マグニチュード (surface wave magnitude) と呼んだ. ここでも $f(\Delta)$ は校正関数であるが, 上の校正関数とは異なる.

実体波によるマグニチュード

引き続き Gutenberg(1945) は深い地震も考慮し, P 波上下動, S 波水平動など各々の主要動の最大振幅 A (μ 単位) と周期 T (秒) の比からマグニチュードを求める方法

$$m_B = \log(A/T) + q(\Delta, h) \quad (5.10)$$

を提案した. ここで $q(\Delta, h)$ は震央距離 Δ と震源の深さ h の関数で, 各々の波について複雑なグラフで定義されている. この m_B を実体波マグニチュード (body wave magnitude) という.

M_s, m_B は同じ地震に対しては M_L と同じ値になるように決められたが, その間に一定のズレがあることが分かった. すなわち, Gutenberg と Richter(1965) は

$$m_B = 2.5 + 0.63M_s \quad (5.11)$$

という換算式を導いている.

気象庁マグニチュード

坪井忠二 (1954) は札幌, 仙台, 東京, 名古屋, 神戸, 福岡にある Wiechert

式地震計によって計測された最大振幅 A (最大記録振幅を計器の振動倍率で割った値, μm 単位で, 水平 2 成分 $A = \sqrt{A_N^2 + A_E^2}$) と震央距離 Δ (km) から *Seismicity of the Earth* 所蔵の日本付近の地震の M になるべく一致するような M を算出する式 (坪井の公式) を求めた. 上記 6 箇所の資料から得られた式は

$$M = 1.73 \log \Delta + \log A - 0.83 \quad (5.19)$$

である. 地震動の変位に基づくマグニチュードであるから変位マグニチュードといわれる.

この後, 震源の深さ H が 60km よりも浅い地震に対しては, (5.19) 式を使い, 震源の深さ H が 60km よりも深い地震に対しては勝又 (護) の式 (1964)

$$M = \log A + K(\Delta, H), \quad (5.20)$$

が使われるようになった.

気象庁では津波予報のため地震発生後 3 分程度で M を推定するため緊急用として P 波のみによる方法を採用している.

2 改訂気象庁マグにチュード

以下、宇津「地震学」第3版から離れ、気象庁の発表情報と日本地震学会の資料を基に最近の「気象庁マグニチュード」について記す。

2003年9月以前気象庁マグニチュード

震源の深さを H とすると、既に記したように

$$\begin{cases} M = 1.73 \log \Delta + \log A - 0.83, & H < 61(\text{km}), \\ M = \log A + K(\Delta, H), & H \geq 61(\text{km}) \end{cases} \quad (1)$$

が気象庁が発表する変位マグニチュードの計算に使われた(2005年1月気象庁・地震予知情報課資料による)。更に、変位 A が計測できないような微小地震の場合、高感度速度型地震計の上下動成分の最大速度振幅 A_Z を使用した式

$$M_V = \log A_Z + 1.64 \log \Delta + \alpha \quad (\Delta \leq 700(\text{km})) \quad (2)$$

により求めた。これを速度マグニチュードと呼ぶ。 A_Z は上下動成分記録の最大振幅 10^{-5}m/s である(舟崎淳, 験震時報第67巻(2004) p.11-p.20より)。ただし、 $\alpha = 0.22$ or 0.44 と資料にはあるが、使用方法は記されていない。

それぞれの地震に対する変位マグニチュードと速度マグニチュードを示し

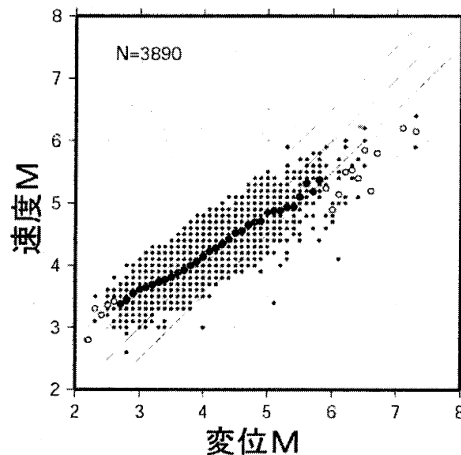


図2: 変位マグニチュードと速度マグニチュードの相関

たのが図2である。両者が一致するという事は各点がグラフの対角線上にのることである。

改訂気象庁マグニチュード

2003年9月25日から変位マグニチュードを

$$M_D = \log A + \beta_D(\Delta, H), \quad A = \sqrt{A_N^2 + A_E^2} \quad (3)$$

により計算し発表すると改めた。この式は震源の深さ H によらない式となっているが H が小さい場合、つまり浅い地震の場合には坪井の式 (5.19) に近づくように β_D が設定されている。ここで添字の D は変位を表す Displacement の頭文字である。

一方、速度振幅 A_Z による新しい速度マグニチュードは

$$M_V = \frac{1}{0.85} \log A_Z + \beta_V(\Delta, H) + C_V, \quad (4)$$

とされた (修正 Katsumata 速度マグニチュード, 2004. なおここで Katsumata とは勝又護ではなく、勝間田明男である)。また C_V は各観測点における地震計の種類や設置条件による補正值である。グラフからも分かるように、改訂

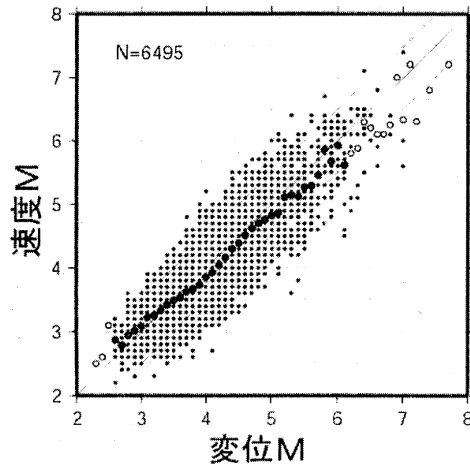


図 3: 変位マグニチュードと速度マグニチュードの相関

後の変位マグニチュードと速度マグニチュードの一致度は向上している。

3 地震のエネルギー

地震直前に震源域周辺にたまっていたエネルギー E_1 が地震発生により E_2 まで減少したとする。この地震により開放されたひずみエネルギー E は

$$E = E_1 - E_2,$$

であり、その一部は地震波のエネルギー E_s (seismic wave energy) として震源域から放出される。 E_s と E の比

$$\eta = \frac{E_s}{E} \quad (5.37)$$

を地震の効率 (seismic efficiency) という。 E も E_s も正確な値を見積もることは難しいし、 η は地震毎にかなり異なると思われる。

3.1 地震波エネルギーの推定

Jeffrey(1923) は振幅 A 、周期 T のレイリー波に対するエネルギー E_s が

$$E_s = 4\pi^3 \rho r_0 H V_R \sin \Delta \int \left(\frac{A}{T} \right)^2 dt, \quad (5.38)$$

から導かれるとした。ここで、 ρ は地殻の密度、 r_0 は地球の半径、 V_R はレイリー波の速度であり、波のエネルギーが厚さ H の層に集中していると仮定している。 Jeffrey はこの式を Pamir 地震 (1911) に適応し、 $E_s \sim 10^{14}$ J を算出している。

一方、河角 (1933)、鷺坂 (1932, 54) は日本付近の深発地震のエネルギーを求め、例えば志摩半島沖地震 (1929) に対して河角は P 波について毎秒 3.7×10^{12} J、S 波について毎秒 1.07×10^{13} J、全体で 10^{14} J とし、鷺坂は P 波、S 波を合わせて 3.83×10^{13} J とした。

地震計から計算した地震エネルギー $10^{13} \sim 10^{14}$

3.2 地殻変動によるひずみエネルギー

せん断力によるひずみエネルギー W は変位を u_i とすると

$$W = \frac{1}{2} \mu e_{12}^2, \quad e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.53)$$

により与えられる。ここで μ はずりの弾性率である。坪井 (1940) は単位体積あたりのせん断力によるひずみエネルギーを $e_{12} = \xi$ とし、 $W = \mu \xi^2 / 2$ で与えられるとした。このエネルギーが地震によって全て解放されたとする。

地震が起こるときの限界ひずみ ξ は地震の大小にかかわらず一定で $1 \times 10^{-4} \sim 2 \times 10^{-4}$ 程度で、地殻の弾性定数 μ を $50 \sim 100$ GPa とすると

$$E = (2.5 \times 10^3 \sim 2.0 \times 10^4)V \quad (5.39)$$

となる。坪井は最大級の地震の体積 V として $100\text{km} \times 100\text{km} \times 30\text{km}$ を考え、ひずみエネルギー $E = 7.5 \times 10^{16} \sim 6.0 \times 10^{17}\text{J}$ となる。

地震により地表に生じた水平ひずみを測量して、ひずみエネルギーを求めた例もある。北伊豆地震 (1930) については鷺坂 (1940) は $4 \times 10^{14}\text{J}$ 、本間 (1952) は深さ $4(\text{km})$ まで変動があったとして 10^{16}J という値を得ている。

断層の生成により開放されるひずみエネルギー E は (10.15) 式で表されるから、この式によりそのエネルギーを推定することもできる。安芸 (1966) によれば新潟地震 (1964) は縦ずれ断層なので (10.16) 式の c は (10.17) で与えられるとし、 $\lambda = \mu$ 、 $\sigma = \Delta\sigma$ と仮定すると

$$E = \frac{8}{3\pi}\mu U^2 L \quad (5.40)$$

が得られる。断層の長さ $L = 100\text{km}$ 、平均変位量 $U = 4\text{m}$ 、 $\mu = 37\text{GPa}$ とすると、 $E = 5 \times 10^{16}\text{J}$ となる。

地殻変動によるひずみエネルギー $10^{16} \sim 10^{17}$

3.3 マグニチュードとエネルギーの関係

Richiter はマグニチュード M_L と地震波のエネルギー $E_s(\text{J})$ との関係として

$$\log E_s = -1 + 2M_L$$

と考えたが、後に Gutenberg と Richiter(1942,49,56) はこの形の式の係数を次々と変更し、最終的に

$$\log E_s = 4.8 + 1.5M_s \quad (5.41)$$

に到達した。

一方、宇津「地震学」ではこの (5.41) 式を地震波のエネルギー E_s の式から導出しているが、誤記が多い。よって、それを修正しながら正しい計算を記す。

深さ h の地震を考え、震央における振幅/周期を $(A/T)_0$ 、地震動の継続時間を t_0 とする。震源を中心とする半径 h の球面を通過して t_0 時間に放出される S 波のエネルギーは (3.55) より

$$E_s = 2\pi^3 h^2 \rho V_S \left(\frac{A}{T} \right)_0^2 t_0 \quad (5.43)$$

で与えられる。この式の次元は確かにエネルギー (J) であり、本式の導出は付録 A に記した。ここで S 波の速度 $V_S = 3.4 \times 10^3 \text{m/s}$, $\rho = 2.7 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ とする。南 California の地震波 $h = 16 \times 10^3 \text{m}$ 程度である (当時はそう思われていた) とし、P 波のエネルギーを S 波の半分と仮定してそれを加えると

$$\log E_s = -1.66 + 2 \log \left(\frac{A}{T} \right) + \log t_0 \quad (5.44)$$

となる (A の単位は cm, T, t_0 は秒).

////////////////////修正始まり////////////////////
 しかし、この式の右辺第 1 項の -1.66 はどのような計算のもとで出された値かまったく検討がつかない。そこで、非常に簡単な計算であるがすべてを記す。特に A の単位は cm であると宇津「地震学」には記されているが、これまではすべて A は $\mu\text{m}=10^{-6}$ で計られてきた。よって、これに注意して、S 波のエネルギー (5.43) 式に数値を代入すると

$$\begin{aligned} E_s &= 2\pi^3 \times (1.6 \times 10^4)^2 \times 2.7 \times 10^3 \times 3.4 \times 10^3 \times \left(\frac{A \times 10^{-6}}{T} \right)_0^2 t_0 \\ &= 2\pi^3 \times 1.6^2 \times 2.7 \times 3.4 \times 10^2 \times \left(\frac{A}{T} \right)_0^2 t_0 = 1.457 \times 10^5 \times \left(\frac{A}{T} \right)_0^2 t_0 \end{aligned}$$

が得られる。P 波の寄与は、上記 S 波の半分とされるから、全体は上の式の 1.5 倍とすればよいので

$$E_s = 2.186 \times 10^5 \times \left(\frac{A}{T} \right)_0^2 t_0$$

これの常用対数をとると

$$\log E_s = 5.34 + 2 \log \left(\frac{A}{T} \right)_0 + \log t_0 \quad (5.44')$$

となり、 -1.66 ではなく 5.34 となる。

////////////////////修正終り////////////////////
 更に、南 California での観測から

$$\log t_0 = -1 + 0.4 \log \left(\frac{A}{T} \right)_0 \quad (5.45)$$

$$\log \left(\frac{A}{T} \right)_0 = m_B - 2.3 \quad (5.46)$$

という実験式が得られているので、これを用いると (5.40) は (正しくは、修正した (5.44') 式は)

$$\log E_s = -1.2 + 2.4 m_B \quad (5.47)$$

となり、(5.9) 式を用いて (正しくは、(5.11) 式を用いて) m_B を M_s に変換すると (5.41) が得られる。

4 地震モーメントと応力降下

ある点を支点とし、その支点 O から l 離れた点 A に大きさ F の力が \overline{OA} に垂直に作用している場合の量 lF を力のモーメントという。系内 (もしくは剛体内) の2つの異なる質点に、大きさが等しく逆向きの平行な一対の力が働いたとする。この1組の力は質点系の (もしくは剛体の) 全運動量を変えることはない。この一対の力を偶力または力対という。そしてこれら2力のモーメントの和を偶力のモーメントという。(富山小太郎著「力学」岩波書店、もしくは山内恭彦著「一般力学」岩波書店)

地震は震源に急に偶力が作用するものとしてとらえることができ、実際の震源では急速に亀裂が発生し、ずれが発生している。この偶力のモーメント M_0 は

$$M_0 = \mu \bar{U} S \quad (10.10)$$

で定義することができる。ここで \bar{U} は断層面積 S 上の平均変位量である。安芸 (1966) はモーメント M_0 を地震モーメントと呼んだ。

応力降下

応力により断層が急に変位する場合、変位前の断層面に働いていたせん断応力を σ_1 、変位終了後のせん断応力を σ_2 とすると

$$\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (10.13)$$

が断層運動 (地震) に伴う応力降下 (stress drop) である。平均応力

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (10.14)$$

によって面積 S の部分が平均 \bar{U} だけ相対的に変位したとすれば、その運動に要したエネルギーは

$$E = \bar{\sigma} S \bar{U} = \bar{\sigma} \frac{M_0}{\mu} \quad (10.15)$$

となる。応力降下 $\Delta\sigma$ と平均変位量 \bar{U} との関係は、断層の幅を W とすれば

$$\Delta\sigma = c\mu \frac{\bar{U}}{W} = c \frac{M_0}{SW} \quad (10.16)$$

という形で表されることが転位 (dislocation) の理論から導かれている。 c の値は、縦ずれ断層のときは Starr(1928) により

$$c = \frac{4(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \quad (10.17)$$

であり、横ずれ断層のときは Knopoff(1958) により $c = 2/\pi$ であるとされている。

断層面どうしの摩擦力を σ_f とするとき、断層を動かす実効応力 σ_e と見かけ応力 σ_a を

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_f \quad (10.18)$$

$$\sigma_a = \eta \bar{\sigma} \quad (10.19)$$

で定義する。ここで η は (5.37) 式で与えられる地震の効率である。

地震のエネルギー E は地震波のエネルギー E_s と断層面の摩擦により消費されるエネルギー $E_f (= \sigma_f M_0 / \mu)$ との和 $E = E_s + E_f$ であると考えられる。よって

$$E_s = \eta E = \sigma_a S \bar{U} = \sigma_a M_0 / \mu \quad (10.20)$$

であるから、

$$\bar{\sigma} = \sigma_a + \sigma_f \quad (10.21)$$

であり¹

$$\Delta\sigma = 2(\sigma_e - \sigma_a) \quad (10.22)$$

と書ける²。もし、 $\sigma_2 = \sigma_f$ とすれば

$$E_s = \frac{\Delta\sigma M_0}{2\mu} \quad (10.24)$$

となる³。

金森と Anderson(1975), 阿部(1975) は、 $6 < M_s < 8.5$ で $M_s \propto S^{3/2}$ が成立することを示した。(10.16) 式で断層の幅 W を断層の面積 S により $W \propto \sqrt{S}$ として、同式に代入すると $\Delta\sigma$ は一定 c となる。実際、多くの大地震について求めた結果、海溝内側での浅発地震(プレート間地震)で $\Delta\sigma = 3\text{MPa}$ 程度、内陸部の浅発地震(プレート内地震)で 10MPa 程度となる、マグニチュード M にはほとんど依存しない。

E_s と M_s との関係 (5.41) 式と (10.24) 式を用いると

$$\log M_0 = 1.5M_s - \log(\Delta\sigma/\mu) + 5.1 \quad (10.25)$$

¹導出: $E_f = \sigma_f M_0 / \mu$ であるから $E = E_s + E_f = (\sigma_a + \sigma_f) M_0 / \mu$ より。

²導出: (10.14) 式と (10.21) 式から

$$\sigma_2 = 2(\sigma_a + \sigma_f) - \sigma_1 = 2\sigma_a + 2\sigma_f - (\sigma_e + \sigma_f) = 2\sigma_a - \sigma_e + \sigma_f$$

を得る。途中、(10.18) 式: $\sigma_1 = \sigma_e + \sigma_f$ を使った。よって

$$\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_e + \sigma_f - (2\sigma_a - \sigma_e + \sigma_f) = 2(\sigma_e - \sigma_a)$$

³導出: (10.23) 式があるが無用の式なので省略した。ここでは $\sigma_a = \Delta\sigma/2$ を導き出し、それを (10.20) 式へ代入するというだけである。(10.18) 式で $\sigma_2 = \sigma_f$ を使うと

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_f = \sigma_1 - \sigma_2 = \Delta\sigma$$

が得られるから、これを (10.22) 式の σ_e へ代入すると

$$\Delta\sigma = 2\sigma_a$$

を得る。

が得られる. $\Delta\sigma/\mu = 1 \times 10^{-4}$ (例えば, $\Delta\sigma = 5\text{MPa}$, $\mu = 50\text{GPa}$ の場合)
とすると

$$\log M_0 = 1.5M_s + 9.1 \quad (10.26)$$

を得る.

5 気象庁マグニチュードと地震のエネルギー

以上のように、曲がりなりにもマグニチュードと地震のエネルギーとの関係式 (5.41) が導かれた。しかし、導出において南 California 地域の地震から得られた実験式を 2 つ使用しており、普遍性は甚だ低い。更に、マグニチュード M_s も気象庁が使用している式とは異なるので、(5.41) 式に気象庁マグニチュードを代入して計算したエネルギーに物理的根拠を与えることは難しい。

したがって、気象庁のホームページにも「マグニチュードとは地震のエネルギーに関連するものである」とは書かれているが、(5.41) 式にはいっさい触れていない。

以上の事を踏まえたうえで、マグニチュードと地震波のエネルギーとの関係式 (5.41) に、気象庁マグニチュードを代入し、エネルギーを算出できると仮定する。3.11 以降に茨城県と茨城県沖で発生した地震の気象庁マグニチュードから (5.41) 式を使いエネルギーに換算し、その (エネルギー) 和をとって、やはり (5.41) によりマグニチュードを計算した。

2011/3/11 PM15:15 茨城県沖を震源とする地震マグニチュード 7.4

対象期間：2011 年 3 月 11 日 PM15:57～2015 年 6 月 22 日

上記期間中の地震の総和のマグニチュード 7.2

となり、約 4 年 3 ヶ月の間に発生した地震総和のマグニチュードは 2011 年 3 月 11 日 PM15:15 に茨城県沖で発生した地震のマグニチュードに満たないのである。2011 年 3 月 11 日 PM14:46 最初に宮城県沖で発生した地震に次いで発生した茨城県沖の地震が如何に巨大であったかがわかる。

A 地震波によるエネルギー (5.43) 式

弾性体を波動が伝わる場合，その単位体積あたりの運動エネルギーは

$$K_E = \frac{1}{2}\rho \sum_i^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \quad (3.50)$$

で与えられる．このうち x_1 方向に伝播する P 波もしくは S 波を考え，その変位が

$$u_1 = A \sin(qx_1 - \omega t) \quad (3.51)$$

とする．この 1 方向の波動のエネルギーは (3.51) を (3.50) 式に代入し計算すると

$$K = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2(qx_1 - \omega t) = \frac{1}{4}\rho\omega^2 A^2 [1 + \cos 2(qx_1 - \omega t)] \quad (3.54)$$

となる．このエネルギーの 1 周期 T の平均を考えると，単位体積あたり

$$\bar{K} = \frac{1}{T} \int_0^T K dt = \frac{1}{4}\rho\omega^2 A^2 \quad (3.55)$$

となる．なお， $\omega = 2\pi/T$ である．

さて，深さ h の地震を考え，震央における振幅/周期を $(A/T)_0$ ，地震動の継続時間を t_0 とする．震源を中心とする半径 h の球面を通過して t_0 時間に放出される S 波のエネルギーは単位体積あたりのエネルギー (3.55) に対して，半径 h の球面上厚さ $V_S t_0$ の体積 V をかけて，平均をとると

$$\frac{1}{2}\bar{K}V = \frac{1}{8}\rho \frac{4\pi^2}{T^2} A^2 (4\pi h^2 V_S t_0) = 2\pi^3 h^2 \rho V_S \left(\frac{A}{T} \right)^2 t_0, \quad (5.43)$$

を得る．

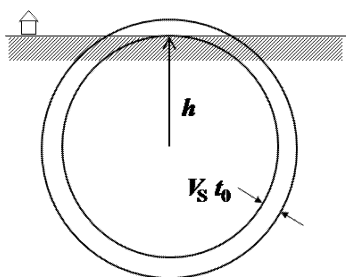


図 4: 地震波のエネルギー