

# “左既約分解型プラント変動に対する $H^\infty$ 制御器の $J$ -無損失分解による解法”

伊藤榮信\*

1997年11月12日

## 概要

木村英紀氏がオリジナルに開発した  $J$ -lossless factorization に基づく  $H^\infty$  制御理論を左既約型プラントへ応用した。Kimura の方法では  $H^\infty$  制御器の厳密解が得られるが、これを使い既約型プラントに対する制御器の厳密解を導出し、McFarlane-Glover の厳密解と比較した。その結果、2つの Riccati 方程式さらに制御器ともに同一の式が得られ、あらためて Kimura の方法の簡明さが確認された。

## 1 はじめに

Glover と Doyle は 1988 年に 2 つの Riccati 方程式の解を用いて  $H^\infty$  制御器を導くことができることを示した。これにより  $H^\infty$  制御工学は飛躍的に発展したと思われる。しかしながら彼らは解の導出法の具体的な点に関しては明らかにしておらず\*1 おおいに不満足をおぼえる。一方、木村英紀氏が開発した  $J$ -無損失分解 ( $J$ -lossless factorization) にもとづく解法によれば (文献 [1], [2]),  $H^\infty$  制御器は全く明解に導かれる。

この後、McFarlane と Glover は、特殊な場合として、既約分解されたプラントに対する  $H^\infty$  制御器の厳密解を得ている (文献 [3])。しかしながらその解の導出法においては上記と同様の問題を残している (解法の本質的な点で手に入らない論文を引用している)。そこで、既約分解型プラントに対する制御器を導出法の明らかな  $J$  無損失分解にもとづく解法により求めたので報告する。結論としては 2 つの Riccati 方程式ならびに制御器ともに McFarlane と Glover のものと一致することが確認された。なお、本論は第 4 節であるが、準備として、第 2 節にプラントの既約分解について、また第 3 節では加法

的な不確かさをもつシステムに対する制御器の導出について述べた。

## 2 システムの既約分解

制御対象のノミナルモデル  $P_0$  が伝達関数  $M(s), N(s)$  により

$$P_0(s) = M(s)^{-1}N(s) \quad (1)$$

と分解できるとき、左既約分解という。ただし

$$MY - NX = I$$

が成り立つとする。  $M, N$  は同じ行数からなる右半平面に極をもたない解析的な関数 ( $\in RH^\infty$ ) とする ( $X, Y \in RH^\infty$ )。さらに  $M, N$  が正規化条件

$$N(s)N^T(-s) + M(s)M^T(-s) = I \quad (2)$$

を満たす場合、この分解を正規化左既約分解 (Normalized Left Coprime Factorization) とよぶ。公称モデル  $P_0$  の状態空間表現を

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

とすると、正規化左既約分解  $M(s), N(s)$  は Doyle 形式で

$$N(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A + HC & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad (3)$$

\*1 これについては木村英紀氏が 1990 年の計測自動制御学会が販売しているビデオ講座で言明している。

$$M(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A+HC & H \\ \hline C & I \end{array} \right] \quad (4)$$

と表される。ここで

$$H = -ZC^T$$

で  $Z$  は Riccati 方程式

$$AZ + ZA^T - ZC^T CZ + BB^T = 0 \quad (5)$$

の解とする。ただし Doyle 形式は

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = D + C(sI - A)^{-1}B$$

を表す。以下、 $P_0$  が正規化左既約分解されていることを確かめる。

(証明)

$P_0 = M^{-1}N$  が成立することは簡単に証明できる (文献 [4])。  $\bar{A} = A + HC$  とすると

$$\begin{aligned} M^{-1}N &= [I + C(sI - \bar{A})^{-1}H]^{-1}C(sI - \bar{A})^{-1}B \\ &= [C^{-1} + (sI - \bar{A})^{-1}H]^{-1}(sI - \bar{A})^{-1}B \\ &= C[I + (sI - \bar{A})^{-1}HC]^{-1}(sI - \bar{A})^{-1}B \\ &= C[(sI - \bar{A})^{-1}(sI - \bar{A} + HC)^{-1}]^{-1}(sI - \bar{A})^{-1}B \\ &= C(sI - A)^{-1}B = P_0 \end{aligned}$$

で (1) が証明された。

次に、正規化条件 (2) 式が成り立つことを確かめる (文献 [5])。表記の簡単化のために、関数

$$\Phi(s) = (sI - \bar{A})^{-1}$$

を導入する。

$$\begin{aligned} N(s)N^T(-s) + M(s)M^T(-s) &= C\Phi(s)BB^T\Phi^T(-s)C^T + I + H^T\Phi^T(-s)C^T \\ &\quad + C\Phi(s)H + C\Phi(s)HH^T\Phi^T(-s)C^T \quad (6) \end{aligned}$$

$H = -ZC^T$  であるので、 $\bar{A} = A - ZC^T C$  に注意すると、新しく Riccati 方程式 (5)

$$\bar{A}Z + Z\bar{A}^T + HH^T + BB^T = 0$$

が成立することが分かる。これにより関係式

$$HH^T = -BB^T - (\bar{A}Z + Z\bar{A}^T)$$

を得る。これを (6) 式へ代入すると

$$\begin{aligned} N(s)N(-s)^T + M(s)M(-s)^T &= I + H^T\Phi^T(-s)C^T \\ &\quad + C\Phi(s)H - C\Phi(s)(\bar{A}Z + Z\bar{A}^T)\Phi^T(-s)C^T \quad (7) \end{aligned}$$

ここで有用な関係式

$$\bar{A}\Phi(s) = s\Phi(s) - I, \quad \Phi^T(-s)\bar{A}^T = -s\Phi^T(-s) - I$$

を用意し、これを (7) 式最後の項に適用すると

$$I + H^T\Phi^T(-s)C^T + C\Phi(s)H + CZ\Phi^T(-s)C^T + C\Phi(s)ZC^T$$

を得る。この式で  $H = -ZC^T$  とするならば、“ $I$ ”を残し全てが相殺する。よって正規化条件を満たすことが証明できた。 ■

上では公称モデル  $P_0$  で直達項  $D$  がゼロの場合を示したが、 $D \neq 0$  については Vidyasagar により求められている (文献 [6])。

### 3 加法的不確かさをもつシステム

ここでは計算練習としてプラントが加法的不確かさをもつ場合のロバスト制御器を考える。ロバスト安定性を与えるノルム条件は

$$\|(I + KP_0)K\|_\infty < 1 \quad (8)$$

である。ただし、公称モデルの状態空間表現を  $P_0 = \{A, B, C, 0\}$  とする。このとき、条件 (8) 式を満たす一般化プラント  $P$  は

$$P = \left[ \begin{array}{cc|cc} O & I & & \\ I & -P_0 & & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} A & 0 & -B \\ \hline 0 & 0 & I \\ C & I & 0 \end{array} \right] \quad (9)$$

で与えられる。一般化プラント  $P$  を状態空間表現で

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1\mathbf{w} + B_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = C_1\mathbf{x} + D_{11}\mathbf{w} + D_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C_2\mathbf{x} + D_{21}\mathbf{w} + D_{22}\mathbf{u} \end{cases}$$

と表し、その Doyle 表記を

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$$

$$P = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$

で表す。したがって

$$\begin{aligned} B_1 &= 0, & C_1 &= 0 \\ B_2 &= -B, & C_2 &= C \\ D_{11} &= 0, & D_{12} &= I \\ D_{21} &= I, & D_{22} &= 0 \end{aligned}$$

次に、 $J$  無損失分解法の基本であるチェイン形式を以下の式で定義する。

CHAIN( $P$ )

$$\begin{aligned} &= \left[ \begin{array}{c|cc} A - B_1 D_{21}^{-1} C_2 & -B_2 + B_1 D_{21}^{-1} D_{22} & -B_1 D_{21}^{-1} \\ -C_1 + D_{11} D_{21}^{-1} C_2 & D_{12} - D_{11} D_{21}^{-1} D_{22} & D_{11} D_{21}^{-1} \\ \hline D_{21}^{-1} C_2 & -D_{21}^{-1} D_{22} & D_{21}^{-1} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \check{A} & \check{B} \\ \hline \check{C} & \check{D} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

これによりプラントを CHAIN 形式で表した場合、 $B_1 = 0, C_1 = 0, D_{11} = 0, D_{12} = I, D_{21} = I$  から

$$\begin{aligned} \check{A} &= A, & \check{B} &= [B \quad 0], \\ \check{C} &= \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix}, & \check{D} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

### 3.1 Riccati 方程式の導出

Riccati 方程式を導くために若干の計算を行う：

$$F = -(\check{D}^T J \check{D})^{-1} (\check{B}^T X_\infty + \check{D}^T J \check{C}) \quad (12)$$

ここで、 $X_\infty$  は後で定義される Riccati 方程式の解である。

$$\begin{aligned} (\check{D}^T J \check{D})^{-1} &= \left( \check{D}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \\ \check{D}^T J \check{C} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

したがって、

$$\check{B}^T X_\infty + \check{D}^T J \check{C} = \begin{bmatrix} B^T X_\infty \\ -C \end{bmatrix} \quad (13)$$

こうして、

$$F = - \begin{bmatrix} B^T X_\infty \\ C \end{bmatrix}$$

を得る。

Riccati 方程式の一般形は

$$\begin{aligned} &X_\infty \check{A} + \check{A}^T X_\infty \\ &-(\check{C}^T J \check{D} + X_\infty \check{B})(\check{D}^T J \check{D})^{-1} (\check{D}^T J \check{C} + \check{B}^T X_\infty) \\ &+ \check{C}^T J \check{C} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\check{A} Y_\infty + Y_\infty \check{A}^T + Y_\infty \check{C}^T J \check{C} Y_\infty = 0 \quad (15)$$

で与えられる。(13) 式より

$$\begin{aligned} &(\check{C}^T J \check{D} + X_\infty \check{B})(\check{D}^T J \check{D})^{-1} (\check{D}^T J \check{C} + \check{B}^T X_\infty) \\ &= [X_\infty B \quad -C^T] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T X_\infty \\ -C \end{bmatrix} \\ &= X_\infty B B^T X_\infty - C^T C \end{aligned}$$

また、 $C^T J C = -C^T C$  であるから、この場合の Riccati 方程式は

$$X_\infty A + A^T X_\infty - X_\infty B B^T X_\infty = 0 \quad (16)$$

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T - Y_\infty C^T C Y_\infty = 0 \quad (17)$$

となる。

### 3.2 $H^\infty$ 制御器

次に、コントローラを求める。 $J$ -無損失分解法によれば制御器  $K$  は

$$K = \text{HM}(\Pi^{-1}; S)$$

により与えられる。ここで HM は

$$\text{HM}(\Pi^{-1}; S) = (\Pi_{11}^{-1} S + \Pi_{12}^{-1})(\Pi_{12}^{-1} S + \Pi_{22}^{-1})^{-1} \quad (18)$$

であり、 $\Pi^{-1}(s)$  は

$$\begin{aligned} &\Pi^{-1}(s) \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \check{A} + \check{B} F & (I - Y X)^{-1} (\check{B} + Y \check{C}^T J \check{D}) \\ \hline F & I \end{array} \right] D_\Pi^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

で与えられる(文献[8])。もしくは、

$$\Pi^{-1}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] D_\Pi^{-1}$$

これをさらに分解した結果を

$$\Pi^{-1} = \left[ \begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & I & 0 \\ \hat{C}_2 & 0 & I \end{array} \right] D_{\Pi}^{-1} \quad (20)$$

と表す。これまでの計算結果より

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \check{A} + \check{B}F = A + [B \quad 0] \begin{bmatrix} -B^T X_{\infty} \\ -C \end{bmatrix} \\ = A - BB^T X_{\infty} \\ [\hat{B}_1 \quad \hat{B}_2] = \hat{Z}[-B \quad Y_{\infty} C^T], \\ \hat{Z} = (I - Y_{\infty} X_{\infty})^{-1} \\ \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix} = F = \begin{bmatrix} -B^T X_{\infty} \\ -C \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (21)$$

となることが分かる。また、 $\check{D}^T J \check{D} = D_{\Pi}^T J' D_{\Pi}$ より

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = D_{\Pi}^T J' D_{\Pi}$$

よって

$$D_{\Pi} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

と選べる。したがって、コントローラの状態空間表現は

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = (A - BB^T X_{\infty})\xi - \hat{Z}BS(s)b + \hat{Z}Y_{\infty}C^T b \\ u = -B^T X_{\infty}\xi + S(s)b \\ y = -C\xi + b \end{array} \right. \quad (22)$$

なお、上の式で  $S(s) = 0$  は中心解を与える。

#### 4 既約分解に基づく不確かさをもつシステム

既約分解型プラントに対しロバスト性を考えたノルム条件

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ -K \end{bmatrix} (I + P_0 K)^{-1} M^{-1} W \right\|_{\infty} < 1, \quad W = \sigma I$$

で与えられる (文献 [7])。これは、 $\gamma = \sigma^{-1}$  に相当する。公称モデルの最小実現を  $P_0 = \{A, B, C, 0\}$  とすると、上記のノルム条件を与える一般化プラント  $P$  は

$$P = \begin{bmatrix} M^{-1}W & -P_0 \\ 0 & -I \\ M^{-1}W & -P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -H\sigma & -B \\ \hline C & \sigma I & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ C & \sigma I & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

また、一般化プラントの標準的な書き方として

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{22} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここでは、行列の型に注意して計算を進める。まず公称モデルは

$$\begin{array}{l} A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^{n \times m} \\ C \in R^{p \times n}, \quad D \in R^{p \times m} \end{array}$$

(23) 式より  $M^{-1}$  は

$$M^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A & -H \\ \hline C & I \end{array} \right]$$

であり、正方行列である。従って、

$$C(sI - A)^{-1}(-H) \implies (p \times n)(n \times n)(n \times p)$$

であるので

$$M^{-1} \in R^{(p \times p)}$$

となる。これより

$$D_{21} \in R^{(p \times p)}$$

となる必要がある。この関係を基に

$$\begin{array}{l} B_1 = -H\sigma \in R^{n \times p}, \quad B_2 = -B \in R^{n \times m} \\ C_1 = \begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix} \in R^{p_1 \times n}, \quad C_2 = C \in R^{p \times n} \\ D_{11} = \begin{bmatrix} \sigma I \\ O \end{bmatrix} \in R^{p_1 \times p}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} O \\ -I \end{bmatrix} \in R^{p_1 \times m} \\ D_{21} = I \in R^{p \times p}, \quad D_{22} = O \in R^{p \times m} \end{array}$$

なる行列の大きさを得る。次に、チェイン形式の各部を求める。なお表記の簡便性から  $\sigma^{-1} = \gamma$  により  $\sigma$  を  $\gamma$  に書き換える。定義式 (10) より

$$\begin{array}{l} \check{A} = A + HC \in R^{n \times n} \\ \check{B}_1 = B \in R^{n \times m}, \check{B}_2 = H \in R^{n \times p} \\ \check{C}_1 = O \in R^{p_1 \times n}, \check{C}_2 = \gamma C \in R^{p \times n} \end{array}$$

上記同様の計算を繰り返し

$$\begin{array}{l} \check{D}_{11} = \begin{bmatrix} O \\ -I \end{bmatrix} \in R^{p_1 \times m} \\ \check{D}_{12} = \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix} \in R^{p_1 \times p} \\ \check{D}_{21} = O \in R^{p \times m} \\ \check{D}_{22} = \gamma I \in R^{p \times p} \end{array}$$

したがって、各部の具体的な形は

$$\begin{cases} \check{A} = A + HC \in R^{n \times n} \\ \check{B} = \begin{bmatrix} B & H \end{bmatrix} \in R^{n \times (m+p)} \\ \check{C} = \begin{bmatrix} O \\ \gamma C \end{bmatrix} \in R^{(p_1+p) \times n} \\ \check{D} = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \\ O & \gamma I \end{bmatrix} \in R^{(p_1+p) \times (m+p)} \end{cases} \quad (25)$$

#### 4.1 Riccati 方程式の導出

以下、基本的な部分の計算に移る.

$$\begin{aligned} \check{D}^T J \check{D} &= \begin{bmatrix} O & -I & O \\ I & O & \gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ O & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \\ O & \gamma I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & O \\ O & (1-\gamma^2)I \end{bmatrix} \in R^{(m+p) \times (m+p)} \end{aligned}$$

よって

$$(\check{D}^T J \check{D})^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & (1-\gamma^2)^{-1}I \end{bmatrix} \in R^{(m+p) \times (m+p)} \quad (26)$$

同様に

$$\check{D}^T J \check{C} = \begin{bmatrix} O \\ -\gamma^2 C \end{bmatrix} \in R^{(m+p) \times n} \quad (27)$$

更に,

$$\begin{aligned} \check{B}^T X_\infty + \check{D}^T J \check{C} &= \begin{bmatrix} B^T \\ H^T \end{bmatrix} X_\infty + \begin{bmatrix} O \\ -\gamma^2 C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B^T X_\infty \\ H^T X_\infty - \gamma^2 C \end{bmatrix} \in R^{(m+p) \times n} \end{aligned}$$

これらの結果より

$$\begin{aligned} F &= -(\check{D}^T J \check{D})^{-1}(\check{B}^T X_\infty + \check{D}^T J \check{C}) \\ &= - \begin{bmatrix} B^T X_\infty \\ (1-\gamma^2)^{-1}(H^T X_\infty - \gamma^2 C) \end{bmatrix} \\ &\in R^{(m+p) \times n} \end{aligned} \quad (28)$$

この結果を利用すると

$$\begin{aligned} &(\check{C}^T J \check{D} + X_\infty \check{B})(\check{D}^T J \check{D})^{-1}(\check{D}^T J \check{C} + \check{B}^T X_\infty) \\ &= \begin{bmatrix} X_\infty B & X_\infty H - \gamma^2 C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T X_\infty \\ (1-\gamma^2)^{-1}(H^T X_\infty - \gamma^2 C) \end{bmatrix} \\ &= X_\infty B B^T X_\infty + (1-\gamma^2)^{-1} [X_\infty H H^T X_\infty \\ &\quad - \gamma^2 C^T H^T X_\infty - \gamma^2 X_\infty H C + \gamma^4 C^T C] \in R^{n \times n} \end{aligned} \quad (29)$$

これらをまとめると最終的に Riccati 方程式が得られ

$$\begin{aligned} X_\infty (A + (1-\gamma^2)^{-1}HC) + (A + (1-\gamma^2)^{-1}HC)^T X_\infty \\ - X_\infty [(1-\gamma^2)^{-1}HH^T + BB^T] X_\infty \\ - \gamma^2 (1-\gamma^2)^{-1} C^T C = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

一方,  $Y_\infty$  に関する Riccati 方程式は

$$(A+HC)Y_\infty + Y_\infty(A+HC)^T - \gamma^2 Y_\infty C^T C Y_\infty = 0 \quad (31)$$

となる. Riccati 方程式 (30) の解は

$$X_\infty = -\gamma^2 U^{-1} X$$

により得られる (文献 [7]). ただし,  $X$  は次の Riccati 方程式

$$XA + A^T X - XBB^T X + C^T C = 0 \quad (32)$$

の解である. また, (31) 式の解の一つは明らかに  $Y_\infty = 0$  である.

これらの結果より, 前節同様にして

$$\begin{cases} \hat{A} = A + HC \\ \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & H \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^T X_\infty \\ -(H^T X_\infty - \gamma^2 C) \end{bmatrix} \\ D_\Pi^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (\gamma^2 - 1)^{-1/2} I \end{bmatrix} \end{cases} \quad (33)$$

$\hat{B}$  の計算において, McFarlane & Glover は (31) 式の解として  $Y_\infty = 0$  としているので,

$$\hat{Z} = I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty = I$$

とした. また,  $\gamma > 1$  である.

#### 4.2 $H^\infty$ 制御器の導出

ここでは前節同様  $J$ -無損失分解法 (文献 [1],[2]) により  $H^\infty$  制御器を導出し McFarlane と Glover (文献 [3]) により求められた解との比較を行う. McFarlane 等が提示しているの具体的な式は

中心解のみであるのでその比較をする.

制御器の中心解  $K_0$  は (18) 式で  $S(s) = 0$  とした式, すなわち

$$K_0 = \Pi_{12}^{-1}(\Pi_{22}^{-1})^{-1}$$

から得られる. (20) 式を使うならば, これは

$$\begin{aligned} K_0 &= \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_2 & I \end{array} \right]^{-1} \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} - \hat{B}_2\hat{C}_2 & \hat{B}_2 \\ -\hat{C}_2 & I \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & -\hat{B}_2\hat{C}_2 \\ 0 & \hat{A} - \hat{B}_2\hat{C}_2 \\ \hat{C}_1 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \hat{B}_2 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

となる. これは相似変換

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$$

により

$$\begin{aligned} K_0 &= \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} - \hat{B}_2\hat{C}_2 & -\hat{B}_2\hat{C}_2 \\ 0 & \hat{A} \\ \hat{C}_1 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} - \hat{B}_2\hat{C}_2 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

上の式の A 部は

$$\begin{aligned} \hat{A} - \hat{B}_2\hat{C}_2 &= \check{A} + \check{B}F - \hat{B}_2\hat{C}_2 \\ &= A + HC \\ &+ [B \quad H] \begin{bmatrix} -B^T X_\infty \\ -(1-\gamma^2)^{-1}(H^T X_\infty - \gamma^2 C) \end{bmatrix} \\ &+ (1-\gamma^2)^{-1}(HH^T X_\infty - \gamma^2 HC) \\ &= A + HC - BB^T X_\infty \end{aligned} \quad (34)$$

を得る. この結果を McFarlane-Glover と比較するために, 前で導入した

$$X_\infty = -\gamma^2 U X^{-1}, \quad U = I + XZ - \gamma^2 I$$

を考慮すると (34) 式は

$$\hat{A} - \hat{B}_2\hat{C}_2 = A + HC + \gamma^2 BB^T X U^{-T}$$

となる. よって, 制御器  $K_0$  は

$$K_0 = \left[ \begin{array}{c|c} A + HC + \gamma^2 BB^T X U^{-T} & H \\ \gamma^2 B^T X U^{-T} & 0 \end{array} \right]$$

となり, これは McFarlane & Glover の解に一致する. 一方, 文献 [8] の方法により制御器を状態空間

表現すると (ただし煩雑さを避けるため  $X_\infty$  を使用する)

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \left( A + \frac{1}{1-\gamma^2}(HC - HH^T X_\infty) - BB^T X_\infty \right) \xi \\ \quad + BS(s)b + H(\gamma^2 - 1)^{-1/2}b \\ u = -B^T X_\infty \xi + S(s)b \\ y = -(1-\gamma^2)^{-1}(H^T X_\infty - \gamma^2 C)\xi + (\gamma^2 - 1)^{-1/2}b \end{cases} \quad (35)$$

ここで,  $S(s) = 0$  とするここにより中心解が得られる.

## 5 まとめ

$J$  無損失分解の方法により, 正規化左既約分解プラントに対する  $H^\infty$  制御器を求め McFarlane と Glover の解と比較した結果,

(1) 2つの Riccati 方程式に関しては全く同じ式が得られた.

(2) 制御器についても一致する解が得られ, その中心解は

$$K_0 = \left[ \begin{array}{c|c} A + HC + \gamma^2 BB^T X U^{-T} & H \\ \gamma^2 B^T X U^{-T} & 0 \end{array} \right]$$

(3) McFarlane & Glover は具体的には中心解のみ提示しているが, 新たに以下の一般解の具体形を明らかにした.

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \left( A + \frac{1}{1-\gamma^2}(HC - HH^T X_\infty) - BB^T X_\infty \right) \xi \\ \quad + BS(s)b + H(\gamma^2 - 1)^{-1/2}b \\ u = -B^T X_\infty \xi + S(s)b \\ y = -(1-\gamma^2)^{-1}(H^T X_\infty - \gamma^2 C)\xi + (\gamma^2 - 1)^{-1/2}b \end{cases}$$

これにより中心解以外の制御器の性能を MATLAB により把握したい. また, 具体的なプラントを用意し性能の比較を行い, さらに, GDI 燃料圧力噴射系に対し適用しその制御性を確認したい.

## 参考文献

- [1] 木村英紀: 第 41 回システム制御情報講習会「 $H^\infty$  制御の基礎」: テキスト  $J$ -Lossless Factorization にもとづく  $H^\infty$  制御 (1992): システム制御情報学会
- [2] Hidenori Kimura: Chain-Scattering Approach to  $H^\infty$ -Control: Birkhäuser Boston (1997)

- [3] D.C.McFarlane and K.Glover : Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions : Vol.138 of Lecture Notes in Control and Information Sciences :Springer-Verlag(1990)
- [4] C.N.Nett,C.A.Jacobson and M.J.Balas : A Connection Between State-Space and Doubly Coprime Fractional Representation : IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-29,No.9 pp.831-832 (1984)
- [5] D.G.Meyer and G.F.Franklin :A Connection Between Normalized Coprime Factorizations and Linear Quadratic Regulator Theory:IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-32,No.3 pp.227-228 (1987)
- [6] M. Vidyasagar : Normalized Coprime Factorizations for Nonstrictly Proper Systems : IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 33,No.3 pp.300-301 (1988)
- [7] 木村, 藤井, 森 共著 : 現代制御シリーズ 8 「ロボット制御」 0章~2章 : コロナ社,(1994)
- [8] 伊藤榮信 : 木村英紀著 “ $J$ -Lossless Factorization にもとづく  $H^\infty$  制御” を読んで (2) : ゼクセルテックレビュー : No.14 pp.51-82:ゼクセル (1997)