# Cottingham & Greenwood
# 素粒子標準模型入門

メモ作成：伊藤榮信

2019 年 08 月 07 日

## 第 5 章 Dirac 方程式と Dirac 場

### 5.2 Lorentz 変換と Lorentz 不変性

$\psi_{\mathrm{L}}$ と $\psi_{\mathrm{R}}$ で書いた Dirac 方程式は

$$\begin{array}{l} \mathrm{i}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}} - m\psi_{\mathrm{R}} = 0 \\ \mathrm{i}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{R}} - m\psi_{\mathrm{L}} = 0 \end{array} , \tag{5.11}$$

Dirac 方程式のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}} + \mathrm{i}\psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{R}} - m(\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{R}} + \psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{L}}) \tag{5.12}$$

付録Bに示すように，この Lorentz 変換に関して，次の性質をもつ 2× 2 のユニモジュラ行列 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ を与えることができる

$$\mathbf{M}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\nu}\mathbf{M} = L^{\nu}{}_{\mu}\tilde{\sigma}^{\mu} \tag{5.15}$$

$$\mathbf{N}^{\dagger}\sigma^{\nu}\mathbf{N} = L^{\nu}{}_{\mu}\sigma^{\mu} \tag{5.16}$$

行列 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ には関係

$$\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{N} = \mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{M} = \mathbf{I} \tag{5.17}$$

がある．

慣性系 $K'$ で，ラグランジアン密度 (5.12) 式を

$$\mathcal{L}' = \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\mathbf{M}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathbf{M}\partial'_{\mu}\psi_{\mathrm{L}} + \mathrm{i}\psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\mathbf{N}^{\dagger}\sigma^{\mu}\mathbf{N}\partial'_{\mu}\psi_{\mathrm{R}} - m(\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{R}} + \psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{L}}) \tag{5.18}$$

と書く[1]．

---

[1] 伊藤：**(5.18) の意味**

ラグランジアン密度 (5.12) の被積分関数内 $\mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}}$ についてのみ記す：

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}} &= \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\underbrace{L^{\nu}_{\mu}\partial'_{\nu}}\psi_{\mathrm{L}} = \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\underbrace{L^{\nu}_{\mu}\tilde{\sigma}^{\mu}}\partial'_{\nu}\psi_{\mathrm{L}} = \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\mathbf{M}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\nu}\mathbf{M}\partial'_{\nu}\psi_{\mathrm{L}} \\ &= \mathrm{i}\psi'^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\nu}\partial'_{\nu}\psi'_{\mathrm{L}} \end{aligned}$$

ここで (5.15) を使い，更に最後に (5.19) を使った．同様に $\mathrm{i}\psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{R}}$ に対しては (5.16) 式と (5.20) 式を使う．

2 成分場の変換を

$$\psi'_{\mathrm{L}}(x') = \mathbf{M}\psi_{\mathrm{L}}(x), \tag{5.19}$$

$$\psi'_{\mathrm{R}}(x') = \mathbf{N}\psi_{\mathrm{R}}(x), \tag{5.20}$$

と定義する[2]．よって

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\psi'^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi'_{\mathrm{L}} + \mathrm{i}\psi'^{\dagger}_{\mathrm{R}}\sigma^{\mu}\partial'_{\mu}\psi'_{\mathrm{R}} - m(\psi'^{\dagger}_{\mathrm{L}}\psi'_{\mathrm{R}} + \psi'^{\dagger}_{\mathrm{R}}\psi'_{\mathrm{L}})$$

として，不変の形を保つことができる．質量項には $\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{N} = \mathbf{I}$ を使った．
/////////////////////////////////////////////////////////

Lorentz ブーストとして

$$L^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & 0 & 0 & -\sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & 0 & \cosh\theta \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

を考える．これは $z$ 軸方向の速度 $v/c = \tanh\theta$ のブーストである．この変換に対応する行列 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ は

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{M}^{\dagger})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\theta/2} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1}, \tag{5.24}$$

## 5.3 パリティ変換

ラグランジアン密度 (5.12) を空間半天の下で不変にすることも可能である．反転した座標系での空間座標にプライムをつけて表すと

$$\mathbf{r}' = -\mathbf{r}, \quad \nabla = -\nabla \tag{5.25}$$

である．よって (**??**) 式の所の $\sigma^{\mu}$ と $\tilde{\sigma}^{\mu}$ の定義により

$$\tilde{\sigma}^{\mu}\partial'_{\mu} = \sigma^{\mu}\partial_{\mu}, \quad \sigma^{\mu}\partial'_{\mu} = \tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} \tag{5.26}$$

が成り立つ．ラグランジアン密度 (5.12) は明らかに，以下のように定義される

$$\psi^{P}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r}') = \psi_{\mathrm{R}}(\mathbf{r}), \quad \psi^{P}_{\mathrm{R}}(\mathbf{r}') = \psi_{\mathrm{L}}(\mathbf{r}) \tag{5.27}$$

変換 $\psi(\mathbf{r}) = \psi^{P}(\mathbf{r}')$ の下で不変である[3]．

[2]伊藤：(5.18) 式で，$\mathbf{M}\partial'_{\mu} = \partial'_{\mu}\mathbf{M}$ が成立するとしている．これは $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ が座標 $x$ には依存しないことを仮定していることになる．したがって $\mathbf{M}\partial'_{\mu}\psi = \partial'_{\mu}(\mathbf{M}\psi)$ によりスピノルの変換式を導出した．

[3]伊藤：(5.12) 式で空間反転を行うと

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}') = \mathrm{i}\psi^{P\dagger}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r}')\tilde{\sigma}^{\mu}\partial'_{\mu}\psi^{P}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r}') + \mathrm{i}\psi^{P\dagger}_{\mathrm{R}}\sigma^{\mu}\partial'_{\mu}\psi^{P}_{\mathrm{R}}(\mathbf{r}') - m(\psi^{P\dagger}_{\mathrm{L}}\psi^{P}_{\mathrm{R}} + \psi^{P\dagger}_{\mathrm{R}}\psi^{P}_{\mathrm{L}})$$

$$= \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{P\dagger}(\mathbf{r}')\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}}^{P}(\mathbf{r}') + \mathrm{i}\psi_{\mathrm{R}}^{P\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{R}}^{P}(\mathbf{r}') - m(\psi_{\mathrm{L}}^{P\dagger}\psi_{\mathrm{R}}^{P} + \psi_{\mathrm{R}}^{P\dagger}\psi_{\mathrm{L}}^{P})$$
$$= \mathrm{i}\psi_{\mathrm{R}}^{P\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{R}}^{P}(\mathbf{r}') + \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{P\dagger}(\mathbf{r}')\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}}^{P}(\mathbf{r}') - m(\psi_{\mathrm{R}}^{P\dagger}\psi_{\mathrm{L}}^{P} + \psi_{\mathrm{L}}^{P\dagger}\psi_{\mathrm{R}}^{P})$$

これと (5.12)

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}) = \mathrm{i}\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathbf{r})\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{L}}(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}(\mathbf{r})\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{\mathrm{R}}(\mathbf{r}) - m(\psi_{\mathrm{L}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{R}} + \psi_{\mathrm{R}}^{\dagger}\psi_{\mathrm{L}})$$

を比べると，(5.27) が得られる．

# 第 6 章 自由空間における Dirac 方程式の解

本章では Dirac 方程式の平面波解を議論する．Dirac 粒子がスピン $\hbar/2$ を持つことを示し，Dirac 方程式からどのようにして反粒子の存在が予言されるかを調べる．

## 6.1 静止している Dirac 粒子

自由空間における Dirac 方程式を 2 成分スピノルで表すと (5.11) すなわち

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_\mathrm{L} - m\psi_\mathrm{R} = 0, \\ \mathrm{i}\sigma^\mu \partial_\mu \psi_\mathrm{R} - m\psi_\mathrm{L} = 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

であり，これらは平面波解

$$\psi_\mathrm{L} = u_\mathrm{L}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)},\ \ \psi_\mathrm{R} = u_\mathrm{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}, \tag{6.2}$$

をもつ[4]．$u_\mathrm{L}$ と $u_\mathrm{R}$ は 2 成分スピノルである．また分散関係は

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \tag{6.3}$$

である．

まず，考えている粒子が静止する慣性系 $K'$ における解を見出し，次にこの系を基準系[5] $K$ に変換する．慣性系 $K'$ において運動量は $\mathbf{p}' = \mathbf{0}$ なので (6.1) は

$$\mathrm{i}\partial'_0\psi'_\mathrm{L} = m\psi'_\mathrm{R}, \quad \mathrm{i}\partial'_0\psi'_\mathrm{R} = m\psi'_\mathrm{L},$$

である．(6.3) 式は今の場合，

$$E'^2 = m^2, \qquad E' = \pm m \tag{6.4}$$

となる．正のエネルギー $E' = +m$ の解は

$$\psi'_\mathrm{L} = u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'},\ \ \psi'_\mathrm{R} = u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'}, \tag{6.5}$$

[4]伊藤：全ての場合，解として $\pm\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)$ のうちて $+\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)$ の方をとっている．
[5]伊藤：この用語は伊藤が勝手に使った用語．

となる[6]．ここで

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で表される任意の 2 成分スピノルである．

粒子が静止している系では，正のエネルギーをもつ左手型スピノルと右手型スピノルが同じであり[7]，したがってこの解は空間反転操作の下で不変である．

## 6.2 Dirac 粒子のスピン

質量を持つ粒子のスピン演算子 $\mathbf{S}$ は，その粒子が静止している系における角運動量演算子として定義される．$\mathbf{S}$ の $z$ 方向成分は，

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

により定義される．静止系，正エネルギー状態の解 (6.5) 式の場合，$u_1 = 1, u_2 = 0$ の状態では

$$S_z\psi'_{\mathrm{L}} = (\hbar/2)\psi'_{\mathrm{L}}$$
$$S_z\psi'_{\mathrm{R}} = (\hbar/2)\psi'_{\mathrm{R}}$$

となり，左手型スピノルも，右手型スピノルもスピンは $\hbar/2$ となる．一方，$u_1 = 0, u_2 = 1$ の状態では

$$S_z\psi'_{\mathrm{L}} = -(\hbar/2)\psi'_{\mathrm{L}}$$
$$S_z\psi'_{\mathrm{R}} = -(\hbar/2)\psi'_{\mathrm{R}}$$

で，左手型スピノルも，右手型スピノルもスピンは $-\hbar/2$ となる．

## 6.3 平面波とヘリシティ

粒子が静止する座標系 $K'$ を基準系 $K$ に変換する．座標系 $K'$ は基準系 $K$ に対して $z$ 方向に $\mathbf{v} = (0, 0, v)$, $(v > 0)$ で移動している．またここでも

---

[6]伊藤：この解を導出する．単純に (6.2) 式から得られるのではない．まず，(6.2) 式より

$$\psi'_{\mathrm{L}} = u'_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'-E't')},\ \ \psi'_{\mathrm{R}} = u'_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'-E't')}$$

となるが，$\mathbf{p}' = \mathbf{0}$ であるから，

$$\psi'_{\mathrm{L}} = u'_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E't'},\ \ \psi'_{\mathrm{R}} = u'_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E't'} \ \ \rightarrow\ \ \psi'_{\mathrm{L}} = u'_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'},\ \ \psi'_{\mathrm{R}} = u'_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'}$$

これを上の式番のない Dirac 方程式に代入すると

$$-\mathrm{i}^2 m u'_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'} = m u'_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'} \ \ \longrightarrow u'_{\mathrm{L}} = u'_{\mathrm{R}} \equiv u$$

よって，この $u'_{\mathrm{L}} = u'_{\mathrm{R}} \equiv u$ を上の解 $\psi'_{\mathrm{L}} = u'_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'}$，$\psi'_{\mathrm{R}} = u'_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'}$ へ代入することで正のエネルギー解が得られる．このような手順を踏んでいる．この手続きが負のエネルギー解の導出では重要となる．

[7]伊藤：左手型と右手型の定義は無い．$\psi_{\mathrm{L}}$ と $\psi_{\mathrm{R}}$ の定義は (5.7) 式にあるが，ここでそれぞれを左手型，右手型とは明記していない．添字の L と R は左と右を表しているのであろうが.「同じスピノル」とは (6.5) 式を指している．

$u_1 = 1, u_2 = 0$ の状態を考える[8].

$K$ と $K'$ の間の座標変換は (5.23) 式で与えられ，これに伴う 2 成分スピノルの変換は (5.24) 式の行列を用いた (5.19) 式，(5.20) 式に従う．よって

$$\psi_{\mathrm{L}} = \mathbf{M}^{-1}\psi'_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\theta/2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'}\mathrm{e}^{-\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\mathrm{R}} = \mathbf{N}^{-1}\psi'_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt'}\mathrm{e}^{\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり，$t' = t\cosh\theta - z\sinh\theta$ を代入すると ($m\cosh\theta = \gamma m = E, m\sinh\theta = \gamma mv = p, \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ なので)

$$\psi_{\mathrm{L}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\mathrm{R}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

を得る[9].

ヘリシティ$P$ という物理量は平面波状態の分類に有用である．この演算子は

$$P = \frac{\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \tag{6.11}$$

である．状態 (6.10) つまりスピン +1/2 つまり $u_1 = 1, u_2 = 0$ は

$$\psi_{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (p > 0), \tag{6.12}$$

標準的な規格化条件である Lorentz スカラー $\overline{\psi}\psi$ は

$$\overline{\psi}\psi = \psi^{\dagger}\gamma^0\psi = (\psi^{\dagger}_{\mathrm{L}}, \psi^{\dagger}_{\mathrm{R}}) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \psi^{\dagger}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}} + \psi^{\dagger}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}} = 1$$

である．

同様にして $u_1 = 0, u_2 = 1$ と置くと，負のヘリシティ(スピン-1/2) をもつ固有状態

$$\psi_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix} \quad (p > 0), \tag{6.13}$$

[8]伊藤：つまりスピン+1/2 の場合

[9]伊藤：従って，速度 $v$ で運動する粒子を静止系 $K$ でみると，左手型と右手型のスピノルが異なる．これは前節の粒子が静止する系では左手型と右手型スピノルが同一であったこと対照的である．

が得られる．(6.12) 式と (6.13) 式を $\mathbf{p}\neq\mathbf{0}$ の場合に一般化すると

$$\psi_+ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}u_+(\mathbf{p}),\quad u_+(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2}|+\rangle \\ \mathrm{e}^{\theta/2}|+\rangle \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

および

$$\psi_- = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}u_+(\mathbf{p}),\quad u_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2}|-\rangle \\ \mathrm{e}^{-\theta/2}|-\rangle \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

となる[10]．

## 6.4 負エネルギー解

粒子が静止している慣性系 $K'$ において (6.4) 式の負エネルギー $E'=-m$ の解は

$$\psi'_{\mathrm{L}} = v\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'},\quad \psi'_{\mathrm{R}} = -v\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'}, \tag{6.16}$$

となる[11]．この場合，左手型スピノルと右手型スピノルは 2 成分スピノル $v$ に付く符号が異なる．

よって，負エネルギーの解は，空間反転の下で符号を変える[12]．このことを負のパリティをもつと称する．

6.3 節と同様に[13]，Lorentz ブーストにより

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-pz+Et)}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \\ -\mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix},\quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-pz+Et)}\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\theta/2} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}, (p>0), \tag{6.17}$$

[10]伊藤：$|+\rangle$ の具体的な定義が記されていないが

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[11]伊藤：(6.2) 式より負エネルギー解を

$$\psi'_{\mathrm{L}} = v'_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'-E't')},\quad \psi'_{\mathrm{R}} = v'_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}'-E't')}$$

と表記する．$\mathbf{p}'=\mathbf{0}, E'=-m$ であるから，

$$\psi'_{\mathrm{L}} = v'_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E't'},\quad \psi'_{\mathrm{R}} = v'_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E't'} \quad\to\quad \psi'_{\mathrm{L}} = v'_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'},\quad \psi'_{\mathrm{R}} = v'_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'}$$

これを式番のない Dirac 方程式に代入すると

$$\mathrm{i}^2 m v'_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'} = m v'_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'} \quad\longrightarrow -v'_{\mathrm{L}} = v'_{\mathrm{R}} \equiv -v$$

同様に 2 番目の Dirac 方程式は

$$\mathrm{i}^2 m v'_{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'} = m v'_{\mathrm{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'} \quad\longrightarrow -v'_{\mathrm{R}} = v'_{\mathrm{L}} \equiv v$$

とすることにより，問題の解が得られる．

[12]伊藤：理解できないが，ひとまずパスする．

[13]伊藤：「同様に」とは言っているものの，同様ではない．ここでは負エネルギー解＝反粒子として，反粒子のスピンを始から粒子のスピンと逆にしている．したがって，スピン+1/2 は前の表記で書くならば $u_1=0, u_2=1$ としている．ただし，この場合は $v$ であり，$v^{\mathrm{T}}=(v_1,v_2)$

となる[14].

さて，本題の練習問題である.

**6.1**　(6.14) 式に示した $\psi_+$ の下で

$$\psi_+^\dagger \psi_+ = \cosh\theta = E/m$$

であることを示せ (通常の粒子の規格化ではないことに注意せよ[15]).

　この正のヘリシティを持つ状態が右手モードにある確率は

$$\mathrm{e}^\theta/(2\cosh\theta) = (1+v/c)/2$$

であり，左手型のモードにある確率は $(1-v/c)/2$ であることを示せ.

解

$$\psi_+^\dagger \psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} & 0 & \mathrm{e}^{\theta/2} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\theta} + \mathrm{e}^{\theta}) = \cosh\theta = \frac{E}{m}$$

[14]伊藤：今，2 成分スピノル $v$ を

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし，$v_1 = 1, v_2 = 0$ の場合とすると

$$\psi_\mathrm{L} = \mathbf{M}^{-1}\psi'_\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\theta/2} \end{pmatrix} v\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'}\mathrm{e}^{\theta/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_\mathrm{R} = \mathbf{N}^{-1}\psi'_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix} (-v\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'}) = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'}\mathrm{e}^{-\theta/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，これらを以下の式に代入すると,

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_\mathrm{L} \\ \psi_\mathrm{R} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt'} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \\ -\mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix}$$

が得られる．更に，$t' = t\cosh\theta - z\sinh\theta$ であり $m\cosh\theta = \gamma m = E, m\sinh\theta = \gamma m v = p, \gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$ とすればよい．しかし，$\psi_-$ については，$v_1 = 0, v_2 = 1$ として，そのまま計算すると

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-pz+Et)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} \\ 0 \\ -\mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

となり，$\psi_\mathrm{L}$ の方にマイナス記号が付く理由が分からない.

[15]伊藤：通常ならば，$\overline{\psi}_+\psi_+$

となる．また，正のヘリシティをもつ状態は

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_\mathrm{L} \\ \psi_\mathrm{R} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

で表されるから，右手型モード $\psi_\mathrm{R}$ は

$$\psi_{+\mathrm{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_\mathrm{R} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．よって，$\psi_{+\mathrm{R}}^\dagger \psi_{+\mathrm{R}}$ は

$$\psi_{+\mathrm{R}}^\dagger \psi_{+\mathrm{R}} = \frac{1}{2} (0 \ \ 0 \ \ \mathrm{e}^{\theta/2} \ \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^\theta}{2}$$

が得られる．従って，正のヘリシティで右手型モードにある確率 $P_\mathrm{R}$ は

$$P_\mathrm{R} = \frac{\psi_{+\mathrm{R}}^\dagger \psi_{+\mathrm{R}}}{\psi_+^\dagger \psi_+} = \frac{\mathrm{e}^\theta}{\mathrm{e}^{-\theta} + \mathrm{e}^\theta} = \frac{\mathrm{e}^\theta}{2\cosh\theta}$$

がまず示される．次に

$$\mathrm{e}^\theta = \frac{1}{2} \left[ (\mathrm{e}^\theta + \mathrm{e}^{-\theta}) + (\mathrm{e}^\theta - \mathrm{e}^{-\theta}) \right] = \cosh\theta + \sinh\theta$$

であるから，

$$P_\mathrm{R} = \frac{\mathrm{e}^\theta}{2\cosh\theta} = \frac{1}{2}(1 + \tanh\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

が得られる．ただし，$\tanh\theta = v/c$ を使った．

同様に，左手型モードは

$$\psi_{+\mathrm{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_\mathrm{L} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．従って，正のヘリシティで左手型モードにある確率 $P_\mathrm{L}$

$$P_\mathrm{L} = \frac{\psi_{+\mathrm{L}}^\dagger \psi_{+\mathrm{L}}}{\psi_+^\dagger \psi_+} = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}}{\mathrm{e}^{-\theta} + \mathrm{e}^\theta} = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}}{2\cosh\theta} = \frac{1}{2} \frac{\cosh\theta - \sinh\theta}{\cosh\theta}$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \tanh\theta) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

となる．

追加）

正エネルギー負のヘリシティを持つ Dirac スピノルは (6.13) 式を使うことで

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ \psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \\ \mathrm{e}^{-\theta/2} \end{pmatrix},$$

であるから，左手型モードは

$$\psi_{-\mathrm{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{L}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(pz-Et)}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{\theta/2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

よって，負のヘリシティで左手型モードにある確率 $P_{\mathrm{L}}$

$$P_{\mathrm{L}} = \frac{\psi_{-\mathrm{L}}^\dagger \psi_{-\mathrm{L}}}{\psi_-^\dagger \psi_-} = \frac{\mathrm{e}^{\theta}}{\mathrm{e}^{-\theta} + \mathrm{e}^{\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\theta}}{2\cosh\theta} = \frac{1}{2}\frac{\cosh\theta + \sinh\theta}{\cosh\theta}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \tanh\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

となる． □

# 第 9 章　弱い相互作用：低エネルギー現象論

弱い相互作用に関する初期の現象論を考察する．

## 9.1　原子核の $\beta$ 崩壊

□弱い相互作用に関与する電子は左手型モードの実験事実：
正のヘリシティをもつ電子で左手型モードを持つ確率 $P_{+\mathrm{L}}$ 問題 6.1

$$P_{+\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

負のヘリシティをもつ電子で左手型モードを持つ確率 $P_{-\mathrm{L}}$ 問題 6.1（追加）

$$P_{-\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

よって，原子核の $\beta$ 崩壊で放出される電子の縦偏極度は

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = -\frac{v}{c}$$

となる[16].

## 9.2　$\pi$ 中間子の崩壊

□宇宙線物理でありふれた荷電 $\pi$ 中間子の崩壊現象は，ほぼ 100%の荷電 $\pi$ 中間子が

$$\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu, \quad \pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$$

のように崩壊し，その頻度は

$$1/\tau(\pi \to \mu\overline{\nu}_\mu) = 2.53 \times 10^{-14}\mathrm{MeV}$$

である．電子への崩壊頻度はずっと小さく

$$1/\tau(\pi \to \mathrm{e}\overline{\nu}_\mathrm{e}) = 1.23 \times 10^{-4}(1/\tau(\pi \to \mu\overline{\nu}_\mu))$$

である．

電子への崩壊頻度は，電子とニュートリノそれぞれの左手型の場だけしか相互作用に関与しないため，その数値は小さい．初期状態として $\pi^-$ 中間子が静止している系で，その崩壊を考える．

$$\pi^- \to \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$$

[16] 伊藤：正負のヘリシティをもつ左手型モードの電子の存在期待値：

$$(+1) \times P_{+\mathrm{L}} + (-1) \times P_{-\mathrm{L}} = +\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$\pi^-$ のスピンはゼロで，反ニュートリノは正のヘリシティを持つ．したがって，2 体崩壊において角運動量保存より，電子も正のヘリシティを持たなければならない．これが左手型である確率は

$$\frac{1}{2}\left[1-\frac{v_\mathrm{e}}{c}\right]=\frac{m_\mathrm{e}^2}{m_\pi^2+m_\mathrm{e}^2}=1.34\times10^{-5}$$

である．

**問題 9.1**

上の式の導出：

エネルギー保存より $m_\pi=E_\mathrm{e}+E_\nu$ であり，運動量保存より $p_\mathrm{e}=p_\nu$ である．また，ニュートリノの質量がゼロ ($m_\nu=0$) であることを考慮すると

$$E_\nu^2-p_\nu^2=m_\nu^2\to E_\nu^2=p_\nu^2\to E_\nu=p_\nu$$

であり，同様に

$$E_e^2=p_e^2+m_e^2,\quad v_e=p_e/E_e$$

である．ところで先頭の式から

$$m_\pi-E_\nu=E_e\to m_\pi-p_\nu=m_\pi-p_e=E_e$$

ここで運動量保存より $p_\mathrm{e}=p_\nu$ を使った．よって

$$(m_\pi-p_e)^2=E_e^2=p_e^2+m_e^2\quad\to\quad m_\pi^2-2m_\pi p_e+p_e^2=p_e^2+m_e^2$$

右辺の式から

$$p_e=\frac{m_\pi^2-m_e^2}{2m_\pi}$$

を得る．これから

$$E_e=m_\pi-p_e=m_\pi-\frac{m_\pi^2-m_e^2}{2m_\pi}=\frac{m_\pi^2+m_e^2}{2m_\pi}$$

であり，これらの結果より $c=1$ として

$$\frac{v_e}{c}=v_e=\frac{p_e}{E_e}=\frac{m_\pi^2-m_e^2}{m_\pi^2+m_e^2}$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{v_e}{c}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{m_\pi^2-m_e^2}{m_\pi^2+m_e^2}\right)=\frac{m_e^2}{m_\pi^2+m_e^2}$$

が得られる． □

（テキストへ戻る）同様に $\mu^-$ への崩壊頻度も決定されるが，ミュー粒子の質量が大きいため崩壊は進み

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{v_\mu}{c}\right)=0.36$$

である．

これらの特徴を取り込んだ，相互作用のラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \alpha_\pi [j^\mu \partial_\mu \Phi_\pi + j^{\mu\dagger} \partial_\mu \Phi_\pi^\dagger], \tag{9.1}$$

と書くことができる．この式が含む荷電カレントは

$$j^\mu = \mathrm{e}_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mathrm{eL}} + \mu_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mu\mathrm{L}} + \tau_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\tau\mathrm{L}}, \tag{9.2}$$

と与えられる．$\alpha_\pi$ は結合定数である．

$\Phi_\pi$ は電荷をもつ $\pi^\pm$ 中間子を記述するスカラー場である．$\Phi_\pi$ は $\pi^-$ 中間子を消滅させ，正の $\pi^+$ 中間子を生成する．4 元ベクトル $\mathrm{e}_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mathrm{eL}}$ は電子と電子ニュートリノの左手型スピノル場 $\mathrm{e}_{\mathrm{L}}, \nu_{\mathrm{eL}}$ から構築できる最も簡単な Lorentz 不変量である．レプトンの 3 世代が同等に考慮されている．

ここで扱う相互作用のラグランジアンは低次の摂動だけに用いられるもので高次補正の計算には適さない．

$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ を最低次の摂動に適用すると，静止している $\pi$ 中間子の崩壊頻度は次のようになる (問題 9.4)．

$$\frac{1}{\tau(\pi \to \mathrm{e}\overline{\nu}_e)} = \frac{\alpha_\pi^2}{4\pi}\left(1 - \frac{v_{\mathrm{e}}}{c}\right) p_{\mathrm{e}}^2 E_{\mathrm{e}}, \quad \frac{1}{\tau(\pi \to \mu\overline{\nu}_\mu)} = \frac{\alpha_\pi^2}{4\pi}\left(1 - \frac{v_\mu}{c}\right) p_\mu^2 E_\mu, \tag{9.3}$$

ここで $E_{\mathrm{e}}, E_\mu$ および $p_{\mathrm{e}}, p_\mu$ はそれぞれ荷電レプトン $(\mathrm{e}, \mu)$ のエネルギー保存則と運動量保存則を満たすことから決まる．$p_{\mathrm{e}}^2 E_{\mathrm{e}}, p_\mu^2 E_\mu$ は遷移頻度の式における状態密度因子から生じている (問題 9.2)．$(1 - v_{\mathrm{e}}/c)$ などは左手型の場だけが関与することによる因子である．

**問題 9.2**

問題 9.1 の崩壊における終状態の状態密度は

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi p_e^2 \frac{\mathrm{d}p_e}{\mathrm{d}E}$$

で与えられる．$V$ は規格化体積である．ここで

$$\frac{\mathrm{d}p_e}{\mathrm{d}E} = \frac{E_e}{m_\pi}$$

となることを示せ．

解

エネルギー保存より，系の全エネルギー $E$ は $E = m_\pi = E_e + E_\nu$ である．問題 9.1 より $E_\nu = p_\nu = p_e$ であるから，$E = m_\pi = E_e + p_e$ となる．よって

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p_e} = \frac{\mathrm{d}E_e}{\mathrm{d}p_e} + 1 = \frac{p_e}{E_e} + 1 = \frac{E_e + p_e}{E_e} = \frac{m_\pi}{E_e}$$

ここで，電子のエネルギー運動量の式より得られる

$$E_e^2 = p_e^2 + m_e^2 \to E_e \frac{\mathrm{d}E_e}{\mathrm{d}p_e} = p_e$$

を使った．

**問題 9.4**
$\mathcal{L}_{\rm int}$ の中で崩壊 $\pi^- \to {\rm e}^- + \overline{\nu}_{\rm e}$ を表す項は

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \alpha_\pi {\rm e}_{\rm L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\rm eL} \partial_\mu \Phi_\pi$$

である[17]．これに対応するハミルトニアンの項 $V(0)$ が，

$$V(0) = -\alpha_\pi \int {\rm e}_{\rm L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\rm eL} \partial_\mu \Phi_\pi {\rm d}^3 x$$

となると仮定せよ (この仮定は第 12 章で正当化される)．

この崩壊の頻度 (単位時間当たりの崩壊確率) は，最低次の摂動で

$$2\pi |\langle {\rm e}_p \overline{\nu}_{p'} | V(0) | \pi^-(\text{静止})\rangle|^2 \rho(E)$$

となる．ここで $\rho(E)$ は問題 9.2 で得た状態密度である．
式 (3.35) と式 (6.24) および問題 6.5 の自由場展開を用いて上記の行列要素を計算し，(9.3) 式を証明せよ．
解

(i) 崩壊前の $\pi$ 中間子が静止しているものとすると，$\partial\Phi/\partial t$ の項だけが寄与をする．(3.35)

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{a_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} {\rm e}^{{\rm i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} {\rm e}^{-{\rm i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right), \tag{3.35}$$

より，これから生じる因子は

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{(-{\rm i}\omega_0)}{\sqrt{2\omega_0}} a_0 = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{(-{\rm i} m_\pi)}{\sqrt{2 m_\pi}} a_0 \tag{1}$$

静止する $\pi$ 中間子のエネルギー運動量式は

$$E_\pi^2 - \mathbf{p}^2 = m_\pi^2 \to E_\pi^2 = m_\pi^2$$

で $E_\pi = \omega_0$ であるから，$\omega_0 = m_\pi$ となるからである．

(ii) 次に問題 6.5 の結果を考慮して $\overline{\nu}_{\rm L}$ の因子を計算する．反粒子であるから負のエネルギー解で正のヘリシティをとる波動関数は (6.18) 式

$$\psi_+ = {\rm e}^{{\rm i}(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + Et)} v_+(\mathbf{p}), \quad v_+(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} v_{+\rm L} \\ v_{+\rm R} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} {\rm e}^{\theta/2} |-\rangle \\ {\rm e}^{-\theta/2} |-\rangle \end{pmatrix}, \tag{6.18}$$

である．さらに，自由空間における Dirac 方程式の一般解は平面波の重ね合わせにより

$$\psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p},\epsilon} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} \left( b_{\mathbf{p}\epsilon} u_\epsilon(\mathbf{p}) {\rm e}^{{\rm i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)} + d_{\mathbf{p}\epsilon}^* v_\epsilon(\mathbf{p}) {\rm e}^{{\rm i}(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + Et)} \right), \tag{6.24}$$

[17]伊藤：問題の中で脚注を使うのも変な話であるが，別記のつもりでつけておく．そもそも，何故，${\rm e}_{\rm L}^\dagger$ で $\nu_{\rm eL}$ なのか理解できていない．スカラーを作ろうとするとこの形になるのであろうが．

ここで $\epsilon$ はヘリシティを表す $\pm$ の添字である．ボソン場を表すときに用いた因子 $1/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ の代わりに $\sqrt{m/E_{\mathbf{p}}}$ を用いている．この問題では負のエネルギーで正のヘリシティ，運動量 $\mathbf{p}'$ であるから，$\epsilon = +$ で $t = 0$ とすると $\overline{\nu}_{+\mathrm{L}}$ の因子は

$$\overline{\nu}_{+\mathrm{L}} \sim \frac{1}{\sqrt{V}} d^{\dagger}_{+\mathbf{p}'} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}'}}} v_{+} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{V}} d^{\dagger}_{+\mathbf{p}'} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}'}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\theta/2} |-\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}}$$

となる．ここで左手型なので $v_{+\mathrm{L}}$ の方をとった．

さてニュートリノの質量を $m \to 0$ とするということは，以下添字 $\mathbf{p}'$ を外して

$$\sqrt{\frac{m}{E}} = \sqrt{\frac{1}{\cosh\theta}} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}}} \to \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\theta/2}$$

であるから $m \to 0$ すなわち $\theta \to \infty$ となることを使った．これらを考慮すると

$$\overline{\nu}_{+\mathrm{L}} \sim \frac{1}{\sqrt{V}} d^{\dagger}_{+\mathbf{p}'} \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\theta/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\theta/2} |-\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{V}} d^{\dagger}_{+\mathbf{p}'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}} |-\rangle_{\mathbf{p}'} \qquad (2)$$

(iii) 波動関数最後として $\mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}$ の因子を同じく計算する．正エネルギーで$+$のヘリシティだから (6.24) 式より，

$$\mathrm{e}_{\mathrm{L}} \sim \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} b_{\mathbf{p}+} u_{+}(\mathbf{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} b_{\mathbf{p}+} \begin{pmatrix} u_{+\mathrm{L}} \\ u_{+\mathrm{R}} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

であるから，$u_{+\mathrm{L}}$ の方だけをとると (6.14) より

$$\mathrm{e}_{\mathrm{L}} \sim \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} b_{\mathbf{p}+} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\theta/2} |+\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

が得られるから，

$$\mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}} \sim \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}} b^{\dagger}_{\mathbf{p}+} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\theta/2} \langle +|_{\mathbf{p}} \qquad (3)$$

を得る．

(iv) (1),(2),(3) 式を使って以下の振幅を計算すると，$\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ を考慮して

$$\langle \mathrm{e}_{\mathbf{p}} \overline{\nu}_{-\mathbf{p}} | V(0) | \pi^- \rangle \propto \frac{(-\mathrm{i})}{\sqrt{V}} \alpha_{\pi} \sqrt{\frac{m_{\pi}}{2}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{m_e}{E_e}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\theta/2} \langle +|_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}} |-\rangle_{\mathbf{p}'}$$

$$= \frac{(-\mathrm{i})}{V\sqrt{V}} \alpha_{\pi} \sqrt{\frac{m_{\pi}}{2}} \sqrt{\frac{m_e}{E_e}} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\theta/2}$$

さらに，$V(0)$ での空間積分を考慮すると $V$ を消去できるから

$$\langle \mathrm{e}_{\mathbf{p}} \overline{\nu}_{-\mathbf{p}} | V(0) | \pi^- \rangle \langle \mathrm{e}_{\mathbf{p}} \overline{\nu}_{-\mathbf{p}} | V(0) | \pi^- \rangle \propto \frac{(-\mathrm{i})}{\sqrt{V}} \alpha_{\pi} \sqrt{\frac{m_{\pi}}{2}} \sqrt{\frac{m_e}{E_e}} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\theta/2}$$

となる．ここで $|+\rangle_{\mathbf{p}} = |-\rangle_{-\mathbf{p}}$ を使った．なお，これは進行方向を逆転させると上下が逆転することを考えれば理解できる．

引き続き計算すると，

$$|\langle \mathrm{e}_{\mathbf{p}}\overline{\nu}_{-\mathbf{p}}|V(0)|\pi^-\rangle|^2 = \frac{\alpha_\pi^2}{V}\frac{m_\pi}{2}\frac{m_e}{E_e}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\theta} \tag{4}$$

で，これまで得られた結果を代入しまとめると

$$\begin{aligned}2\pi|\langle \mathrm{e}_p\overline{\nu}_{p'}|V(0)|\pi^-(\text{静止})\rangle|^2\rho(E) &= 2\pi\left(\frac{\alpha_\pi^2}{V}\frac{m_\pi}{2}\frac{m_e}{E_e}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\theta}\right)\frac{V}{(2\pi)^3}4\pi p_e^2\frac{E_e}{m_\pi} \\ &= \frac{\alpha_\pi^2}{4\pi}\frac{m_e}{E_e}\mathrm{e}^{-\theta}p_e^2E_e \end{aligned}\tag{5}$$

が得られる．この式の中で

$$\begin{aligned}\frac{m_e}{E_e}\mathrm{e}^{-\theta} = \frac{1}{\cosh\theta}\mathrm{e}^{-\theta} &= \frac{1}{\cosh\theta}\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\theta}+\mathrm{e}^{-\theta}\right) - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\theta}-\mathrm{e}^{-\theta}\right)\right] \\ &= 1-\tanh\theta = \left(1-\frac{v_e}{c}\right)\end{aligned}$$

となるから，(5) は

$$2\pi|\langle \mathrm{e}_p\overline{\nu}_{p'}|V(0)|\pi^-(\text{静止})\rangle|^2\rho(E) = \frac{\alpha_\pi^2}{4\pi}\left(1-\frac{v_e}{c}\right)p_e^2E_e$$

となり，(9.3) 式が得られた． □

**問題 9.3**

$$\frac{\tau(\pi\to\mu\overline{\nu}_\mu)}{\tau(\pi\to\mathrm{e}\overline{\nu}_e)} = \frac{m_e^2(m_\pi^2-m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_\pi^2-m_\mu^2)^2} = 1.28\times10^{-4} \tag{9.4}$$

(9.4) 式を導出せよ．

解

まず (9.3) 式の結果は

$$\frac{1}{\tau(\pi\to\mathrm{e}\overline{\nu}_e)} = \frac{\alpha_\pi^2}{4\pi}\left(1-\frac{v_\mathrm{e}}{c}\right)p_\mathrm{e}^2E_\mathrm{e},\quad \frac{1}{\tau(\pi\to\mu\overline{\nu}_\mu)} = \frac{\alpha_\pi^2}{4\pi}\left(1-\frac{v_\mu}{c}\right)p_\mu^2E_\mu$$

である．また問題 9.1 より

$$E_e = \frac{m_\pi^2+m_e^2}{2m_\pi}$$

また

$$\frac{p_e}{E_e} = \frac{m_\pi^2-m_e^2}{m_\pi^2+m_e^2}$$

より

$$p_e = \frac{m_\pi^2-m_e^2}{m_\pi^2+m_e^2}E_e = \frac{m_\pi^2-m_e^2}{m_\pi^2+m_e^2}\frac{m_\pi^2+m_e^2}{2m_\pi} = \frac{m_\pi^2-m_e^2}{2m_\pi}$$

また同じく問題 9.1 の結果から

$$\left(1-\frac{v_e}{c}\right)=\frac{2m_e^2}{m_\pi^2+m_e^2}$$

よって，

$$\left(1-\frac{v_e}{c}\right)p_e^2E_e=\frac{2m_e^2}{m_\pi^2+m_e^2}\left(\frac{m_\pi^2-m_e^2}{2m_\pi}\right)^2\frac{m_\pi^2+m_e^2}{2m_\pi}=\frac{m_e^2(m_\pi^2-m_e^2)^2}{4m_\pi^3}$$

同様に

$$\left(1-\frac{v_\mu}{c}\right)p_\mu^2E_e=\frac{m_\mu^2(m_\pi^2-m_\mu^2)^2}{4m_\pi^3}$$

が得られるから，(9.4) 式が導出される． □

(テキストに戻る)

$$\frac{\tau(\pi\to\mu\overline{\nu}_\mu)}{\tau(\pi\to \mathrm{e}\overline{\nu}_e)}=\frac{m_e^2(m_\pi^2-m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_\pi^2-m_\mu^2)^2}=1.28\times10^{-4} \tag{9.4}$$

であるが，これは実験値　$1.23\times10^{-4}$ に非常に近い．

ラグランジアン (9.1) は $\tau$ 粒子崩壊

$$\tau^+\to\pi^++\overline{\nu}_\tau,\quad \tau^-\to\pi^-+\nu_\tau$$

も記述しており，崩壊頻度は最低次の摂動で

$$\frac{1}{\tau(\tau\to\pi\nu_\tau)}=\frac{\alpha_\pi^2}{32\pi}m_\tau^3\left[1-\left(\frac{m_\pi}{m_\tau}\right)^2\right]^2 \tag{9.5}$$

で与えられる．これによる値は $2.42\times10^{-10}$MeV であり，実験値 $(2.6\pm0.1)\times10^{-10}$MeV に充分近い．

**問題 9.11**　(9.5) 式を導出せよ．

**解**

崩壊 $\tau^-\to\pi^-+\nu_\tau$ を考える．この崩壊を起こす $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ の中の項は

$$\nu_{\tau\mathrm{L}}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\tau_\mathrm{L}\partial_\mu\Phi^\dagger$$

である．タウ粒子は静止しており，スピンが $z$ 方向を向いているとしよう．ニュートリノの運動量を $\mathbf{p}$ とする．そうすると $\pi$ 中間子の運動量は $-\mathbf{p}$ であり，相互作用のエネルギーは次の項を含む．以下相互作用を表すラグランジアン内の波動関数を理解できず.

終了

ミュー粒子の崩壊を記述する実効的ラグランジアンは，やはり関与する粒子を荷電カレントの形で結合させる．実際にレプトンだけを含むすべての崩壊は，次のラグランジアン密度によって，非常によく記述できる．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{lepton}} = -2\sqrt{2}G_{\mathrm{F}}g_{\mu\nu}j^{\mu}j^{\nu} \tag{9.8}$$

以下ちょっと略

ニュートリノと電子の相互作用実験から得られる最も重要な結果は，$\nu_\mu, \overline{\nu}_\mu$ 両方に関する弾性散乱であろう．

$$\nu_\mu + \mathrm{e}^- \to \nu_\mu + \mathrm{e}^-$$
$$\overline{\nu}_\mu + \mathrm{e}^- \to \overline{\nu}_\mu + \mathrm{e}^-$$

これらの散乱断面積は，ミュー粒子生成の断面積と同程度である．このような弾性散乱は $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ には含まれて「いない」($\mathrm{e}\nu_e \to \mathrm{e}\nu_e$ や $\mathrm{e}\overline{\nu}_\mathrm{e} \to \mathrm{e}\overline{\nu}_\mathrm{e}$ に対応する項はあるが)．したがって (9.8) 式とは別の弱い相互作用が存在しなければならない．しかし実験可能なエネルギー領域では断面積が小さいために，これに関する実験的な研究は困難である．後の章の標準模型から，実効的な相互作用ラグランジアン密度が

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = -\frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}}(j_{\mathrm{neutral}})_\mu (j_{\mathrm{neutral}})^\mu \tag{9.15}$$

のようなカレント・カレント型で表され，このカレントは Dirac スピノルを用いて

$$\begin{aligned}(j_{\mathrm{neutral}})^\mu = {} & \overline{\nu}_\mathrm{e}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\nu_\mathrm{e} + \overline{\psi}_\mathrm{e}\gamma^\mu(c_V - c_A\gamma^5)\psi_\mathrm{e} \\ & +[\mu と \tau に関する同様な項]\end{aligned} \tag{9.16}$$

で表される．$c_A$ と $c_V$ はパラメターである．これは (9.2) 式の荷電カレントとは違って電荷を変化させないので，「中性カレント」と呼ばれる (これが $\mathrm{e}\nu_e \to \mathrm{e}\nu_e$ の散乱にも寄与をすることに注意せよ)．

(9.16) 式を 2 成分スピノルを用いて書き直すと，次のようになる．

$$\begin{aligned}(j_{\mathrm{neutral}})^\mu = {} & (\nu_{\mathrm{eL}})^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\nu_{\mathrm{eL}} + (c_V + c_A)\mathrm{e}_\mathrm{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathrm{e}_\mathrm{L} + (c_V - c_A)\mathrm{e}_\mathrm{R}^\dagger\sigma^\mu\mathrm{e}_\mathrm{R} \\ & +[\mu と \tau に関する同様な項]\end{aligned} \tag{9.17}$$

この式を見ると，中性カレントには左手型だけでなく右手型のレプトン場も含まれている．2 つのパラメター $c_V$ と $c_A$ は標準模型に現れる Weinberg 角 $\theta_W$ に関係しているが，これについては第 12 章で述べる ((12.24) 式)．

# 第 10 章　自発的な対称性の破れ

弱い相互作用に関する実効的なラグランジアン密度が低次摂動の範囲で，低エネルギー領域では実験事実をよく再現した．しかしながら，これらの実効的なラグランジアンを用いた理論が繰り込み可能ではない．さらに高エネルギーでは実効的ラグランジアンでは説明できない現象がある．

本章では Weinberg-Salam 理論に取り組むための準備として，数学的に極めて単純だが，この理論の構築のために不可欠な基本概念を含むモデルを考察する．

## 10.1　大域的な対称性の破れと Goldstone ボソン

複素スカラー場 $\Phi = (\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2)/\sqrt{2}$ のラグランジアン密度は次のように書ける．

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi \tag{10.1}$$

これにポテンシャル $V(\Phi^\dagger\Phi)$ を導入して，以下のラグランジアン密度を考える：

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger\Phi), \quad V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2}[\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2]^2, \tag{10.2}$$

時空座標に依存せず $\Phi^\dagger\Phi = |\Phi|^2 = \phi_0^2$ を満たす $\Phi$ によって，最低エネルギー状態が得られる．エネルギーを最低にする場の状態は一意的ではなく，$(\phi_1, \phi_2)$ 空間において $|\Phi| = \phi_0$ の円周上の点で最低となる．よって Higgs 場の真空状態として想定しうる状態は無数にある．

ラグランジアン密度 (10.2) 式は大域的な U(1) 対称性をもっており，任意の実数 $\alpha$ に関する $\Phi \to \Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\Phi$ という変換の下で $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ という意味で不変である．$(\phi_1, \phi_2)$ 空間において系の状態を表す点は，上の変換によって $|\Phi|^2 =$ 一定の円周上を回転する．$(\phi_1, \phi_2)$ 空間の中で，たとえば $\Phi$ が実数となる方向を選んで基底状態 $(\phi_0, 0)$ と置くと，その基底状態は U(1) 対称性を破っている．

基底状態 $(\phi_0, 0)$ を基点とした展開を考えるために $\Phi = \phi_0 + (1/\sqrt{2})(\chi + \mathrm{i}\psi)$ とすると，ラグランジアン密度は次のようになる．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\sqrt{2}\phi_0\chi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\psi^2}{2}\right]^2, \tag{10.3}$$

このように，まず U(1) 対称性を破っておいて，そこから新たに定義した場の挙動を理解しなければならない．ここでは複素場の代わりに，互いに結合している 2 つの実スカラー場 $\chi$ と $\psi$ を扱うことになる．ラグランジアンを次のように書き換える：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - m^2\chi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi, \tag{10.4}$$

$\mathcal{L}_{\text{free}}$ は自由粒子の場を表し，$\mathcal{L}$ の中の場に関する 2 次の項をすべて含む．古典場の小さな振動だけを扱う場合には，これらの項が支配的な役割をもつ．ラグランジアン密度の残りの部分 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ は自由粒子間の相互作用と，粒子の運動に対する高次補正を表す．

(10.4) 式には $-m^2\chi^2$ という項があるので $\chi-$ 場は質量 $\sqrt{2}m$，スピン 0 のスカラー粒子に対応する．$\psi-$ 場に関してはこのような 2 次の質量項がないので，これに対応するスピン 0 のスカラー粒子は質量を持たない．大域的な対称性を自発的に破っている系では，必ずこのように質量を持たない粒子が生じることが分かっており，これを Goldstone ボソンと呼ぶ．

## 10.2 局所的な対称性の破れと Higgs ボソン

前節の議論を一般化して，次の「局所的な」U(1) ゲージ変換の下で不変なラグランジアンの構築を考える．

$$\Phi \to \Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta(x)}\Phi.$$

ここでの位相 $\theta = \theta(x)$ は時空座標に依存する関数である．この変換のもとでラグランジアンを不変に保てるようにするには，7.6 節と同様に，ラグランジアンに (質量を持たない) ゲージ場 $A_\mu$ を導入しなければならない．

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu - \mathrm{i}qA_\mu)\Phi^\dagger][(\partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu)\Phi] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\Phi^\dagger\Phi). \tag{10.5}$$

ただし，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ であり，前と同様

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2}[\Phi^\dagger\Phi - \phi_0^2]^2$$

とする．$\mathcal{L}$ は次の局所的ゲージ変換のもとで不変である．

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta(x)}\Phi(x), \quad A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x)$$

場のエネルギーは $A_\mu$ がゼロで，$|\Phi| = \phi_0$ となる円周上の点で最低値をとる．

与えられた真空状態 Higgs 場 $\Phi(x)$ に対して必ず $\Phi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta(x)}\Phi(x)$ が実数となるように $\theta(x)$ を選ぶことができる．この状態は対称性を破っており，このような変換は一意的である．

ここで $\Phi'(x) = \phi_0 + h(x)/\sqrt{2}$ とする．$h(x)$ は実数である．ラグランジアン密度は次のように表される．

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & [(\partial_\mu - \mathrm{i}qA'_\mu)(\phi_0 + h(x)/\sqrt{2})][(\partial^\mu + \mathrm{i}qA'^\mu)(\phi_0 + h(x)/\sqrt{2})] \\ & -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2}h^2\right]^2.\end{aligned} \tag{10.6}$$

ラグランジアンを

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

と分けると

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + q^2\phi_0^2 A_\mu A^\mu,$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q^2 A_\mu A^\mu \left(\sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2}h^2\right) - \frac{m^2}{2\phi_0^2}\left(\sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{4}h^2\right). \tag{10.7}$$

対称性を破る前には，複素スカラー Higgs 場 $\Phi = (\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2)/\sqrt{2}$ と，2 つの偏極状態をもつ質量の無いベクトル場 $A_\mu$ であった．しかし，対称性を破った後の上記 $\mathcal{L}_{\text{free}}$ では質量 $\sqrt{2}m$，スピン 0 のボソン (Higgs ボソン) を表す Higgs 実スカラー場 $h(x)$ と，質量 $\sqrt{2}q\phi_0$ のベクトルボソンを表す 3 つの独立成分[18]を持ったベクトル場 $A_\mu$ が得られた．

10.1 節で示したような大域的な対称性の破れの下で現れた質量の無いスピン 0 の Goldstone ボソンは，質量を持つスピン 1 のボソン[19]の縦偏極状態に置き換わる．

**問題 10.1**

ラグランジアン密度 (10.3) 式の中で，質量を持つボソン $\chi$ を 2 つの Goldstone ボソンに崩壊させるのはどのような相互作用か？また最低次の摂動により崩壊頻度が

$$\frac{1}{\tau(\chi \to \psi\psi)} = \frac{m_\chi}{128\pi}\left(\frac{m_\chi}{\phi_0}\right)^2$$

となることを示せ．

解

相互作用が含まれる部分は

$$-\frac{m^2}{2\phi_0^2}\left[\sqrt{2}\phi_0\chi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\psi^2}{2}\right]^2$$

であり，これを展開したものから崩壊に関係する項を抜き出すと

$$-\frac{m^2}{2\phi_0^2}2\sqrt{2}\phi_0\chi\frac{\psi^2}{2} = -\frac{m^2}{2\phi_0^2}\sqrt{2}\phi_0\chi\psi^2$$

である．$m_\chi = \sqrt{2}m$ である．また問題 9.1 を参考に，この崩壊過程を表すと，質量を持ったボソンが静止する系で崩壊前のエネルギーを $E$ とすると $E^2 = m_\chi^2 \to E = m_\chi$ であり，崩壊後の 2 つの $\psi$ のエネルギーを $E_1, E_2$，それぞれの運動量を $\mathbf{p}, -\mathbf{p}$ とするならば

$$E_1^2 - |\mathbf{p}|^2 = 0,\ \ E_1 = |\mathbf{p}| = p, \quad E_2^2 - |-\mathbf{p}|^2 = 0,\ \ E_2 = p$$

[18]伊藤：4.9 節に書かれているように，$\mu = 0, 1, 2, 3$ で Lorenz ゲージ条件を加え，独立な 3 個の成分となる．

[19]伊藤：スピン $0(s = 0)$ の Goldstone ボソンとは $2s + 1 = 1$ 成分のことで，質量を持つスピン 1 のボソンとは $s = 1, 2s + 1 = 3$ 成分のことを言っているのか．

よって，終状態のエネルギーは $E = E_1 + E_2 = 2p$ となる (全体のエネルギーは和)．よってこの崩壊の状態密度は

$$\rho(E) = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi p^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}E}, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{2}$$

となる．因子 $4\pi$ は角度積分から発生する．

行列要素 $\langle \mathbf{p}, -\mathbf{p}|V|\chi$の静止状態$\rangle$ において，$\chi$ 場は展開式 (3.21)

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{a_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \frac{a^*_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right) \tag{3.21}$$

より，$1/\sqrt{2m_\chi}$ が寄与する．何故なら，de Broglie の関係式 $E = \omega$，$\mathbf{p} = \mathbf{k}$ を考慮すると ($\hbar = c = 1$)，

$$E^2 = \omega^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

より $\omega_{\mathbf{k}} = m_\chi$ となる．同様に，$\psi$ に対しては $E_1 = E_2 = p$ であるから $\psi$ 場の因子として $1/\sqrt{2p}$ が寄与することになり，

$$2\pi|\langle \mathbf{p}, -\mathbf{p}|V|\chi\text{の静止状態}\rangle|^2 \rho(E) = 2\pi \left| \frac{m_\chi^2}{4\phi_0} \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2m_\chi}} \left( \frac{1}{\sqrt{2p}} \right)^2 \right|^2 \rho(E)$$

$$= 2\pi \frac{m_\chi^4}{8\phi_0^2} \frac{1}{2m_\chi} \frac{1}{4p^2} \frac{4\pi p^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} = \frac{m_\chi}{128\pi} \left( \frac{m_\chi}{\phi_0} \right)^2$$

が得られる． □

**問題 10.2**

ラグランジアン密度 (10.7) 式を用いて，ベクトルボソンは安定だが，結合定数が $q < m/(2\phi_0)$ であれば，スカラーボソンは 2 つのベクトルボソンに崩壊することを示せ．

**解**

(10.7) 式を書き出すと

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = q^2 A_\mu A^\mu \left( \sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{2} h^2 \right) - \frac{m^2}{2\phi_0^2} \left( \sqrt{2}\phi_0 h + \frac{1}{4} h^2 \right)$$

であるが，この中で $h$ の 1 次の項を抜き出すと

$$q^2 \sqrt{2} \phi_0 h A_\mu A^\mu$$

おそらく前の問題 10.1 を参考に解くものと思うが，若干力不足を感じるので以下省略．

# 第 11 章　電弱ゲージ場

前章では Lorentz 不変性を持つ[20]簡単なラグランジアン密度の式を作り，このラグランジアン密度が局所的な U(1) 変換の下でも不変であることを要請し，これを実現するために「ゲージ場」$A_\mu$ を導入した (10.2 節)．状態が局所的な対称性を破った結果として，質量をもつベクトル場と質量を持つ Higgs 実スカラー場を得た．このような方法で質量を導入する目的は，得られる量子場を繰り込み可能とすることである．

## 11.1　SU(2) 対称性

局所的な U(1) 変換だけでなく局所的な SU(2) 変換の下でも不変なラグランジアン密度を構築する．この概念は最初に Yang と Mills(1954) によって検討された．まず 2 成分場 (Higgs2 重項)

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

を導入する．$\Phi_A$ と $\Phi_B$ は両方とも複素スカラー場である：

$$\Phi_A = \phi_1 + \mathrm{i}\phi_2, \quad \Phi_B = \phi_3 + \mathrm{i}\phi_4$$

したがって，実質的には全部で 4 つの実場が含まれる．

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ は U(1) の任意の要素であり，$\mathbf{U}$ が SU(2) の任意の要素で $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$ とすると，今度はラグランジアン密度が次の U(1)×SU(2) 変換の下で不変であることを要請する ($\mathcal{L}'(\Phi') = \mathcal{L}(\Phi)$)．

$$\Phi \to \Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi \tag{11.2}$$

標準模型では局所的な U(1)×SU(2) 変換に対する対称性を要請する．その U(1) 変換は

$$\Phi \to \Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Phi = \exp(-\mathrm{i}\theta\tau^0)\Phi \tag{11.4a}$$

ここで

$$\tau^0 = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これを局所的な対称性にするために，次の変換則に従うベクトルゲージ場 $B_\mu(x)$ を導入しなければならない．

$$B_\mu(x) \to B'_\mu(x) = B_\mu(x) + \frac{2}{g_1}\partial_\mu\theta \tag{11.4b}$$

[20]伊藤：突然 Lorentz 不変性という用語を出している．前章の議論には Lorentz 不変性に関することは出てきていない．$\partial_\mu\partial^\mu$ は Lorentz 不変であるが，$\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi$ は Lorentz 不変か？ポテンシャルの項はスカラーであるから Lorentz 不変である．

第 7 章と同様に，ラグランジアン密度の式で

$$\mathrm{i}\partial_\mu \to \mathrm{i}\partial_\mu - \frac{g_1}{2}B_\mu$$

のように置き換える．定数 $g_1$ は理論が含むパラメターであり，慣例に従い因子 2 を入れている．

群 SU(2) の任意の要素は，次の形で書ける．

$$\mathbf{U} = \exp(-\mathrm{i}\alpha^k \tau^k) \tag{11.5}$$

ここで $\alpha^k$ は 3 つの実数を表す．$\tau^k$ は SU(2) の 3 つの生成子 (generator) だが，これは Pauli のスピン行列と同じものである．

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

大域的 SU(2) 対称性から，$\mathbf{U} = \mathbf{U}(x)$ が時空座標に依存する局所的 SU(2) 対称性へ移行するために，それぞれの生成子 $\tau^k$ に対応するベクトルゲージ場 $W_\mu^k(x)\tau^k$ が必要となる．行列

$$\mathbf{W}_\mu(x) = W_\mu^k(x)\tau^k$$

の変換則は

$$\mathbf{W}_\mu(x) \to \mathbf{W}'_\mu(x) = \mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger(x) + \frac{2\mathrm{i}}{g_2}(\partial_\mu\mathbf{U}(x))\mathbf{U}^\dagger(x) \tag{11.6}$$

であるが[21]，これは変換 (11.4) を一般化したものである．$g_2$ はこの理論が含むもう一つのパラメターである．

上の行列は

$$\mathbf{W}_\mu(x) = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2 \\ W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \tag{11.7}$$

[21]伊藤：とりあえずこれを導出しておく：つまり (11.8a) 式を考える．変換に対して不変であるとは $D'_\mu\Phi' = \exp(-\mathrm{i}\theta)\mathbf{U}D_\mu\Phi$ となればよい．

$$D'_\mu\Phi' = [\partial_\mu + (\mathrm{i}g_1/2)B'_\mu + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}'_\mu]\Phi' = [\partial_\mu + (\mathrm{i}g_1/2)(B_\mu + (2/g_1)\partial_\mu\theta) + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}'_\mu]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi$$

$$= -\mathrm{i}\partial_\mu\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi + (\partial_\mu\mathbf{U})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Phi + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}(\partial_\mu\Phi) + \frac{\mathrm{i}g_1}{2}B_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi + \mathrm{i}\partial_\mu\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi + \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}'_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi$$

$$= (\partial_\mu\mathbf{U})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Phi + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}(\partial_\mu\Phi) + \frac{\mathrm{i}g_1}{2}B_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi + \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}'_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}(\partial_\mu\Phi) + \frac{\mathrm{i}g_1}{2}B_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi + (\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Phi + \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}'_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi$$

$$= \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}(\partial_\mu\Phi) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\frac{\mathrm{i}g_1}{2}B_\mu\Phi + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}_\mu\Phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}_\mu\Phi + (\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Phi + \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}'_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}D_\mu\Phi \underbrace{- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}_\mu\Phi + (\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Phi + \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}'_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi}_{0}$$

となればよい．この最右辺がゼロとなるとは

$$-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}_\mu\Phi + (\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Phi + \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}'_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\frac{\mathrm{i}g_2}{2}\left(-\mathbf{U}\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger - \frac{2\mathrm{i}}{g_2}(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger + \mathbf{W}'_\mu\right)\mathbf{U}\Phi = 0$$

であり，これが Hermite 行列で，対角和 (trace) がゼロであることに注意されたい．これらの性質は変換 (11.6) 式の下で保持される (問題 11.1)．大域的な SU(2) 変換[22]$\mathbf{W}'_\mu(x) = \mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger(x)$ は生成子 $\tau^k$ で張られる 3 次元の「弱いアイソスピン空間」におけるベクトル $W_\mu^k$ の回転に相当する (付録 B)．

最後に新たな「共変微分の演算子」を次のように定義する

$$D_\mu\Phi = [\partial_\mu + (\mathrm{i}g_1/2)B_\mu + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}_\mu]\Phi \tag{11.8a}$$

よって，次の関係を直ちに証明できる[23]

$$D'_\mu\Phi' = [\partial_\mu + (\mathrm{i}g_1/2)B'_\mu + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}'_\mu]\Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}D_\mu\Phi$$

ただし

$$\Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}\Phi \tag{11.8b}$$

である．したがって (**??**) 式を一般化した，局所的ゲージ不変性を持つラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi - V(\Phi^\dagger\Phi) \tag{11.9}$$

である[24]．Lorentz 変換の下で $B_\mu$ と $\mathbf{W}_\mu$ が共変 4 元ベクトルとして変換することを要請すれば，$\mathcal{L}_\Phi$ も Lorentz 変換の下で不変となる[25]．

## 11.2 ゲージ場

ゲージ場 $B_\mu$ に関して，場の強度テンソル (field strength tensor)$B_{\mu\nu}$ を

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{11.10}$$

と定義し，4.2 節と同様にラグランジアン密度への力学的な寄与を $-(1/4)B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ とする．

ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ の強度テンソルは，SU(2) の非可換性のために，さらに複雑なものになる．次のように定義しなければならない．

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \left[\partial_\mu + \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}_\mu\right]\mathbf{W}_\nu - \left[\partial_\nu + \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\mathbf{W}_\nu\right]\mathbf{W}_\mu \tag{11.11}$$

---

[22]伊藤：大域的であるから，指数部は定数であるから，(11.6) 式の導関数部分は現れない．

[23]伊藤：既に (11.6) 式を証明したように，むしろこちらの方が先に定義されているはずで，これが指導原理．

[24]伊藤：馬鹿げているが，これが U(1)×SU(2) の下で不変であることを示しておく．ポテンシャルの項は明らかである．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= (D'_\mu\Phi')^\dagger D'^\mu\Phi' - V(\Phi'^\dagger\Phi') = (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}D_\mu\Phi)^\dagger(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}D_\mu\Phi) - V(\Phi^\dagger\Phi)\\ &= (D_\mu\Phi)^\dagger\mathbf{U}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathbf{U}(D_\mu\Phi) - V(\Phi^\dagger\Phi) = (D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi - V(\Phi^\dagger\Phi)\end{aligned}$$

[25]伊藤：「Lorentz 変換の下で」とはそういう事かなのだが，$\partial_\mu\partial^\mu$ が Lorentz 不変であることは明らかである．$B_\mu$ は $A_\mu$ と同様のものと考えるならば，Lorentz 不変である．しかし $\mathbf{W}_\mu$ の Lorentz 不変はどのように示せばよいのか？

(11.6) 式の SU(2) 変換 $\mathbf{W}_\mu \to \mathbf{W}'_\mu$ の下で，強度テンソルが次のように変換することが証明できる．

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} \to \mathbf{W}'_{\mu\nu} = \mathbf{U}\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{U}^\dagger \tag{11.12}$$

それほど重要ではない，この証明には紙面を要するので，脚注では無く本文に記す．

////////////////////////////　脚注　/////////////////////////////////

$\mathbf{W}'_{\mu\nu}$ を 2 つに分けて計算する．またここでだけ $g_2/2 = g$ とする．

$$\left[\partial_\mu + g\mathrm{i}\mathbf{W}'_\mu\right]\mathbf{W}'_\nu = \left[\partial_\mu + g\mathrm{i}\left(\mathbf{U}\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\right)\right]\left(\mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\mathbf{U}^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\nu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\right)$$

これを展開し，簡単な計算から得られた結果は

$$\begin{aligned}&= \mathbf{U}(\partial_\mu\mathbf{W}_\nu)\mathbf{U}^\dagger + \mathbf{U}\mathbf{W}_\nu(\partial_\mu\mathbf{U}^\dagger) + \mathrm{i}g\mathbf{U}\mathbf{W}_\mu\mathbf{W}_\nu\mathbf{U}^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}[(\partial_\mu(\partial_\nu\mathbf{U}))\mathbf{U}^\dagger \\ &\qquad +(\partial_\nu\mathbf{U})(\partial_\mu\mathbf{U}^\dagger)] - \mathbf{U}\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger(\partial_\nu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger - \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger(\partial_\nu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\end{aligned} \tag{6}$$

同様に

$$\left[\partial_\nu + g\mathrm{i}\mathbf{W}'_\nu\right]\mathbf{W}'_\mu = \left[\partial_\nu + g\mathrm{i}\left(\mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\mathbf{U}^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\nu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\right)\right]\left(\mathbf{U}\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\right)$$

$$\begin{aligned}&= \mathbf{U}(\partial_\nu\mathbf{W}_\mu)\mathbf{U}^\dagger + \mathbf{U}\mathbf{W}_\mu(\partial_\nu\mathbf{U}^\dagger) + \mathrm{i}g\mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger + \frac{\mathrm{i}}{g}[(\partial_\nu(\partial_\mu\mathbf{U}))\mathbf{U}^\dagger \\ &\qquad +(\partial_\mu\mathbf{U})(\partial_\nu\mathbf{U}^\dagger)] - \mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\mathbf{U}^\dagger(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger - \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\nu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\end{aligned} \tag{7}$$

が得られる．これらの差をとった場合に相殺する項を書き出す．先ず，(6) 式第 2 項と (7) 式第 6 項の差は

$$\mathbf{U}\mathbf{W}_\nu(\partial_\mu\mathbf{U}^\dagger) + \mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\mathbf{U}^\dagger(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\overbrace{\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}}^{\mathbf{I}}(\partial_\mu\mathbf{U}^\dagger) + \mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\mathbf{U}^\dagger(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger$$

$$= \mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\mathbf{U}^\dagger\underbrace{\mathbf{U}(\partial_\mu\mathbf{U}^\dagger)} + \mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\mathbf{U}^\dagger\underbrace{(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger} = \mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\mathbf{U}^\dagger[\mathbf{U}(\partial_\mu\mathbf{U}^\dagger) + (\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger] = \mathbf{0}$$

ここで $\mathbf{U}(\partial_\mu\mathbf{U}^\dagger) + (\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{0}$ を使った．次に (6) 式第 5 項と (7) 式第 7 項は次のようにして相殺する：中心に $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{I}$ を挟んで

$$(6)\,式第5項 = \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\nu\mathbf{U})(\partial_\mu\mathbf{U}^\dagger) = \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\nu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\underbrace{\mathbf{U}(\partial_\mu\mathbf{U}^\dagger)} = \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\nu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger[-(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger]$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\nu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger$$

となるので，差をとった場合，(7) 式第 7 項と相殺する．同様に (6) 式第 7 項と (7) 式第 5 項が相殺する．最後に (6) 式第 4 項と (7) 式第 4 項は微分演算の

順序 $(\partial_\mu\partial_\nu\mathbf{U}=\partial_\nu\partial_\mu\mathbf{U})$ に依存しないからこれらの差はゼロである．

こうして (6) 式と (7) 式の差で残ったものから

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W}'_{\mu\nu} &= \mathbf{U}(\partial_\mu\mathbf{W}_\nu)\mathbf{U}^\dagger + \mathrm{i}g\mathbf{U}\mathbf{W}_\mu\mathbf{W}_\nu\mathbf{U}^\dagger - \mathbf{U}(\partial_\nu\mathbf{W}_\mu)\mathbf{U}^\dagger - \mathrm{i}g\mathbf{U}\mathbf{W}_\nu\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger \\
&= \mathbf{U}[(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathbf{W}_\mu)\mathbf{W}_\nu - (\partial_\nu + \mathrm{i}g\mathbf{W}_\nu)\mathbf{W}_\mu]\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{U}^\dagger
\end{aligned}
$$

が得られる．

//////////////////////////////////////////////////////////////////////////

行列 $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ は次のように書ける．

$$
\mathbf{W}_{\mu\nu} = W^i_{\mu\nu}\tau^i = W^1_{\mu\nu}\tau^1 + W^2_{\mu\nu}\tau^2 + W^3_{\mu\nu}\tau^3 \tag{11.14}
$$

ここで

$$
W^1_{\mu\nu} = \partial_\mu W^1_\nu - \partial_\nu W^1_\nu - g_2(W^2_\mu W^3_\nu - W^2_\nu W^3_\mu) \tag{11.15a}
$$

$$
W^2_{\mu\nu} = \partial_\mu W^2_\nu - \partial_\nu W^2_\nu - g_2(W^3_\mu W^1_\nu - W^3_\nu W^1_\mu) \tag{11.15b}
$$

$$
W^3_{\mu\nu} = \partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\nu - g_2(W^1_\mu W^2_\nu - W^1_\nu W^2_\mu) \tag{11.15c}
$$

である．本来ならば脚注としてこの導出を行うべきであろうが紙面を要するので本文中に記す．

//////////////////////////////// 脚注 /////////////////////////////////////

これらの式の左辺は (11.14) 式の右辺であり，上の式の右辺は (11.11) 式を展開することで得られる．$\mathbf{W}_\nu$ の微分演算を含んだ線形部分は明らかであるので，$\mathbf{W}_\nu$ の 2 次の項についてだけ記す．また，計算段階では係数 $(\mathrm{i}g_2/2)$ を省略する．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W}_\mu]\mathbf{W}_\nu &= (W^1_\mu\tau^1 + W^2_\mu\tau^2 + W^3_\mu\tau^3)(W^1_\nu\tau^1 + W^2_\nu\tau^2 + W^3_\nu\tau^3) \\
&= W^1_\mu W^1_\nu(\tau^1)^2 + W^2_\mu W^1_\nu\tau^2\tau^1 + W^3_\mu W^1_\nu\tau^3\tau^1 \\
&\quad + W^1_\mu W^2_\nu\tau^1\tau^2 + W^2_\mu W^2_\nu(\tau^2)^2 + W^3_\mu W^2_\nu\tau^3\tau^2 \\
&\quad + W^1_\mu W^3_\nu\tau^1\tau^3 + W^2_\mu W^3_\nu\tau^2\tau^3 + W^3_\mu W^3_\nu(\tau^3)^2
\end{aligned} \tag{8}
$$

また，(11.11) 式右辺第 2 項は 2 次部は

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W}_\nu]\mathbf{W}_\mu &= (W^1_\nu\tau^1 + W^2_\nu\tau^2 + W^3_\nu\tau^3)(W^1_\mu\tau^1 + W^2_\mu\tau^2 + W^3_\mu\tau^3) \\
&= W^1_\nu W^1_\mu(\tau^1)^2 + W^2_\nu W^1_\mu\tau^2\tau^1 + W^3_\nu W^1_\mu\tau^3\tau^1 \\
&\quad + W^1_\nu W^2_\mu\tau^1\tau^2 + W^2_\nu W^2_\mu(\tau^2)^2 + W^3_\nu W^2_\mu\tau^3\tau^2 \\
&\quad + W^1_\nu W^3_\mu\tau^1\tau^3 + W^2_\nu W^3_\mu\tau^2\tau^3 + W^3_\nu W^3_\mu(\tau^3)^2
\end{aligned} \tag{9}
$$

となる．次に (8) 式と (9) 式の差を考えるのであるが，$(\tau^1)^2 = (\tau^2)^2 = (\tau^3)^2 = \mathbf{I}$ となるから，差をとることでゼロとなる．

(8) 式第 4 項と (9) 式第 2 項をまとめると

$$W_\mu^1 W_\nu^2 \tau^1\tau^2 - W_\nu^2 W_\mu^1 \tau^2 = W_\mu^1 W_\nu^2(\tau^1\tau^2 - \tau^2\tau^1) = W_\mu^1 W_\nu^2 2\mathrm{i}\tau^3$$

更に (8) 式第 2 項と (9) 式第 4 項をまとめると

$$W_\mu^2 W_\nu^1 \tau^2\tau^1 - W_\nu^1 W_\mu^2 \tau^1\tau^2 = -W_\nu^1 W_\mu^2(\tau^1\tau^2 - \tau^2\tau^1) = -W_\nu^1 W_\mu^2 2\mathrm{i}\tau^3$$

となるので，これらを (11.11) 式に代入すると

$$+\frac{\mathrm{i}g_2}{2}2\mathrm{i}(W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\nu^1 W_\mu^2)\tau^3 = -g_2(W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\nu^1 W_\mu^2)\tau^3$$

が得られる．これが (11.15c) 式右辺の第 3 項になる．以下同様にすれば (11.15) 式は得られる．

////////////////////////////////////////////////////////////////////

2 つのゲージ場のラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} \tag{11.16}$$

とする[26]．

本章の後のほうで示すが，$W_\mu^1$ と $W_\mu^2$ は荷電成分であって，次のような複素線形結合を定義すると便利である．

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2), \quad W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2) \tag{11.17}$$

お互いは複素共役である．(11.15a) 式と (11.15b) 式を用いて，場の強度を定義すると

$$W_{\mu\nu}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mu\nu}^1 - \mathrm{i}W_{\mu\nu}^2) = (\partial_\mu + \mathrm{i}g_2 W_\mu^3)W_\nu^+ - (\partial_\nu + \mathrm{i}g_2 W_\nu^3)W_\mu^+, \tag{11.18}$$

$W_{\mu\nu}^-$ も同様に定義できる．

//////////////////////////////////////////////////////////////

伊藤注：上では「$W_{\mu\nu}^-$ も同様に定義できる」とあるがどのように定義できるのか確認した．その結果その形は

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^- &= (W_{\mu\nu}^1 + \mathrm{i}W_{\mu\nu}^2)/\sqrt{2} \\ &= (\partial_\mu - \mathrm{i}g_2 W_\mu^3)W_\nu^- - (\partial_\nu - \mathrm{i}g_2 W_\nu^3)W_\mu^- \end{aligned} \tag{11.18A}$$

[26] 伊藤：テキストでは (11.13) 式で初めに，$\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}}$ が定義されているが，そこでは対角和を使った定義式である．しかし，はじめから (11.16) 式を $\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}}$ の定義式としても良いのではないか，とも思われるが上に「行列の固有和の不変性により云々」とある．2019 年 8 月 4 日追加

と思われる．複素共役を考慮した結果である．

$$(\partial_\mu - \mathrm{i}g_2 W^3_\mu)(W^1_\nu + \mathrm{i}W^2_\nu)/\sqrt{2} - (\partial_\nu - \mathrm{i}g_2 W^3_\nu)(W^1_\mu + \mathrm{i}W^2_\mu)/\sqrt{2}$$
$$= \left[\partial_\mu W^1_\nu - \partial_\nu W^1_\mu - g_2(W^2_\mu W^3_\nu - W^2_\nu W^3_\mu)\right]/\sqrt{2}$$
$$+\mathrm{i}\left[\partial_\mu W^2_\nu - \partial_\nu W^2_\mu - g_2(W^3_\mu W^1_\nu - W^3_\nu W^1_\mu)\right]/\sqrt{2} = (W^1_{\mu\nu} + \mathrm{i}W^2_{\mu\nu})/\sqrt{2}$$

////////////////////////////////////////////////////////////

また，(11.15c) 式は

$$W^3_{\mu\nu} = \partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu - \mathrm{i}g_2(W^-_\mu W^+_\nu - W^-_\nu W^+_\mu), \tag{11.19}$$

のように書き直すことができ，さらに (11.16) 式は次のようになる．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^3_{\mu\nu}W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\mu\nu} \tag{11.20}$$

となる[27]．

## 11.3 SU(2) 対称性の破れ

$V(\Phi^\dagger\Phi)$ は

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{m^2}{2\phi_0^2}[(\Phi^\dagger\Phi) - \phi_0^2]^2 \tag{11.21}$$

(11.5) 式の SU(2) の要素を特定する 3 つの実数パラメター $\alpha^k(x)$ を任意に決めてよい．この自由度を利用して $\Phi_A = 0$(2 条件) で，かつ $\Phi_B$ が実数 (1 条件) になるようなゲージを採用する．そうすると基底状態は

$$\Phi_{\mathrm{ground}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \tag{11.22}$$

となり，励起状態は

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{11.23}$$

という形で表される．$h(x)$ は実場である．

局所的な U(1) 対称性は残っている．(11.23) 式の場は次の U(1)×SU(2) 変換のもとで不変である[28]．

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\mathbf{U} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.24}$$

[27]伊藤注：確認

$$\frac{1}{4}W^1_{\mu\nu}W^{1\mu\nu} + \frac{1}{4}W^2_{\mu\nu}W^{2\mu\nu} = \frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\mu\nu} = \frac{1}{4}(W^1_{\mu\nu} + \mathrm{i}W^2_{\mu\nu})(W^{1\mu\nu} - \mathrm{i}W^{2\mu\nu})$$
$$= \frac{1}{4}\left(W^1_{\mu\nu}W^{1\mu\nu} + \mathrm{i}W^2_{\mu\nu}W^{1\mu\nu} - \mathrm{i}W^1_{\mu\nu}W^{2\mu\nu} + W^2_{\mu\nu}W^{2\mu\nu}\right)$$

中間部分を $\mathrm{i}W^2_{\mu\nu}W^{1\mu\nu} - \mathrm{i}W^1_{\mu\nu}W^{2\mu\nu} = 0$ としてよいだろう．

[28]伊藤：何故なら

$$\Phi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\mathbf{U}\Phi = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x)/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h(x)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

上記の行列は群 U(1) の $2\times2$ 表現である．この残された対称性[29]が電磁気学の U(1) 対称性になる．

(11.9) 式の $\mathcal{L}_\Phi$ を $h(x)$ を用いて表す．(11.21) 式より

$$V(\Phi^\dagger\Phi)=m^2h^2+\frac{m^2h^3}{\sqrt{2}\phi_0}+\frac{m^2h^4}{8\phi_0^2}=V(h)$$

である．また (11.8a) 式と (11.7) 式

$$D^\mu\Phi=D^\mu\begin{pmatrix}0\\ \phi_0+h(x)/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \partial^\mu h(x)/\sqrt{2}\end{pmatrix}+\frac{\mathrm{i}g_1}{2}\begin{pmatrix}0\\ B^\mu(\phi_0+h(x)/\sqrt{2})\end{pmatrix}$$

$$+\frac{\mathrm{i}g_2}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}W^{+\mu}(\phi_0+h(x)/\sqrt{2})\\ -W^{3\mu}(\phi_0+h(x)/\sqrt{2})\end{pmatrix}$$

$$(D_\mu\Phi)^\dagger=\begin{pmatrix}0\\ \partial_\mu h(x)/\sqrt{2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}-\frac{\mathrm{i}g_1}{2}\begin{pmatrix}0\\ B_\mu(\phi_0+h(x)/\sqrt{2})\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$-\frac{\mathrm{i}g_2}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}W_\mu^-(\phi_0+h(x)/\sqrt{2})\\ -W_\mu^3(\phi_0+h(x)/\sqrt{2})\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

となる．$(D_\mu\Phi)^\dagger$ と $D^\mu\Phi$ をかけることで，$\mathcal{L}_\Phi$ は

$$\mathcal{L}_\Phi=\frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h+\frac{g_2^2}{2}W_\mu^-W^{+\mu}\left(\phi_0+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$+\left[\frac{g_2^2}{4}W_\mu^3W^{3\mu}-\frac{g_1g_2}{2}W_\mu^3B^\mu+\frac{g_1^2}{4}B_\mu B^\mu\right]\left(\phi_0+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2-V(h)$$

となる[30]．さらに中間項を次のようにまとめる．

$$\mathcal{L}_\Phi=\frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h+\frac{g_2^2}{2}W_\mu^-W^{+\mu}\left(\phi_0+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$+\frac{1}{4}(g_1^2+g_2^2)Z_\mu Z^\mu\left(\phi_0+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2-V(h)\tag{11.25}$$

ここで

$$Z_\mu=W_\mu^3\cos\theta_W-B_\mu\sin\theta_W\tag{11.26}$$

$$\cos\theta_W=\frac{g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}},\quad \sin\theta_W=\frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\tag{11.27}$$

で，$\theta_W$ は Weinberg 角と呼ばれる[31]．

場 $Z_\mu$ と共に，これと直交する 1 次結合

$$A_\mu=W_\mu^3\sin\theta_W+B_\mu\cos\theta_W\tag{11.28}$$

[29]伊藤：つまり，$\theta$ を固定していないので，$\theta$ に関する自由度が残っている．よって，これを固定すると対称性が破れ，$A_\mu$ が質量を持つことになる．

[30]伊藤：この部分テキストに誤記が多い．なお，$g_1$ の 1 次，$g_2$ の 1 次の項は+-でキャンセルする．ただし，添字の上下は無視しなければならない．つまり，$\partial_\mu hB^\mu=\partial^\mu hB_\mu$ としてキャンセルする．内積として考えれば問題ない．

[31]伊藤：これは (11.24) 式での $\theta$ とは無関係である．したがって，U(1) 対称性は残っている．

を定義する[32].

(11.26) 式と (11.28) 式を逆に解くと

$$\begin{aligned} B_\mu &= A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu \sin\theta_W, \\ W^3_\mu &= A_\mu \sin\theta_W + Z_\mu \cos\theta_W \end{aligned} \tag{11.29}$$

となる.

## 11.4 場の物理的な確定[33]

全ラグランジアン密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{\mathrm{dyn}}$ の各項を再構成して，物理的内容を表す段階に至った．$\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}}$ の $B_\mu$ と $W^3_\mu$ を $A_\mu$ と $Z_\mu$ の 2 つの場で記述しなおす.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{\mathrm{dyn}} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

先ず $\mathcal{L}_1$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu h - m^2 h^2 \\ -\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\phi_0^2(g_1^2+g_2^2)Z_\mu Z^\mu \\ -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \\ -\frac{1}{2}[(D_\mu W^+_\nu)^* - (D_\nu W^+_\mu)^*][D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}] \\ +\frac{1}{2}g_2^2\phi_0^2 W^-_\mu W^{+\mu} \end{aligned} \tag{11.31}$$

で，ここでの共変微分商 $D_\mu W^+_\nu = (\partial_\mu + \mathrm{i}g_2 \sin\theta_W A_\mu)W^+_\nu$ のようになる[34]. $h, Z, W^+$ には各々質量項が付いているが，$A_\mu$ には対応するものが無い.

//////////////////////////伊藤脚注はじまり//////////////////////////////////

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{\mathrm{dyn}} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{g_2^2}{2}W^-_\mu W^{+\mu}\left(\phi_0 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2$$

---

[32]伊藤注：ここで「直交する」という言葉が出るが $(W^3_\mu, B_\mu)$ を考えた場合，この座標の $\theta_W$ 回転の関係にある $(Z_\mu, A_\mu)$ を考えるということで

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

を意味している.

[33]伊藤：identification の訳で「同定」としたのだろうが,「確定」の方があっていると思う. システム同定という用語もあるが.

[34]伊藤：この部分がどうしても理解できない．よって，この章はここまでとする．次の章でヒントになる事が現れることを期待して.

$$+\frac{1}{4}(g_1^2+g_2^2)Z_\mu Z^\mu\left(\phi_0+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2-V(h) \tag{11.25}$$

の右辺第 2 項

$$\frac{g_2^2}{2}W_\mu^- W^{+\mu}\left(\phi_0^2+2\frac{h\phi_0}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}h^2\right)$$

のカッコ内第 1 項が (11.31) の最後の項になっている．その他の 2 項は $\mathcal{L}_2$ に入れる．

次に

$$B_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}\cos\theta_W-Z_{\mu\nu}\sin\theta_W$$

$$W_{\mu\nu}^3=A_{\mu\nu}\sin\theta_W-Z_{\mu\nu}\cos\theta_W-\mathrm{i}g_2(W_\mu^-W_\nu^+-W_\nu^-W_\mu^+)$$

を考慮して，(11.20) の $\mathcal{L}_{\rm dyn}$ 右辺第 1 項と第 2 項の一部を加えることにより，式 (11.31) の

$$-\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}-\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}$$

を得る．ただし，$W_{\mu\nu}^3$ の虚数部から発生する項は $\mathcal{L}_2$ に入れる．

最も面倒なのが (11.31) の

$$-\frac{1}{2}[(D_\mu W_\nu^+)^*-(D_\nu W_\mu^+)^*][D^\mu W^{+\nu}-D^\nu W^{+\mu}]$$

であるが，これは (11.20) の $\mathcal{L}_{\rm dyn}$ 右辺最後の項，第 3 項 $W_{\mu\nu}^-W^{+\mu\nu}$ から発生する．これには先ず，式 (11.18) に注意しなければならない．

$$W_{\mu\nu}^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mu\nu}^1-\mathrm{i}W_{\mu\nu}^2)=(\partial_\mu+\mathrm{i}g_2W_\mu^3)W_\nu^+-(\partial_\nu+\mathrm{i}g_2W_\nu^3)W_\mu^+, \tag{11.18}$$

$W_{\mu\nu}^+$ の複素共役は，$W_{\mu\nu}^1$，$W_{\mu\nu}^2$ が実であることに注意すると

$$(W_{\mu\nu}^+)^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mu\nu}^1+\mathrm{i}W_{\mu\nu}^2)=W_{\mu\nu}^-$$

となり，これは (11.18A) に示した $W_{\mu\nu}^-$ になっている．更に (11.18) に記したように，共変微分係数は

$$(\partial_\mu+\mathrm{i}g_2W_\mu^3)W_\nu^+=(\partial_\mu+\mathrm{i}g_2(A_\mu\sin\theta_W+Z_\mu\cos\theta_W))W_\nu^+$$

となるが，ここでは $Z_\mu$ は除外しているので，共変微分演算子を

$$D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}g_2A_\mu\sin\theta_W$$

とし，$Z_\mu$ に関連する項は $\mathcal{L}_2$ に入れている．

/////////////////////////脚注おわり////////////////////////////////////

**問題 11.1**

式 (11.6) で表される $\mathbf{W}_\mu'$ が Hermite 行列で，固有和がゼロであることを示

せ．
解

$$\mathbf{W}'_\mu(x) = \mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger(x) + \frac{2\mathrm{i}}{g_2}(\partial_\mu\mathbf{U}(x))\mathbf{U}^\dagger(x)$$

右辺第 1 項は

$$(\mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger(x))^\dagger = \mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger(x)$$

なので Hermite 行列である．また

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger(x)) = \mathrm{Tr}(\mathbf{U}^\dagger(x)\mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu) = \mathrm{Tr}\mathbf{W}_\mu = 0$$

でトレースもゼロとなる．第 2 項については以下のような単純な解答でも良いか？　$\mathbf{U}(x) = \exp(-\mathrm{i}\alpha(x)^k\tau^k)$ なので

$$\partial_\mu\mathbf{U} = \{\partial_\mu(-\mathrm{i}\alpha(x)^k\tau^k)\}\mathbf{U}(x) = -\mathrm{i}\{\partial_\mu\alpha(x)^k\}\tau^k\mathbf{U}(x)$$

よって

$$(2\mathrm{i}/g_2)(\partial_\mu\mathbf{U}(x))\mathbf{U}^\dagger(x) = (2/g_2)\partial_\mu\alpha^k\tau^k$$

となるから第 2 項は実数係数による $\tau^k$ の線形結合となる．各 $\tau^k$ は Hermite でありトレースはすべてゼロである．　□

**問題 11.2**
式 (11.13) と式 (11.16) が等価であることを示せ．
解
つまり

$$\frac{1}{8}\mathrm{Tr}(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}) = \frac{1}{4}\sum_{1=1}^{3}W^i_{\mu\nu}W^{i\mu\nu}$$

が成立することを言えばよい．$\mathbf{W}_{\mu\nu} = W^k_{\mu\nu}\tau^k$ である．

$$\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu} = (W^1_{\mu\nu}\tau^1 + W^2_{\mu\nu}\tau^2 + W^3_{\mu\nu}\tau^3)(W^{1\mu\nu}\tau^1 + W^{2\mu\nu}\tau^2 + W^{3\mu\nu}\tau^3)$$

$$\mathrm{Tr}\left(\tau^i\right)^2 = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \qquad \mathrm{Tr}(\tau^i\tau^k) = 0, \quad i \neq k$$

□

**問題 11.3**
式（11.31）の右辺最後の 2 つの項が，質量を持つ荷電ベクトルボソン場の対に対応することを証明せよ．
伊藤注：訳が疑問である.「右辺最後の項の 2 つは質量を持つ荷電ベクトルボソン場の対」ではないか．これについては，後程触れる．

解

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 = &\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu h - m^2h^2 \\
&-\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\phi_0^2(g_1^2+g_2^2)Z_\mu Z^\mu \\
&-\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} \\
&-\frac{1}{2}[(D_\mu W_\nu^+)^* - (D_\nu W_\mu^+)^*][D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}] \\
&\quad +\frac{1}{2}g_2^2\phi_0^2 W_\mu^- W^{+\mu}
\end{aligned}
\tag{11.31}
$$

この式の最後であるので，式 (11.17）すなわち

$$
W^{+\mu} = (W^{1\mu} - \mathrm{i}W^{2\mu})/\sqrt{2}, \quad W_\mu^- = (W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2)/\sqrt{2}]
$$

より

$$
\begin{aligned}
+\frac{1}{2}g_2^2\phi_0^2 W_\mu^- W^{+\mu} &= \frac{1}{4}g_2^2\phi_0^2(W_\mu^1 + \mathrm{i}W_\mu^2)(W^{1\mu} - \mathrm{i}W^{2\mu}) \\
&= \frac{1}{4}g_2^2\phi_0^2(W_\mu^1W^{1\mu} + \mathrm{i}W_\mu^2W^{1\mu} - \mathrm{i}W_\mu^1W^{2\mu} + W_\mu^2W^{2\mu}) \\
&= \frac{1}{4}g_2^2\phi_0^2(W_\mu^1W^{1\mu} + W_\mu^2W^{2\mu})
\end{aligned}
$$

を得る．つまり，これら $W_\mu^1W^{1\mu}$ と $W_\mu^2W^{2\mu}$ の 2 つがベクトルボソン場の質量に対応している．これが最初に「訳」に関して疑問視した点である．例えば，p.148 でも $W_\mu^1, W_\mu^2, Z_\mu$ は式 (4.15) と同様の自由場展開が可能」と同格で扱っている．また，そもそも式（11.31）では各々質量項との対応を次のように記している：

$h$ 場

$$
\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu h - m^2h^2
$$

$Z_\mu$ 場

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{\phi_0^2(g_1^2+g_2^2)}{2}Z_\mu Z^\mu\right)
$$

こうして，対応としては $W_\mu^1$ と $W_\mu^2$ には

$$
\frac{1}{2}[(D_\mu W_\nu^+)^* - (D_\nu W_\mu^+)^*][D^\mu W^{+\nu} - D^\nu W^{+\mu}] - \frac{g_2^2\phi_0^2}{2}W_\mu^- W^{+\mu}
$$

である．同じく p.148 の先頭にもあるように $W$ の質量を $\phi_0 g_2/\sqrt{2}$ とし，$Z_\mu$ の質量を $\phi_0\sqrt{g_1^2+g_2^2}/\sqrt{2}$ としている.(質量項への寄与の形は $W_\mu^1W^{1\mu}+W_\mu^2W^{2\mu}$ となるが 1 つの寄与を考え $1/(\sqrt{2})^2 = 1/2$ としている．すなわち規格化という当たり前のこと.） □

**問題 11.5**

何を狙った計算かわからない.

**問題 11.6**
単なる計算練習.

# 第 12 章　レプトンの Weinberg-Salam 理論

この章では各レプトン場を，電磁場および $W^+, W^-, Z$ のゲージボソン場すべてに結合させせる．この理論は低エネルギーにおいて第 9 章の現象論を再現しなければならない．この指針と U(1)×SU(2) の局所的ゲージ対称性の要請から，それぞれの結合の仕方は一意的に決まる．

前章で Higgs 機構により $W^\pm$ ボソンと $Z$ ボソンに質量が付与されることを議論した．荷電レプトン (電子，ミュー粒子，タウ粒子) にも質量を与えるために，これらの粒子も Higgs 場と結合させなければならない．こうして電弱相互作用を統一する Weinberg-Salam 理論に到達する．

## 12.1　レプトン 2 重項と Weinberg-Salam 理論

まずは U(1) および SU(2) 変換の下で不変なレプトン場に関するラグランジアン密度を構築しよう．左手型の電子スピノル $\mathrm{e_L}$ と電子ニュートリノスピノル $\nu_{\mathrm{eL}}$ を，(11.1) 式の Higgs 場のように SU(2) の 2 重項として一緒にする．

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{eL}} \\ \mathrm{e_L} \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

2 成分の左手型スピノルは $\psi_{\mathrm{L}}$，右手型スピノルは $\psi_{\mathrm{R}}$ と添字をつけて表す．この 2 重項は SU(2) 変換のもとで Higgs2 重項と全く同じように変換する[35]．

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \mathbf{UL} \tag{12.2}$$

SU(2) 変換は 2 重項をなす 2 つのスピノル場を混合するので Lorentz 不変性を維持するためには，同じ Lorentz 変換を持つ場の組合わせだけが SU(2) の 2 重項を形成できる．

右手型の電子スピノル $\mathrm{e_R}$ には 2 重項を形成する相手が無い．よって SU(2) 変換の下で $\mathrm{e_R}$ は不変であると結論する．

$$\mathrm{e_R} \to \mathrm{e'_R} = \mathrm{e_R} \tag{12.3}$$

変換則 (12.2) に整合するように，すべての SU(2) ゲージ共変微分は同じ形 $\partial_\mu + \mathrm{i}(g_2/2)\mathbf{W}_\mu$ でなければならない．ここで $g_2 \sin\theta_W = e$ である．しかし，$U(1)$ ゲージ場 $B_\mu$ に対する結合定数にはこのような制約はない[36](問題 12.1 参照)．共変微分商は

$$D_\mu \mathbf{L} = \left[\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2}\mathbf{W}_\mu + \mathrm{i}\frac{g'}{2}B_\mu\right]\mathbf{L} \tag{12.4}$$

[35] 伊藤：レプトンを先に考えれば，Higgs 場もレプトンと同じように SU(2) 変換するということになる．レプトンもクォークも Higgs 粒子も同じ SU(2) 変換に従うということになる．

[36] 伊藤：前章で U(1) に関しては対称性を破っていない．つまり，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ の $\theta$ を固定していない．

と書かれるが $g'$ は任意である[37].

**問題 12.1**

$\mathbf{W}_\mu$ をゼロと置き，次の力学的ラグランジアン密度を考える．

$$\mathcal{L}_1 = \mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i}(\partial_\mu + \mathrm{i}(g'/2)B_\mu)\mathbf{L}$$

(11.4b) 式のゲージ変換

$$B_\mu \to B'_\mu = B_\mu + (2/g_1)\partial_\mu\theta$$

で，$\mathbf{L}$ が

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \exp[-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta]\mathbf{L}$$

と変換するならば，$\mathcal{L}_1$ は不変であることを示せ．

解

$\mathbf{L}$ を $\mathcal{L}_1$ に代入して計算するだけ．

$$\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g'}{2}B'_\mu\right)\mathbf{L}' = \left[\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g'}{2}\left(B_\mu + \frac{2}{g_1}\partial_\mu\theta\right)\right]\exp[-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta]\mathbf{L}$$

$$= \left[-\mathrm{i}\frac{g'}{g_1}(\partial_\mu\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\mathbf{L} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\partial_\mu\mathbf{L} + \mathrm{i}\frac{g'}{2}B_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\mathbf{L} + \mathrm{i}\frac{g'}{g_1}(\partial_\mu\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\mathbf{L}\right]$$

$$= \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\partial_\mu\mathbf{L} + \mathrm{i}\frac{g'}{2}B_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\mathbf{L}\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g'}{2}B_\mu\right)\mathbf{L}$$

となるから，

$$\mathcal{L}'_1 = \mathbf{L}'^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathrm{i}(\partial_\mu + \mathrm{i}(g'/2)B'_\mu)\mathbf{L}' = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\mathbf{L}\right)^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\tilde{\sigma}^\mu\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g'}{2}B_\mu\right)\mathbf{L}$$

$$= \mathbf{L}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta}\tilde{\sigma}^\mu\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g'}{2}B_\mu\right)\mathbf{L} = \mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g'}{2}B_\mu\right)\mathbf{L}$$

となり不変である． □

次に，$B_\mu$ をゼロと置き，以下のラグランジアン密度を考える．

$$\mathcal{L}_2 = \mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g"}{2}\mathbf{W}_\mu\right)\mathbf{L}$$

(11.6) 式のゲージ変換

$$\mathbf{W}_\mu(x) \to \mathbf{W}'_\mu(x) = \mathbf{U}(x)\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger(x) + \frac{2\mathrm{i}}{g_2}(\partial_\mu\mathbf{U}(x))\mathbf{U}^\dagger(x) \qquad (11.6)$$

の下で $\mathcal{L}_2$ を不変にする唯一の条件が

$$\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \mathbf{UL} \quad と \quad g" = g_2$$

[37]伊藤：任意ではあるが U(1) 変換は $\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \exp[-\mathrm{i}(g'/g_1)\theta]\mathbf{L}$ としなければならない．

であることを示せ．
解
$\mathcal{L}_2'$ の右辺の右側の計算をしておく．

$$\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g"}{2}\mathbf{W}_\mu'\right)(\mathbf{UL}) = \left[\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g"}{2}\left\{\mathbf{U}\mathbf{W}_\mu\mathbf{U}^\dagger + \frac{2\mathrm{i}}{g_2}(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger\right\}\right](\mathbf{UL})$$

$$= (\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{L} + \mathbf{U}(\partial_\mu\mathbf{L}) + \mathrm{i}\frac{g"}{2}\mathbf{U}\mathbf{W}_\mu\mathbf{L} - \frac{g"}{g_2}(\partial_\mu\mathbf{U})\mathbf{L}$$

となる．よって，この式で先頭の項と最後の項がキャンセルする為には，$g" = g_2$ でなければならない．このとき

$$\mathcal{L}_2' = (\mathbf{UL}^\dagger)\tilde{\sigma}^\mu\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2}\mathbf{W}_\mu'\right)\mathbf{UL} = \mathbf{L}^\dagger\underbrace{\mathbf{U}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{U}}\mathrm{i}\left(\partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2}\mathbf{W}_\mu\right)\mathbf{L}$$

となる．したがって，$\mathbf{U}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{U} = \tilde{\sigma}^\mu$ であるならば，不変性が成り立つが，この式の成立は限定的である．何故なら，この式に左から $\mathbf{U}$ をかけると

$$\mathbf{U}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{U} = \tilde{\sigma}^\mu \to \tilde{\sigma}^\mu\mathbf{U} = \mathbf{U}\tilde{\sigma}^\mu$$

となり，$\sigma^i, (i = 0, 1, 2, 3)$ を代入し具体的に計算すると，

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\tilde{\sigma}^i = \tilde{\sigma}^i\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \to \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

の場合にのみ $\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{U} = \mathbf{U}\tilde{\sigma}^\mu$ は成立する．

それはさておき，ここで言いたいことは，もしもレプトンに対しても $\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \mathbf{UL}$ を要請したならば，ラグランジアン密度を不変にするためには

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}\frac{g_2}{2}\mathbf{W}_\mu$$

としなければならない，という事である．

(テキストに戻る)　ここで，ニュートリノが電気的に中性となり，電子が電荷 $-e$ を持つように $g'$ を選ばなければならない．$D_\mu\mathbf{L}$ の中で電磁場 $A_\mu$ に結合する項は $W_\mu^3$ と $B_\mu$ の線形結合である．(11.7) 式と (11.29) 式を用いると，$A_\mu$ が付いたものだけを引き抜く[38]．

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu + \{\mathrm{i}(g_2/2)\sin\theta_W + \mathrm{i}(g'/2)\cos\theta_W\}A_\mu, & 0 \\ 0 & ,\partial_\mu + \{-\mathrm{i}(g_2/2)\sin\theta_W + \mathrm{i}(g'/2)\cos\theta_W\}A_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{eL}} \\ \mathrm{e_L} \end{pmatrix}$$

である．ニュートリノを中性にして，電子に電荷 $-e$ を与えるゲージ微分商は各々$\partial_\mu\nu_{\mathrm{eL}}$ および $(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\mathrm{e_L}$ を得るためには

$$g'\cos\theta_W = -g_2\sin\theta_W = -e$$

[38]伊藤：(12.4) 式で $A_\mu$ が付く項を引出すのであるから，$\mathrm{i}(g_2/2)W_\mu^3$ と $\mathrm{i}(g'/2)B_\mu$ の部分から引出すことになる．

と設定すればよい[39].

左手型の場に対する全ゲージ共変微分商は

$$D_\mu \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \partial_\mu + \mathrm{i}(e/\sin 2\theta_W) Z_\mu & \mathrm{i}\{e/(\sqrt{2}\sin\theta_W)\} W_\mu^+ \\ \mathrm{i}\{e/(\sqrt{2}\sin\theta_W)\} W_\mu^- & \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu - \mathrm{i}e\cot(2\theta_W) Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{eL}} \\ \mathrm{e_L} \end{pmatrix} \tag{12.5}$$

となる．(11.7) 式と (11.8a) 式，(11.29) 式を使った．

$\mathrm{e_R}$ のゲージ共変導関数は

$$D_\mu \mathrm{e_R} = [\partial_\mu + \mathrm{i}(g''/2) B_\mu] \mathrm{e_R} \tag{12.6a}$$

という形でなければならない[40]．電子の電荷が $-e$ であることを考慮すると $g'' = -2e/\cos\theta_W$ より

$$D_\mu \mathrm{e_R} = [(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu) + \mathrm{i}e\tan\theta_W Z_\mu] \mathrm{e_R} \tag{12.6b}$$

となる[41]．よって，(11.38) 式とあわせ考えると $g'' = -2g_1$ となる．

$$e = g_2 \sin\theta_W = g_1 \cos\theta_W \tag{11.38}$$

$g'' = -2g_1$，$g' = -g_1$ とすると[42]，局所的 U(1)×SU(2) 変換

$$\begin{aligned} &\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)} \mathbf{U}(x) \mathbf{L}, \\ &\mathrm{e_R} \to \mathrm{e}'_{\mathrm{R}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta(x)} \mathrm{e_R} \end{aligned}$$

とすると[43]，この変換でゲージ共変微分商が次の関係

$$D'_\mu \mathbf{L}' = [\partial_\mu + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}'_\mu + (\mathrm{i}g'/2) B'_\mu] \mathbf{L}' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mathbf{U} D_\mu \mathbf{L}$$

$$D'_\mu \mathrm{e}'_{\mathrm{R}} = [\partial_\mu + (\mathrm{i}g''/2) B'_\mu] \mathrm{e}'_{\mathrm{R}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \mathbf{U} D_\mu \mathrm{e_R}$$

---

[39] 伊藤：つまり，$\nu_{\mathrm{eL}}$ に対する微分演算子で

$$\mathrm{i}(g_2/2)\sin\theta_W + \mathrm{i}(g'/2)\cos\theta_W = 0$$

となれば良いのだから，$g_2 \sin\theta_W = -g'\cos\theta_W$ となり，これを $\mathrm{e_L}$ の微分演算子に代入すると $\partial_\mu - \mathrm{i}g_2 \sin\theta_W A_\mu$ となる．これにより

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu & 0 \\ 0 & \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{eL}} \\ \mathrm{e_L} \end{pmatrix}$$

となる．

[40] 伊藤：$\mathrm{e_R}$ は 2 重項を作らないから，SU(2) 変換に寄与しないので $\mathbf{W}_\mu$ に関連しない．しかし $\mathrm{e_L}$ とともに U(1) 対称性を持つから共変微分で $\mathrm{i}(g''/2)B_\mu$ 依存性はある．

[41] 伊藤：テキストの訳よりは以下のように考えた方が理解しやすい．

$$D_\mu \mathrm{e_R} = [\partial_\mu + \mathrm{i}(g''/2)(A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu \sin\theta_W)] \mathrm{e_R}$$

で，$A_\mu$ 部分がいつもの形 $\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu$ となるためには $g'' = -2e/\cos\theta_W$ でなければならない．

[42] 伊藤：(12.5) 式の直前に設定した，$g'\cos\theta_W = -g_2\sin\theta_W = -e$ と (11.38) 式から $g' = -g_1$ が考えられる．

[43] 伊藤：これに式番号が付いていないのが不思議である．これらは，Higgs 粒子に対する (11.2) 式に対応するレプトン版 U(1)×SU(2) 変換である．$g' = -g_1$ であるから $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\theta(x)}$ である．

を満たすことを容易に確認できる[44]．ゲージ場 $B_\mu$ および $\mathbf{W}_\mu$ は (11.4b) 式と (11.6) 式により変換される．

ここで電子と電子ニュートリノのラグランジアン密度の力学的な部分に関して，ゲージ不変かつ Lorentz 不変な式を，次のように構築できる．

$$\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{dyn}} = \mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i}D_\mu\mathbf{L} + \mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{R}}\sigma^\mu\mathrm{i}D_\mu\mathrm{e}_{\mathrm{R}} \tag{12.7}$$

ゲージ共変微分の構築によってゲージ不変性が得られ，5.4 節に示したスピノルの性質によって Lorentz 不変性が得られている[45]．電磁場との相互作用を除き，因子 $D_\mu\mathbf{L}$ から，レプトンの重いベクトルボソンとの相互作用が完全に決まることに注意されたい．

最後に，荷電レプトンに質量を与える．ゲージ不変かつ Lorentz 不変で，電子に質量を与え，ニュートリノの質量はゼロにするようなラグランジアン密度への寄与は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{mass}} &= -c_{\mathrm{e}}[(\mathbf{L}^\dagger\Phi)\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{R}}(\Phi^\dagger\mathbf{L})] \\ &= -c_{\mathrm{e}}[(\nu^\dagger_{\mathrm{L}}\Phi_A + \mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{L}}\Phi_B)\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{R}}(\Phi^\dagger_A\nu_{\mathrm{L}} + \Phi^\dagger_B\mathrm{e}_{\mathrm{L}})]\end{aligned} \tag{12.8}$$

とする[46]．$\Phi$ は Higgs 場の 2 重項で，$c_{\mathrm{e}}$ は無次元の結合定数である．自発的に対称性が破れると，$\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{mass}}$ は

$$\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{mass}} = -c_{\mathrm{e}}\phi_0(\mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{L}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{R}}\mathrm{e}_{\mathrm{L}}) - \frac{c_{\mathrm{e}}h}{\sqrt{2}}(\mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{L}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{R}}\mathrm{e}_{\mathrm{L}}) \tag{12.9}$$

となる[47]．これを Dirac 場のラグランジアン密度 (5.12) 式と比較すると，$c_{|rme}\phi_0$ は電子の質量 $m_e$ と同じものと考えられる．対称性の原理のもとで質量を導入すると，不可避的に電子場と Higgs 実スカラー場 $h(x)$ の相互作用項も現れる．その結合定数は，(**??**) 式を用い

$$\frac{c_{\mathrm{e}}}{\sqrt{2}} = \frac{m_e}{\sqrt{2}\phi_0} = 2.01\times 10^{-6} \tag{12.10}$$

---

[44]伊藤：これらは (11.8b) 式の上の式にあるもののレプトン版である．簡単な，第 2 番目の式の成立を示しておく．

$$D'_\mu\mathrm{e}'_{\mathrm{R}} = [\partial_\mu - \mathrm{i}g_1(B_\mu + 2/g_1\partial_\mu\theta)]\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} = 2\mathrm{i}(\partial_\mu\theta)\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + (\partial_\mu\mathrm{e}_{\mathrm{R}})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$$
$$-\mathrm{i}g_1B_\mu\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} - 2\mathrm{i}(\partial_\mu\theta)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}(\partial_\mu - \mathrm{i}g_1B_\mu)\mathrm{e}_{\mathrm{R}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}D_\mu\mathrm{e}_{\mathrm{R}}$$

[45]伊藤：ということで第 5 章にちょっと戻る．

[46]伊藤：$\mathbf{L}^\dagger\Phi$ といった手の込んだ定義が必要か疑問である．勿論，Higgs 場が対称性を破った場合に，$\Phi_A$ がゼロとなって，$\Phi_B$ が残るように仕組まれているし，また，最初から $\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = (\nu_{\mathrm{e}}, \mathrm{e}_{\mathrm{L}})$ と定義しており，決して $\mathbf{L}^{\mathrm{T}} = (\mathrm{e}_{\mathrm{L}},\nu_{\mathrm{e}})$ という順序ではなかった．

[47]伊藤：この結果は (12.8) 式で対称性が破れた場合の Higgs 場 $\Phi_A = 0, \Phi_B = \phi_0 + h/\sqrt{2}$ としたもの．エイチスンの場合は，このような面倒な定義をしていないので，(12.9) 式最右辺の不明確な $h$ の質量項は出てこない．

つまり，(12.8) の定義式を飛ばして，最初から

$$\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{mass}} = -c_{\mathrm{e}}\phi_0(\mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{L}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^\dagger_{\mathrm{R}}\mathrm{e}_{\mathrm{L}})$$

でよいのでは．

が得られる．$c_{\mathrm{e}}$ がこのように小さいことは好都合である．この因子のために QED の計算が無意味にならない．

電子と電子ニュートリノに関する全ラグランジアン密度 $\mathcal{L}^{\mathrm{e}}$ は (12.7) 式と (12.8) 式によって与えられる．

$$\mathcal{L}^{\mathrm{e}} = \mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{dyn}} + \mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{mass}} \tag{12.11}$$

具体的には

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{Dirac}} &= \nu^{\dagger}_{\mathrm{eL}}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{i}(\partial_{\mu}\nu_{\mathrm{L}}) + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{i}(\partial_{\mu} - \mathrm{i}eA_{\mu})\mathrm{e}_{\mathrm{L}} \\ &+\mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{i}(\partial_{\mu} - \mathrm{i}eA_{\mu})\mathrm{e}_{\mathrm{R}} - m_e(\mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\mathrm{e}_{\mathrm{R}} + \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{R}}\mathrm{e}_{\mathrm{L}})\end{aligned} \tag{12.12}$$

である．これは第 6 章と第 7 章での，質量のない Dirac ニュートリノと，電磁場内の質量 $m_e$，電荷 $-e$ の Dirac 電子に関するラグランジアンの式に相当する．

中略

以上ボソンとレプトンの質量は，局所的な対称性を破る Higgs 機構を通じて付与される．'tHooft(1971) はこの理論が繰り込み可能であることを，革新的な解析手法を用いて証明した．

## 12.2 レプトンの $W^{\pm}$ への結合

電子と電子ニュートリノのゲージ場 $W^{\pm}$ との結合は，(12.5) 式と (12.7) 式から該当する項を拾い出すことにより

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{eW}} &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}}\nu^{\dagger}_{\mathrm{eL}}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{L}}W^{+}_{\mu} - \frac{g_2}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mathrm{eL}}W^{-}_{\mu} \\ &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}}[j^{\mu\dagger}_{\mathrm{e}}W^{+}_{\mu} + j^{\mu}_{\mathrm{e}}W^{-}_{\mu}]\end{aligned} \tag{12.15}$$

が得られる[48]．ただし，

$$j^{\mu}_{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mathrm{eL}}, \quad j^{\mu\dagger}_{\mathrm{e}} = \nu^{\dagger}_{\mathrm{eL}}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{L}} \tag{12.16}$$

とする．これと同様にミュー粒子とタウ粒子の荷電カレントも存在するので，全レプトンの荷電カレントは

$$j^{\mu} = \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mathrm{eL}} + \mu^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\mu\mathrm{L}} + \tau^{\dagger}_{\mathrm{L}}\tilde{\sigma}^{\mu}\nu_{\tau\mathrm{L}} \tag{12.17}$$

---

[48] 伊藤：(12.5) 式を計算すると

$$D_{\mu}\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \{\partial_{\mu} + \mathrm{i}(e/\sin 2\theta_W)Z_{\mu}\}\nu_{\mathrm{eL}} + \mathrm{i}(g_2/\sqrt{2})W^{+}_{\mu}\mathrm{e}_{\mathrm{L}} \\ \mathrm{i}(g_2/\sqrt{2})W^{-}_{\mu}\nu_{\mathrm{eL}} + (\partial_{\mu} - \mathrm{i}eA_{\mu} - \mathrm{i}e\cot(2\theta_W)Z_{\mu})\mathrm{e}_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$$

これに (12.7) 式に従って，左から

$$\mathbf{L}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{i} = (\nu^{\dagger}_{\mathrm{eL}}, \mathrm{e}^{\dagger}_{\mathrm{L}})\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{i}$$

をかけて，$W^{\pm}_{\mu}$ だけを抜き出したのが (12.15) 式である．

であり，全相互作用ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{lW}} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}}[j^{\mu\dagger}W^+_\mu + j^\mu W^-_\mu] \tag{12.18}$$

となる[49].

9.4 節でミュー粒子崩壊の議論に用いた実効的な $\mathcal{L}_{\mathrm{lepton}}$ を，Weinberg-Salam 理論の低エネルギー近似として得ることができる．質量 $M_W$ は非常に大きいので，低エネルギーでラグランジアン密度への $W$ の寄与を考えると，(11.31) 式では $M_W^2 W^-_\mu W^{+\mu}$ の項が支配的となり，上記の相互作用とあわせたラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{W}} = M_W^2 W^-_\mu W^{+\mu} - \frac{g_2}{\sqrt{2}}[j^{\mu\dagger}W^+_\mu + j^\mu W^-_\mu] \tag{12.19}$$

となる (テキストには誤植かミスがある[50])．実際の物理的な場は，この作用を停留値にする形をとる．$W^+_\mu$ と $W^-_\mu$ を独立に変化させると，場の式が

$$M_W^2 W^-_\mu = \frac{g_2}{\sqrt{2}} j^{\mu\dagger},\ \ M_W^2 W^+_\mu = \frac{g_2}{\sqrt{2}} j^\mu \tag{12.20}$$

が得られ[51]，これを (12.19) 式に代入すると

$$\mathcal{L}_{\mathrm{W}} \approx -\frac{1}{2}\frac{g_2^2}{M_W^2} j^\dagger_\mu j^\mu \tag{12.21}$$

が得られる[52]．この $\mathcal{L}_{\mathrm{W}}$ を (9.8) 式の $\mathcal{L}_{\mathrm{lepton}}$ と比較すると

$$G_{\mathrm{F}} = \frac{g_2^2}{4\sqrt{2}M_W^2} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}M_W^2 \sin^2\theta_W} \tag{12.22}$$

とすることができる[53]．理論値から $G_{\mathrm{F}} = 1.12 \times 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2}$ と算出され，これは実験値 $1.166 \times 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2}$ と一致する．

---

[49]伊藤：後の計算のためには

$$\mathcal{L}_{\mathrm{lW}} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}}[j^\dagger_\mu W^{+\mu} + j^\mu W^-_\mu]$$

と定義したほうが良い．こうしておけば，余計な $W^+_\mu$ という量を新たに持ち出す必要がない．

[50]伊藤：要は (12.18) 式の定義で脚注に記した定義を採用すればよい．

[51]伊藤：(12.18) 式の定義につけた脚注で再定義した式を使えば

$$M_W^2 W^-_\mu = \frac{g_2}{\sqrt{2}} j^\dagger_\mu, \quad M_W^2 W^{+\mu} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} j^\mu$$

となる．

[52]伊藤：(12.20) を (12.19) 式に代入すると，$\mathcal{L}_{\mathrm{W}} \approx -M_W^2 W^-_\mu W^{+\mu}$ が得られる．これに再度，脚注で定義した $j^\dagger_\mu, j^\mu$ を使って，$W^-_\mu W^{+\dagger}$ を消去すると，(12.21) 式が得られる．この方法ならば余計な添字の上げ下げが必要ない．

[53]伊藤：

$$-2\sqrt{2}G_{\mathrm{F}} j^{\mu\dagger} j_\mu = -\frac{g_2^2}{2M_W^2} j^{\mu\dagger} j_\mu$$

より．

一連の展開で確かにこのような結果が得られるが，(11.31) 式だけで $M_W$ の大きさを利用して論理を展開しているが，ラグランジアンを広げて，$\mathcal{L}_2$ まで考慮した場合には $M_Z$ も現れる．こうした場合には，ここで展開した方法でこの Fermi 定数の値算出まで漕ぎつけるか．

## 12.3　レプトンの $Z$ への結合

ゲージ場 $Z$ へのレプトンの結合の式は，(12.5) 式と (12.7) 式から該当する項を拾いあげることにより，ただし (12.6b) に注意し (テキストにミスプリあり，$j^\mu Z_\mu$ とする)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eZ}} = -\nu_{\mathrm{eL}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mathrm{eL}} \left( \frac{e}{\sin 2\theta_W} \right) Z_\mu + \mathrm{e}_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{L}} \left( \frac{e\cos 2\theta_W}{\sin 2\theta_W} \right) Z_\mu - \mathrm{e}_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{R}} (e \tan\theta_W) Z_\mu$$

$$= \frac{-e}{\sin 2\theta_W} (j_{\mathrm{neutral}})^\mu Z_\mu$$

を得る[54]ここで中性カレントは

$$(j_{\mathrm{neutral}})^\mu = \nu_{\mathrm{eL}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mathrm{eL}} - \cos(2\theta_W) \mathrm{e}_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{L}} + 2\sin^2\theta_W \mathrm{e}_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{R}} \qquad (12.23)$$

である．$\mathcal{L}_{\mu Z}$ と $\mathcal{L}_{\tau Z}$ も同様の式で表される．$Z$ への結合には右手型のレプトン場も含まれることに注意されたい．

$\mathcal{L}_{\mathrm{Z}}$ の低エネルギー極限の式は，12.2 節で $\mathcal{L}_{\mathrm{W}}$ の低エネルギー極限を求めたのと同様に結合定数を決めることになる．(12.23) 式と (9.17) 式

$$(j_{\mathrm{neutral}})^\mu = \nu_{\mathrm{eL}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \nu_{\mathrm{eL}} + (c_V + c_A) \mathrm{e}_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{L}} + (c_V - c_A) \mathrm{e}_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \mathrm{e}_{\mathrm{R}} \qquad (9.17)$$

とを比較することにより

$$c_A = -\frac{1}{2}, \quad c_V = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta \qquad (12.24)$$

を得る[55]．これにより低エネルギー極限での式は，実効的なラグランジアン密度 (9.15) 式と一致する．

## 12.5　CP 対称性

第 5 章において，空間反転操作の下で左手型スピノル $\psi_{\mathrm{L}}$ は右手型スピノル $\psi_{\mathrm{R}}$ に，右手型スピノルは左手型スピノルに変換することを確認した ((5.27) 式)．Weinberg-Salam ラグランジアンはレプトン波動関数の左手型成分だけ

[54]伊藤：$W^\pm$ の導出と同じである．ただし，$\mathrm{e}_{\mathrm{R}}$ を含む．(12.5) 式を計算すると

$$D_\mu \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \{\partial_\mu + \mathrm{i}(e/\sin 2\theta_W) Z_\mu\} \nu_{\mathrm{eL}} + \mathrm{i}(g_2/\sqrt{2}) W_\mu^+ \mathrm{e}_{\mathrm{L}} \\ \mathrm{i}(g_2/\sqrt{2}) W_\mu^- \nu_{\mathrm{eL}} + (\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu - \mathrm{i}e\cot(2\theta_W) Z_\mu) \mathrm{e}_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$$

これに (12.7) 式に従って，左から

$$\mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i} = (\nu_{\mathrm{eL}}^\dagger, \mathrm{e}_{\mathrm{L}}^\dagger) \tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i}$$

をかけて，$Z_\mu$ だけを抜き出したのが求める式となる．

[55]伊藤：各々の係数を比較して得られる連立方程式

$$\begin{aligned} c_V + c_A &= -\cos 2\theta \\ c_V - c_A &= 2\sin^2\theta \end{aligned}$$

を解けばよい．

が SU(2) ゲージ場 $\mathbf{W}_\mu$ に結合しているので空間反転対称性を持たない．また第 7 章で荷電共役変換

$$\psi_{\mathrm{L}}^{C} = -\mathrm{i}\sigma^2\psi_{\mathrm{R}}^*, \quad \psi_{\mathrm{R}}^{C} = \mathrm{i}\sigma^2\psi_{\mathrm{L}}^*$$

を論じたが，この変換は Dirac 方程式の粒子の解を反粒子の解と関係付ける．Weinberg-Salam 理論ではニュートリノに関して左手型の場だけが存在しているので，荷電共役対称性も成立しない．

しかし Weinberg-Salam ラグランジアンは，両方の操作を組み合わせた CP 変換に関する対称性を持つ．この対称性の意味するところは，右手型座標系で記述された粒子の物理と，左手型座標系で記述された反粒子の物理が同じだということである．

CP 操作によりレプトン場は

$$\psi_{\mathrm{L}}^{CP} = -\mathrm{i}\sigma^2\psi_{\mathrm{L}}^*, \quad \psi_{\mathrm{R}}^{CP} = \mathrm{i}\sigma^2\psi_{\mathrm{R}}^* \tag{12.31}$$

と変換する[56]．

電弱理論に含まれる他の場は，以下のように変換する．
Higgs 場

$$\begin{pmatrix} \Phi_A^{CP} \\ \Phi_B^{CP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_A^* \\ \Phi_B^* \end{pmatrix}$$

U(1) ゲージ場：

$$B_0^{CP} = -B_0, \quad B_i^{CP} = B_i$$

SU(2) ゲージ場：省略

上記の変換の下に

$$\begin{aligned} &W_0^{+CP} = -W_0^-, \quad W_i^{+CP} = W_i^- \\ &Z_0^{CP} = -Z_0, \quad Z_i^{CP} = Z_i, \\ &A_0^{CP} = -A_0, \quad A_i^{CP} = A_i, \end{aligned} \tag{12.32}$$

となる．

ラグランジアン密度がこれらの変換の下で不変であることを示すには，いくらか注意が必要である．その例として (12.7) 式のなかの

$$\mathrm{e}_{\mathrm{R}}^{\dagger}\sigma^{\mu}\mathrm{i}[\partial_\mu + \mathrm{i}(g''/2)B_\mu]\mathrm{e}_{\mathrm{R}} = \ell$$

を考える．これを $\ell$ とする．それぞれの場を $CP$ 変換して，$\partial_i$ を $\partial_i$ で置き換えると

$$\ell^{CP} = \mathrm{e}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}(\sigma^{\mu})^{\mathrm{T}}\mathrm{i}[\partial_\mu - \mathrm{i}(g''/2)B_\mu]\mathrm{e}_{\mathrm{R}}^*$$

[56]伊藤：形式的に単純に C 変換，P 変換を行ったということか．つまり C 変換により $\psi_{\mathrm{L}} \to \psi_{\mathrm{R}}$ に，更に P 変換により $\psi_{\mathrm{R}} \to \psi_{\mathrm{L}}$ へと変換され，トータルで $\psi_{\mathrm{L}} \to \psi_{\mathrm{L}}$ となる．

となる[57]．ただし，次の関係を利用した．

$$(\sigma^2)^2 = \mathrm{I}, \quad \sigma^2\sigma^i\sigma^2 = -(\sigma^i)^{\mathrm{T}}$$

$\ell^{CP}$ は $\ell$ と同じではないが，その違いは全微分の形で表される．ラグランジアンに任意関数の全導関数を加えても結果への影響はないので，$\ell^{CP}$ に $-\mathrm{i}\partial_\mu[\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}(\sigma^\mu)^T\mathrm{e}_\mathrm{R}^*]$ を加えると[58]，

$$-\mathrm{i}(\partial_\mu \mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T})(\sigma^\mu)^T\mathrm{e}_\mathrm{R}^* + (g''/2)B_\mu \mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}(\sigma^\mu)^T\mathrm{e}_\mathrm{R}^*$$

となる．これに転置を施すと積の順序の入れ替えが発生し，$\mathrm{e_R}$ と $\mathrm{e}_\mathrm{R}^\dagger$ がフェルミオン場で反交換するためにマイナスが現れて $\ell$ と同じになる[59]．

**問題 12.2**

第 11 章で示した数学的構造の下で，2 つの場によって SU(2) の 2 重項を形成する場合には，それらの電荷が $e$ の違いを持たなければならないことを示せ．

**解**

2 つの場を

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$$

で表される 2 重項とする．局所的ゲージ対称性を維持するために，ラグランジアン密度の力学的な項は

$$\mathbf{L}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i}(\partial_\mu + \mathrm{i}(g_2/2)\mathbf{W}_\mu)\mathbf{L}$$

---

[57]伊藤：$\mu = 0$ と $\mu = i = 1,2,3$ とに分けて示す．$\mathrm{e}_\mathrm{R}^{CP} = \mathrm{i}\sigma^2\mathrm{e}_\mathrm{R}^*$，$\mathrm{e}_\mathrm{R}^{\dagger CP} = -\mathrm{i}\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}(\sigma^2)^\dagger = -\mathrm{i}\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}\sigma^2$ である．よって $\mu = 0$ の場合

$$\begin{aligned}\ell^{CP}(\mu=0) &= (\mathrm{e}_\mathrm{R}^\dagger)^{CP}\sigma^0\mathrm{i}[(\partial_0)^{CP} + \mathrm{i}(g''/2)(B_\mu)^{CP}](\mathrm{e_R})^{CP} \\ &= (-\mathrm{i}\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}\sigma^2)\sigma^0\mathrm{i}[\partial_0 - (g''/2)B_0]\mathrm{i}\sigma^2\mathrm{e}_\mathrm{R}^* = \mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}\sigma^2\sigma^0\sigma^2\mathrm{i}[\partial_0 - (g''/2)B_0]\mathrm{e}_\mathrm{R}^* \\ &= \mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}\sigma^0\mathrm{i}[\partial_0 - (g''/2)B_0]\mathrm{e}_\mathrm{R}^* = \mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}(\sigma^0)^T\mathrm{i}[\partial_0 - (g''/2)B_0]\mathrm{e}_\mathrm{R}^*\end{aligned}$$

また，$\mu = 1,2,3$ の場合

$$\begin{aligned}\ell^{CP}(\mu=i) &= (\mathrm{e}_\mathrm{R}^\dagger)^{CP}\sigma^0\mathrm{i}[(\partial_0)^{CP} + \mathrm{i}(g''/2)(B_\mu)^{CP}](\mathrm{e_R})^{CP} \\ &= (-\mathrm{i}\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}\sigma^2)\sigma^i\mathrm{i}[-\partial_i + (g''/2)B_i]\mathrm{i}\sigma^2\mathrm{e}_\mathrm{R}^* = \mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}\sigma^2\sigma^i\sigma^2\mathrm{i}[-\partial_i + (g''/2)B_i]\mathrm{e}_\mathrm{R}^* \\ &= \mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}(-\sigma^2\sigma^i\sigma^2)\mathrm{i}[\partial_i - (g''/2)B_i]\mathrm{e}_\mathrm{R}^* = \mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}(\sigma^i)^T\mathrm{i}[\partial_i - (g''/2)B_i]\mathrm{e}_\mathrm{R}^*\end{aligned}$$

[58]伊藤：すなわち

$$-\mathrm{i}\partial_\mu[\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}(\sigma^\mu)^T\mathrm{e}_\mathrm{R}^*] = -\mathrm{i}(\partial_\mu\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T})(\sigma^\mu)^T\mathrm{e}_\mathrm{R}^* - \mathrm{i}\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}(\sigma^\mu)^T(\partial_\mu\mathrm{e}_\mathrm{R}^*)$$

を加えた．

[59]伊藤：

$$\begin{aligned}(\ell^{CP})^\mathrm{T} &= [-\mathrm{i}(\partial_\mu\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T})(\sigma^\mu)^T\mathrm{e}_\mathrm{R}^* + (g''/2)B_\mu\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T}(\sigma^\mu)^T\mathrm{e}_\mathrm{R}^*]^\mathrm{T} \\ &= \mathrm{i}(\mathrm{e}_\mathrm{R}^*)^\mathrm{T}\sigma^\mu(\partial_\mu\mathrm{e_R}) - (g''/2)B_\mu(\mathrm{e}_\mathrm{R}^*)^\mathrm{T}\sigma^\mu\mathrm{e_R} = \mathrm{e}_\mathrm{R}^\dagger\sigma^\mu\mathrm{i}(\partial_\mu + \mathrm{i}(g''/2)B_\mu)\mathrm{e_R} = \ell\end{aligned}$$

ここで

$$[(\partial_\mu\mathrm{e}_\mathrm{R}^\mathrm{T})(\sigma^\mu)^T\mathrm{e}_\mathrm{R}^*]^\mathrm{T} = -(\mathrm{e}_\mathrm{R}^*)^\mathrm{T}\sigma^\mu(\partial_\mu\mathrm{e_R})$$

などとした．これについては第 7 章 p.95 に「すなわち，2 つの場の積の順序を入れ替えると負号が付く．たとえば，$\psi_a^*\psi_b = -\psi_b\psi_a^*$ である．」これを使った．

という形でなければならない．$L_1$ と $L_2$ を結合させる項は，たとえば

$$
\begin{aligned}
&-(g_2/2)L_1^*\tilde{\sigma}^\mu(W_\mu^1 - \mathrm{i}W_\mu^2)L_2 \\
&= -(g_2/\sqrt{2})L_1^*\tilde{\sigma}^\mu L_2 W_\mu^+
\end{aligned}
$$

である．演算子 $W_\mu^+$ は電荷 $e$ を消滅させるので[60]，電荷保存のためには $L_1^*\tilde{\sigma}^\mu L_2$ が電荷 $e$ を生成しなければならない．

[60] 伊藤：この部分は誤記が多い．$L_1^\dagger$ では無く，$L_1^*$，$W_\mu^\dagger$ ではなく $W_\mu^+$ であると思う．更に最後の式の係数は $g_2/2$ では無く $(g_2/\sqrt{2})$ とする．$W_\mu^+$ は電荷 $e$ を消滅させる，についてはエイチスンの「ゲージ理論入門 II」第 10 章，p.102 の図 10.2 に

$$
\mathrm{n} \to W^- + \mathrm{p}, \quad W^- \to \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e
$$

という反応が記されているので，$W^-$ は $e$ を生成する．その逆が $W_\mu^+$ である．

# 第 14 章　クォークの電弱相互作用

標準模型での強い相互作用の源はクォークの「色」(色電荷) である．しかし本章ではクォークの電磁相互作用と弱い相互作用について考察する．クォークの電弱理論は第 12 章でのレプトンの電弱理論と非常によく似た方法で構築される．しかし，この理論の場合，レプトンほど密接した実験検証は行われていない．クォークをハドロンから孤立させることができないからである．実験はクォークの複合系に対するものに限られ，基礎的なラグランジアン密度は低エネルギーでは，強い相互作用のために曖昧なものになる．しかし，高エネルギー領域において，特に $Z$ ボソンのハドロン的崩壊を通して，単独のクォークに関する電弱相互作用の物理をある程度まで確認できる．このような崩壊に関する実験データは第 15 章で紹介する．

## 14.1　ラグランジアン密度の構築

低エネルギーにおいて，理論は

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$$

のような崩壊を記述しなければならない．あるいはクォークで記述すると

$$\mathrm{d} \to \mathrm{u} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$$

という崩壊が対象となる．この崩壊は W ボソンによって媒介される．同じく W ボソンによって媒介されるミュー粒子の崩壊

$$\mu^- \to \nu_\mu + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$$

と比較すると，クォーク場の左手型成分 $u_\mathrm{L}$ と $d_\mathrm{L}$ を一緒にして SU(2)2 重項を形成するのが妥当と考えられる．

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} u_\mathrm{L} \\ d_\mathrm{L} \end{pmatrix} \tag{14.1}$$

$u_\mathrm{R}$ と $d_\mathrm{R}$ については，$\mathrm{e_R}$ と同様に SU(2) 変換の下で不変とする．

上記の方法の下では弱い相互作用の構築方法に自由度はない．クォークに関するラグランジアン密度の力学的部分をゲージ不変にする方法は一つだけである．場 $\mathbf{W}_\mu$ への結合は SU(2) 対称性によって一意的に決まり，場 $B_\mu$ との結合は u クォークの電荷が $2e/3$，d クォークの電荷が $-e/3$ という条件によって固定される．その結果

$$\mathcal{L}_\mathrm{dyn} = \mathbf{L}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \mathrm{i}[\partial_\mu + (\mathrm{i}g_2/2)\mathbf{W}_\mu + (\mathrm{i}g_1/6)B_\mu]\mathbf{L}$$

$$+u_\mathrm{R}^\dagger \sigma^\mu \mathrm{i}[\partial_\mu + (2\mathrm{i}g_1/3)B_\mu]u_\mathrm{R}$$

$$+d_{\mathrm{R}}^{\dagger}\sigma^{\mu}\mathrm{i}[\partial_\mu - (\mathrm{i}g_1/3)B_\mu]d_{\mathrm{R}} \tag{14.2}$$

となる[61]．ここで $g_2 \sin\theta_W = g_1 \cos\theta_W = e$ である．

ゲージ場の変換則 (11.4b) と (11.6) と整合するように，クォーク場の U(1)×SU(2) 変換は，次のようでなければならない．

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L} \to \mathbf{L}' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(x)/3}\mathbf{U}\mathbf{L},\\
&u_{\mathrm{R}} \to u'_{\mathrm{R}} = \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta(x)/3}u_{\mathrm{R}},\\
&d_{\mathrm{R}} \to d'_{\mathrm{R}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta(x)/3}d_{\mathrm{R}}
\end{aligned} \tag{14.3}$$

(11.17) 式と (11.29) 式に従い，$\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}}$ を $W_\mu^{\pm}, Z_\mu, A_\mu$ を用いて書き直すと

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\mathrm{dyn}}\\
&= \mathbf{L}^{\dagger}\tilde{\sigma}^{\mu}\mathrm{i}\begin{pmatrix} \partial_\mu + \dfrac{2\mathrm{i}e}{3}A_\mu + \dfrac{\mathrm{i}e}{3\sin 2\theta_W}(1+2\cos 2\theta_W)Z_\mu, & \dfrac{\mathrm{i}e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}W_\mu^{+} \\ \dfrac{\mathrm{i}e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}W_\mu^{-}, & \partial_\mu - \dfrac{\mathrm{i}e}{3}A_\mu - \dfrac{\mathrm{i}e}{3\sin 2\theta_W}(2+2\cos 2\theta_W)Z_\mu \end{pmatrix}\mathbf{L}\\
&\quad + u_{\mathrm{R}}^{\dagger}\sigma^{\mu}\mathrm{i}\left[\partial_\mu + \frac{2\mathrm{i}e}{3}A_\mu - \frac{2\mathrm{i}e}{3}\tan\theta_W Z_\mu\right]u_{\mathrm{R}}\\
&\quad + d_{\mathrm{R}}^{\dagger}\sigma^{\mu}\mathrm{i}\left[\partial_\mu - \frac{\mathrm{i}e}{3}A_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{3}\tan\theta_W Z_\mu\right]d_{\mathrm{R}}
\end{aligned} \tag{14.4}$$

となる[62]．

しかしながら標準模型はクォークの組合わせが 3 世代 (3 家族) あることを

---

[61] 伊藤：$\mathbf{L}$ に対する共変微分で $(\mathrm{i}g_1/6)B_\mu$ 項は何故 1/6 かという点であるが，その内わけは u の電荷が $2e/3$ で d が $-1e/3$ である．この段階では $2e/3 + (-e/3) = 1e/3$ となる．よってこれを考慮し $g_1/(3\cdot 2)$ とした．つまり，ハイパー荷

[62] 伊藤：この式から (14.2) 式の $B_\mu$ が $\mathrm{i}g_1/6$ と書かれた内わけが分かる．(11.8a) 式を

$$D_\mu\Phi = \left[\partial_\mu\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{\mathrm{i}g_1}{6}B_\mu\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{\mathrm{i}g_2}{2}\begin{pmatrix}W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^{+}\\ \sqrt{2}W_\mu^{-} & -W_\mu^3\end{pmatrix}\right]\Phi$$

ここで $g_1 = e/\cos\theta_W$，$g_2 = e/\sin\theta_W$ である．また，$B_\mu = A_\mu\cos\theta_W - Z_\mu\sin\theta_W$，$W_\mu^3 = A_\mu\sin\theta_W + Z_\mu\cos\theta_W$ である．よって，上記行列の 1 行 1 列目で $A_\mu$ の項を集めると

$$\frac{\mathrm{i}e}{6\cos\theta_W}A_\mu\cos\theta_W + \frac{\mathrm{i}e}{2\sin\theta_W}A_\mu\sin\theta_W = \frac{2\mathrm{i}e}{3}A_\mu$$

であり，同じく 1 行 1 列目の $Z_\mu$ の項を集めると

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{i}e}{6\cos\theta_W}\sin\theta_W Z_\mu + \frac{\mathrm{i}e}{2\sin\theta_W}\cos\theta_W Z_\mu = \mathrm{i}e\frac{-\sin^2\theta_W + 3\cos^2\theta_W}{6\sin\theta_W\cos\theta_W}Z_\mu\\
&= \mathrm{i}e\frac{3-4\sin^2\theta_W}{3\sin 2\theta_W}Z_\mu = \mathrm{i}e\frac{3-2(1-\cos 2\theta_W)}{3\sin 2\theta_W}Z_\mu = \frac{\mathrm{i}e}{3\sin 2\theta_W}(1+2\cos 2\theta_W)Z_\mu
\end{aligned}$$

想定している．したがって，3 組の左手型 SU(2)2 重項

$$\begin{pmatrix} u_{\mathrm{L}1} \\ d_{\mathrm{L}1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{\mathrm{L}2} \\ d_{\mathrm{L}2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{\mathrm{L}3} \\ d_{\mathrm{L}3} \end{pmatrix}$$

と 6 つの右手型 1 重項 $u_{\mathrm{R}1}.d_{\mathrm{R}1}, u_{\mathrm{R}2}.d_{\mathrm{R}2}, u_{\mathrm{R}3}.d_{\mathrm{R}3}$ を導入する．更に簡便な記述のために

$$\mathbf{L}_k = \begin{pmatrix} u_{\mathrm{L}k} \\ d_{\mathrm{L}k} \end{pmatrix}, \quad u_{\mathrm{R}k}, \quad d_{\mathrm{R}k}, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{14.5}$$

## 14.2 クォークの質量と小林-益川混合行列

繰り込み可能性を得るためにはゲージ対称性を導入しなければならないし，第 12 章で荷電レプトンに質量を与えたのと同じように，クォークにも質量を付与するためにクォークを Higgs 場と結合させなければならない．$d_k$ クォークに関して

# 第16章　強い相互作用の理論：量子色力学

第1章でハドロンの性質を説明するクォーク模型の基本的特徴を述べた．クォークは色 (color) のインデックスを持っていて，強い相互作用を媒介するグルーオン場と直接に相互作用する．

標準模型では強い相互作用もゲージ理論によって記述されるが，本章ではこれを論じる．強い相互作用の量子色力学の呼称で知られており，クォークの閉じ込めという注目すべき性質を持つ (1.4 節)．本章ではクォークの電磁相互作用や弱い相互作用を無視して，強い相互作用の議論に専念する．

## 16.1　局所的SU(3) ゲージ理論

QCD ではそれぞれの香りのクォークに対して3つの場をあてる．これらの場は「色3重項 (colour triplet)」を形成する．たとえば u クォークは，次のような色3重項で記述される．

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathrm{u_r} \\ \mathrm{u_g} \\ \mathrm{u_b} \end{pmatrix}$$

ここで $\mathrm{u_r}, \mathrm{u_g}, \mathrm{u_b}$ は4成分 Dirac スピノルであり，添字の r, g, b (red, green, blue) は色状態のインデックスである．

そして理論が局所的SU(3) 変換

$$\mathbf{q} \to \mathbf{q}' = \mathbf{U}\mathbf{q} \tag{16.1a}$$

のもとで不変であることを仮定する．$\mathbf{q}$ は任意のクォーク3重項，$\mathbf{U}$ は時空座標に依存するSU(3) の任意要素である．数学的な操作の手順は，レプトンの弱い相互作用を記述するSU(2) 理論の場合と同じである．電弱理論における行列の場 $\mathbf{W}_\mu$ に作用する $3 \times 3$ 行列のゲージ場 $\mathbf{G}_\mu$ を導入する．SU(3) 変換の下で，このゲージ場は以下のように変換しなければならない．

$$\mathbf{G}_\mu \to \mathbf{G}'_\mu = \mathbf{U}\mathbf{G}_\mu\mathbf{U}^\dagger + (\mathrm{i}/g)(\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger \tag{16.1b}$$

共変導関数を次のように定義する．

$$D_\mu \mathbf{q} = (\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathbf{G}_\mu)\mathbf{q} \tag{16.2}$$

このとき，SU(3) 変換に対し

$$D'_\mu \mathbf{q}' = \mathbf{U}D_\mu \mathbf{q} \tag{16.3}$$

という関係が成立する[63]．ここで $D'_\mu \mathbf{q}' = (\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathbf{G}'_\mu)\mathbf{q}'$ である．パラメター $g$ は強い相互作用の結合定数である．

$\mathbf{G}_\mu$ は群の生成子にあたる 8 個の基本行列 $\lambda_a$(付録 B，B.7 節) を用いて展開できる．

$$\mathbf{G}_\mu = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8} G^a_\mu \lambda_a \tag{16.4}$$

8 個の独立な実数場として現れる係数 $G^a_\mu(x)$ はグルーオンゲージ場である．

ここでも Yang-Mills の流儀で強度テンソルを構築する．

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{G}_\nu - \partial_\nu \mathbf{G}_\mu + \mathrm{i}g(\mathbf{G}_\mu \mathbf{G}_\nu - \mathbf{G}_\nu \mathbf{G}_\mu) \tag{16.5}$$

このテンソルは，(16.1b) 式の SU(3) 変換に対し，次のように変換される．

$$\mathbf{G}'_{\mu\nu} = \mathbf{U}\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{U}^\dagger \tag{16.6}$$

付録 B の (B.26) 式を用いて，$\mathbf{G}_{\mu\nu}$ を 8 つの成分へ展開できる．

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu} \lambda_a \tag{16.8}$$

こうして「グルーオン」のラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gluon}} = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} \tag{16.9}$$

とする．

「クォーク」のラグランジアン密度は標準的な Dirac 粒子を表すラグランジアンの形とする．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{quark}} = \sum_{f=1}^{6} [\mathbf{q}_f \mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathbf{G}_\mu)\mathbf{q}_f - m_f \mathbf{q}_f \mathbf{q}_f] \tag{16.10}$$

和はクォークの 6 種類すべての香りについてとる．$m_f$ は 14.2 節で定義した「真の」クォークの質量である．$\mathcal{L}_{\mathrm{quark}}$ は明らかに SU(3) 変換 ((16.3) 式を用

---

[63]伊藤：

$$D'_\mu \mathbf{q}' = (\partial_\mu + \mathrm{i}g\mathbf{G}'_\mu)\mathbf{U}\mathbf{q} = (\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{q} + \mathbf{U}\partial_\mu \mathbf{q} + \mathrm{i}g\mathbf{G}'_\mu \mathbf{U}\mathbf{q} = \mathbf{U}D_\mu \mathbf{q} = \mathbf{U}(\partial_\mu \mathbf{q} + \mathrm{i}g\mathbf{G}_\mu \mathbf{q})$$

が成立しなければならない．よって，第 3 辺と最右辺を整理すると

$$\mathrm{i}g\mathbf{G}'_\mu \mathbf{U}\mathbf{q} = -(\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{q} + \mathrm{i}g\mathbf{U}\mathbf{G}_\mu \mathbf{q} \to \mathrm{i}g\mathbf{G}'_\mu \mathbf{U} = -(\partial_\mu \mathbf{U}) + \mathrm{i}g\mathbf{U}\mathbf{G}_\mu$$

である．この右の式に右から $\mathbf{U}^\dagger$ をかけると

$$\mathrm{i}g\mathbf{G}'_\mu = -(\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger + \mathrm{i}g\mathbf{U}\mathbf{G}_\mu \mathbf{U}^\dagger$$

よって (16.1b)

$$\mathbf{G}'_\mu = \mathbf{U}\mathbf{G}_\mu \mathbf{U}^\dagger + (\mathrm{i}/g)(\partial_\mu \mathbf{U})\mathbf{U}^\dagger$$

が得られる．$\mathbf{W}_\mu$ に対し U(1) 対称性が入ってない分だけ計算は容易である．

いる) の下で不変である．

強い相互作用の全ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{\text{strong}} = \mathcal{L}_{\text{gluon}} + \mathcal{L}_{\text{quark}} \tag{16.11}$$

である．

8 つのグルーオン場は質量項を持たない．グルーオン場と Higgs 場は直接には結合していない．QCD において Higgs 場はクォークの質量付与だけに関与する．6 個クォーク 3 重項に関して運動方程式

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m_f)\mathbf{q}_f = 0 \tag{16.12}$$

であり，8 つのグルーオン場に関しては，場 $G^a_\nu$ に着目したラグランジアン密度の変分により

$$\partial_\mu G^{a\mu\nu} = j^{a\nu} \tag{16.13}$$

$$j^{a\nu} = g\left[f_{abc}G^b_\mu G^{c\mu\nu} + \sum_f \mathbf{q}_f\gamma^\nu\frac{\lambda_a}{2}\mathbf{q}_f\right] \tag{16.14}$$

$f_{abc}$ は以下に定義される SU(3) 構造定数である．

$$[\lambda_a, \lambda_b] = \lambda_a\lambda_b - \lambda_b\lambda_a = 2\mathrm{i}\sum_{c=1}^{8} f_{abc}\lambda_c \tag{16.15}$$

交換関係がこのような構造を持つことは，(16.5) 式で導入した強度テンソル $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ の定義に依存している[64]．

$\mathbf{G}_{\mu\nu} = -\mathbf{G}_{\nu\mu}$ なので

$$\partial_\nu j^{a\nu} = 0 \tag{16.16}$$

すなわち保存する 8 つのカレントが得られる．よって Noether の定理により大域的な SU(3) 対称性の帰結である Noether カレントが現れる．すなわち 8 つの運動の定数 (保存量) が存在し，それらは時間に依存しない次の演算子

$$Q^a = \int j^{a0}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \tag{16.17}$$

となる．以下略．

**問題 16.1**

次式を導出せよ．

$$G^a_{\mu\nu} = (\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu) - \sum_{bc} g f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu$$

[64] 伊藤：確認は行わないが，依存関係は逆で (16.15) の関係により，(16.5) 式が導かれるのでは？

解
定義 (16.5) 式

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{G}_\nu - \partial_\nu \mathbf{G}_\mu \partial_\mu \mathbf{G}_\nu - \partial_\nu \mathbf{G}_\mu + \mathrm{i}g(\mathbf{G}_\mu \mathbf{G}_\nu - \mathbf{G}_\nu \mathbf{G}_\mu)$$

$$= (\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu)\frac{\lambda_a}{2} + \mathrm{i}\frac{g}{4}(G^b_\mu G^c_\nu \lambda_b \lambda_c - G^c_\nu G^b_\mu \lambda_c \lambda_b)$$

であり，

$$\lambda_b \lambda_c - \lambda_c \lambda_b = 2\mathrm{i} f_{bca} \lambda_a$$

なので，

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = [(\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu) - g G^b_\mu G^c_\nu f_{bca}](\lambda_a/2)$$

となる．$f_{bca} = -f_{bac} = f_{abc}$ を使えば，問題で与えられた式となる．□

**問題 16.3**
カレント $j^{a\mu}$ の (16.14) 式を導出せよ．
解
作用 $S$ は (16.9) と (16.10) 式から $S = \int (\mathcal{L}_{\text{gluon}} + \mathcal{L}_{\text{quark}}) \mathrm{d}^4 x$

$$S = \int \left[ -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} + \sum_{f=1}^{6} [\mathbf{q}_f \mathrm{i}\gamma^\nu (\partial_\nu + \mathrm{i}g\mathbf{G}_\nu)\mathbf{q}_f - m_f \mathbf{q}_f \mathbf{q}_f] \right] \mathrm{d}^4 x$$

とする．作用に対して $G^a_\nu$ の変分をとると，

$$\delta S = \int \left[ -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8} \delta G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} - g\sum_{f=1}^{6} \mathbf{q}_f \mathrm{i}\gamma^\nu \delta G^a_\nu (\lambda_a/2)\mathbf{q}_f \right] \mathrm{d}^4 x$$

この変分で先頭は $x^2 \to 2x\delta x$ と同様の変分から発生している．また第 2 項には $\mathbf{G}_\nu$ は 1 つしか含まれない．さらに，先頭の変分は問題 16.1 で得られた式

$$G^a_{\mu\nu} = (\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu) - \sum_{bc} g f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu$$

を利用するのと，前と同様 $x^2 \to 2x\delta x$ を考慮し，

$$-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8} \delta G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} = -\sum_{a=1}^{8} G^{a\mu\nu} \partial_\mu (\delta G^a_\nu) + g\sum_{a,b,c=1}^{8} G^{c\mu\nu} G^b_\mu (\delta G^a_\nu) f_{cba}$$

となる．ここで右辺第 2 項では添字の書き換えを行っている．問題 16.1 での式で $a$ は $\lambda_a$ との和であり，その役割のため $a \to c$ に換え，また変分の $G^a_\nu$ のために $c \to a$ と換える．したがって $f_{abc} \to f_{cba}$ と変更される．直前の式で右辺第 1 項に対しては，部分積分を使うと

$$\delta S = \int \left[ \partial_\mu G^{a\mu\nu} + g G^{c\mu\nu} G^b_\mu f_{cba} - g\sum_f \mathbf{q}\gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \mathbf{q}_f \right] \delta G^a_\nu \mathrm{d}^4 x$$

となる．変分 $\delta G^a_\nu$ に対して，停留値を取るので，上の被積分関数がゼロと成る：

$$\partial_\mu G^{a\mu\nu} - g f_{abc} G^{c\mu\nu} G^b_\mu - g \sum_f \mathbf{q} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \mathbf{q}_f = 0$$

ただし，第 2 項で $f_{cba} = -f_{abc}$ を使った．よって

$$\partial_\mu G^{a\mu\nu} = g f_{abc} G^{c\mu\nu} G^b_\mu + g \sum_f \mathbf{q} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \mathbf{q}_f$$

を得る． □

## 16.2 ハドロンと中間子の色ゲージ変換

色の対称性は強い相互作用の理論において重要な役割を果たすので，何故クォーク間の強い相互作用によって形成されているハドロンや中間子において，色の性質が顕在化しないのか，という疑問が湧く．この疑問に対する回答を試みる．

我々は 1.4 節でハドロンが 3 つのクォークから形成されていること，また中間子がクォーク-反クォーク対であることを述べた．ここで 3 クォーク状態に関して，クォーク 1 が色 $i$，クォーク 2 が色 $j$，クォーク 3 が色 $k$ をもつ状態を $|i,j,k\rangle$ と表記し，色状態の添字に 1,2,3 をあてることにする．クォークの他のすべての性質 (位置，スピン，香り) はここでは考えない．1.7 節において Pauli の原理による要請から，ハドロン状態は色添字の入替えに関して反対称でなければならないことを議論した．我々が構築することのできる唯一の反対称は色状態の組合わせは

$$|\,\text{状態}\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{ijk} |i,j,k\rangle \tag{16.18}$$

である．ここで $\epsilon_{ijk}$ は

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \cdots = 1$$

であり，$i,j,k$ のうちどれか 2 つが同じであると $\epsilon_{ijk} = 0$ となる．$1/\sqrt{6}$ は規格化定数である．

この状態は色の SU(3) 変換で，どのように変換するであろうか．ハドロンは空間的に拡がっているので，ここでは大域的な変換 (空間時間座標に依存しない変換) に限定して，クォーク場が $\mathbf{q}' = \mathbf{U}\mathbf{q}$ のように変換するものと考える．場の量子論において，これらの場はクォークを消滅させ，反クォークを生成する．

# A　線形代数

# B　標準模型で扱う群

## B.1　群の定義

## B.2　座標軸の回転と $SO(3)$

## B.3　$SU(2)$

$$\mathbf{U}_S = \exp(\mathrm{i}\alpha^k\sigma^k), \tag{B.8}$$

$\alpha^k\sigma^k = \alpha\tilde{\alpha}\cdot\sigma$ と書いたとする

$$(\tilde{\alpha}\cdot\sigma)^2 = (\tilde{\alpha}^j\sigma^j)(\tilde{\alpha}^k\sigma^k) = (\tilde{\alpha}^1\sigma^1+\tilde{\alpha}^2\sigma^2+\tilde{\alpha}^3\sigma^3)(\tilde{\alpha}^1\sigma^1+\tilde{\alpha}^2\sigma^2+\tilde{\alpha}^3\sigma^3)$$
$$= \tilde{\alpha}^j\tilde{\alpha}^j\mathbf{I} = \mathbf{I}; \quad \tilde{\alpha}: \text{単位ベクトル}$$

(B.8) 式を冪展開すると

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_S = \exp(\mathrm{i}\alpha^k\sigma^k) &= \mathbf{I} + \mathrm{i}\alpha(\tilde{\alpha}\cdot\sigma) + \frac{(\mathrm{i}\alpha)^2}{2!}\mathbf{I} - \mathrm{i}\frac{\alpha^3}{3!}(\tilde{\alpha}\cdot\sigma)\\ &= \cos\alpha\mathbf{I} + \mathrm{i}\sin\alpha(\tilde{\alpha}\cdot\sigma),\end{aligned} \tag{B.9}$$

因みに

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} -, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} +$$

SU(2) と SO(3) との関係を示すために，点 $\boldsymbol{x}$ に対して，以下の Hermite 行列を対応させる

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 & -x^3 \end{pmatrix}. \tag{B.10}$$

この行列は $\mathrm{Tr}\mathbf{X} = 0, \det\mathbf{X} = -x^k x^k$ である．

$\mathbf{U}$ を SU(2) の要素として，次の行列を考える．

$$\mathbf{X}' = \mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{U}^\dagger, \tag{B.11}$$

$\mathbf{X}'$ も Hermite 行列で[65]，$\mathrm{Tr}\mathbf{X}' = \mathrm{Tr}(\mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{U}^\dagger) = \mathrm{Tr}(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\mathbf{X}) = \mathrm{Tr}\mathbf{X} = 0$ である[66].

したがって

$$\mathbf{X}'(\boldsymbol{x}') = \begin{pmatrix} x'^3 & x'^1 - \mathrm{i}x'^2 \\ x'^1 + \mathrm{i}x'^2 & -x'^3 \end{pmatrix}$$

という形になる．$x'^k$ と $x^k$ は実数の線形変換により結び付けられる．

また，$\det\mathbf{X}' = \det\mathbf{U}\det\mathbf{X}\det\mathbf{U}^\dagger = \det(\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger)\det\mathbf{X} = \det\mathbf{X}$ なので $x'^k x'^k = x^k x^k$ である．

一例として

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \exp[\mathrm{i}(\theta/2)\sigma^3] = \cos(\theta/2)\mathbf{I} + \mathrm{i}\sin(\theta/2)\sigma^3 \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta/2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{B.12}$$

は $z$ 軸周りの $\theta$ 回転を表す式 (B.2) に対応している．これは実際に積 (B.11) を実行すれば確かめられる[67].

(B.2) 式であらわされる SO(3) 回転では $\theta$ 回転と $\theta + 2\pi$ 回転は同一であるが，式 (B.12) では $\mathbf{U}$ と $-\mathbf{U}$ と異なる二つの SU(2) となる．

## B.4 SL(2,C) と固有 Lorentz 群

$2\times 2$ 複素行列で行列式が 1 となるものを特殊線形群 SL(2,C) と記す．SU(2) が固有回転変換に関連するのと同様に SL(2,C) は固有 Lorentz 変換に関係する．

時空点 $x = (x^0, \boldsymbol{x})$ を次の Hermite 行列に対応させる：

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \tag{B.13}$$

この行列式は

$$\det\mathbf{X} = (x^0)^2 - x^k x^k$$

[65]伊藤注：$(\mathbf{X}')^\dagger = (\mathbf{U}\mathbf{X}\cdot\mathbf{U}^\dagger)^\dagger = \mathbf{U}\cdot(\mathbf{U}\mathbf{X})^\dagger = \mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{X}' \quad \Longrightarrow (\mathbf{X}')^\dagger = \mathbf{X}'$

[66]伊藤注：$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ を使った．

[67]伊藤注：念のため実際の計算

$$\mathbf{X}\mathbf{U}^\dagger = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 & -x^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta/2)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta/2)} & (x^1 - \mathrm{i}x^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)} \\ (x^1 + \mathrm{i}x^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta/2)} & -x^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{U}^\dagger &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta/2)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta/2)} & (x^1 - \mathrm{i}x^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)} \\ (x^1 + \mathrm{i}x^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta/2)} & -x^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta/2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^3 & (x^1 - \mathrm{i}x^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ (x^1 + \mathrm{i}x^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} & -x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^3 & x'^1 - \mathrm{i}x'^2 \\ x'^1 + \mathrm{i}x'^2 & -x'^3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって $x'^3 = x^3$, また

$$(x^1 - \mathrm{i}x^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = x'^1 - \mathrm{i}x'^2, \quad (x^1 + \mathrm{i}x^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = x'^1 + \mathrm{i}x'^2$$

より，$x'^1 = \cos\theta x^1 + \sin\theta x^2, \quad x'^2 = -\sin\theta x^1 + \cos\theta x^2$ を得る．これは (B.2) 式の関係である．

である．

SL(2,C) の要素 $\mathbf{M}$ と次式で与えられる行列 $\mathbf{X}'$ を考える．

$$\mathbf{M}^\dagger \mathbf{X}' \mathbf{M} = \mathbf{X}, \quad \text{or} \quad \mathbf{X}' = \mathbf{M^{-1}}^\dagger \mathbf{X} \mathbf{M^{-1}} \tag{B.14}$$

$\mathbf{X}'$ も Hermite 行列なので次のように表せる：

$$\mathbf{X}'(\boldsymbol{x}') = \begin{pmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 - \mathrm{i}x'^2 \\ x'^1 + \mathrm{i}x'^2 & x'^0 - x'^3 \end{pmatrix}$$

$x'^\mu$ と $x^\mu$，$(\mu = 0, 1, 2, 3)$ は実数の変数変換で関係づけられている．

また，

$$\det \mathbf{M}^\dagger \mathbf{X}' \mathbf{M} = \det \mathbf{M}^\dagger \det \mathbf{X}' \det \mathbf{M} = \det \mathbf{X}' = \det \mathbf{X}$$

なので

$$(x'^0)^2 - x'^k x'^k = (x^0)^2 - x^k x^k$$

となる．

慣性系 $K$ と $K'$ の間の一般の固有 Lorentz 変換は 6 つのパラメターにより特定される．それは $K$ に対する $K'$ の相対速度 $\boldsymbol{v}$ の 3 つの成分と，$K$ から $K'$ への座標軸方向の回転を決める 3 つのパラメターである．一般の $2 \times 2$ 複素行列は 8 個のパラメターによって特定されるが[68]，特殊群条件 $\det \mathbf{M} = 1$ によって 6 個に減る[69]．

以下の行列

$$\mathbf{P} = \exp[(\theta/2)\sigma^3] = \cosh(\theta/2)\mathbf{I} + \sinh(\theta/2)\sigma^3$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\theta/2} \end{pmatrix}. \tag{B.15}$$

は (2.3) 式の $z$ 軸方向の Lorentz 変換（Lorentz ブースト）に対応している．

## B.5 Pauli 行列の変換

$\mathbf{I} = \sigma^0$ として，次の表記を採用すると便利である：

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \qquad \tilde{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \tag{B.16}$$

[68]伊藤注：SL(2,C) の一般的な要素 $\mathbf{M}$ として 8 個のパラメター $a, b, c, d, e, f, g, h$ により

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a + \mathrm{i}b & c + \mathrm{i}d \\ e + \mathrm{i}f & g + \mathrm{i}h \end{pmatrix}$$

を構成できる．

[69]伊藤注：前の注で設定した $\mathbf{M}$ の行列式を作ると

$$\det \mathbf{M} = F(a, b, c, \cdots, h) + \mathrm{i}G(a, b, c, \cdots, h) = 1$$

より 2 つの条件 $F = 1, G = 0$ が課せられるので，全体で特定すべきパラメターは 6 個となる．

式 (B.13) は

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{x}) = x^0\sigma^0 + x^k\sigma^k = x_\mu\tilde{\sigma}^\mu, \quad \mathbf{X}'(\boldsymbol{x}') = x'_\mu\tilde{\sigma}^\mu$$

と書ける[70].

式 (B.14) の関係

$$\mathbf{M}^\dagger\mathbf{X}'\mathbf{M} = \mathbf{X}$$

から，次の関係式を作成する：

$$\mathbf{M}^\dagger\mathbf{X}'\mathbf{M} = \mathbf{X} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{M}^\dagger(x'_\mu\tilde{\sigma}^\mu)\mathbf{M} = x_\nu\tilde{\sigma}^\nu = L^\mu_\nu x'_\mu\tilde{\sigma}^\nu$$

上の右側の式でその最左辺と最右辺を以下のように書き改めると

$$x'_\mu\mathbf{M}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{M} = L^\mu_\nu\tilde{\sigma}^\nu x'_\mu$$

が得られる．$x'_\mu$ は任意なので

$$\mathbf{M}^\dagger\tilde{\sigma}^\mu\mathbf{M} = L^\mu_\nu\tilde{\sigma}^\nu \tag{B.17}$$

という関係式が得られる．

上記と同様に

$$\mathbf{X}_1 = x^0\sigma^0 - x^k\sigma^k = x_\nu\sigma^\nu$$

という行列を考えても $\det\mathbf{X}_1 = (x^0)^2 - x^kx^k$ であり，SL(2,C) の要素の中に次式を満たす行列 $\mathbf{N}$ が存在する．

$$\mathbf{N}^\dagger\sigma^\mu\mathbf{N} = L^\mu_\nu\sigma^\nu \tag{B.18}$$

$\mathbf{P}$ が式 (B.15) のように $z$ 方向の Lorentz ブーストに対応していて $\mathbf{M} = \mathbf{P}$ であれば，$\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}$ であることを証明できる[71]．単なる座標軸の回転に関しては $\mathbf{M} = \mathbf{N} = \mathbf{U}$ とおける（$\mathbf{U}$ はユニタリー）．一般の $\mathbf{M}$ は回転とブーストの組み合わせとして $\mathbf{M} = \mathbf{PU}$ という形で構築できる．．これに対応する $\mathbf{N}$ は $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}$ となる．

$\mathbf{U}$ は $\mathbf{UU}^\dagger = \mathbf{I}$ を満たし，$\mathbf{P}$ は Hermite であるので $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\dagger$ である．したがって

$$\mathbf{NM}^\dagger = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{U})(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{P}) = \mathbf{I} \tag{B.19}$$

となる．すなわち $\mathbf{N}$ は $\mathbf{M}^\dagger$ の逆行列である．

---

[70] 伊藤注：4 元ベクトルの添字の上下は (2.10) で定義されている：

$$a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu, \qquad g_{\mu\mu} = (1, -1, -1, -1)$$

であるから $a^\mu = (a^0, \boldsymbol{a})$ ならば $a_\mu = (a_0, -\boldsymbol{a})$ とする．

[71] 伊藤注：証明方法の予測：$\mathbf{X}(\boldsymbol{x}) = x^0\sigma^0 + x^k\sigma^k = x_\mu\tilde{\sigma}^\mu$ と $\mathbf{X}_1 = x^0\sigma^0 - x^k\sigma^k = x_\nu\sigma^\nu$ を見比べると $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ の違いは $x^k \to -x^k$ $(k = 1, 2, 3)$ の違いである．これは $\mathbf{P}$ に戻った場合，$\mathrm{e}^{\theta/2}$ の指数部の $\pm$ を反転したものに相当する．したがって $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}$ となるであろう．