M.E.Peskin and D.V.Schroeder

An Introduction to

Quantum Field Theory

2015 年 3 月 23 日

第 6 章　輻射補正：導入

6.3 電子バーテックス関数：評価計算

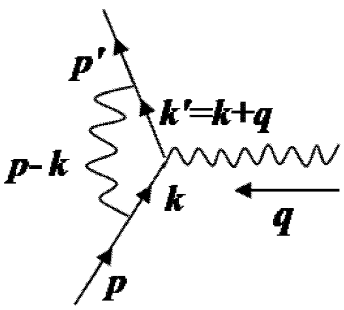

図 1:

Feynman 規則を適用することで，α のオーダーの $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$ を探す．ここで

$$\overline{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{(k-p)^2+\mathrm{i}\epsilon}\overline{u}(p')(-\mathrm{i}e\gamma^\nu)\frac{\mathrm{i}(\not{k}'+m)}{k'^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\mu\frac{\mathrm{i}(\not{k}+m)}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}e\gamma^\rho)u(p)$$

$$= 2\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\overline{u}(p')[\not{k}\gamma^\mu\not{k}'+m^2\gamma^\mu-2m(k+k')^\mu]}{((k-p)^2+\mathrm{i}\epsilon)(k'^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)(k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)} \tag{6.38}$$

である．この第２行目では恒等式 $\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu = -2\gamma^\mu$ を使った．

Feynman パラメター

この方法の目的は (6.38) 式の分母の３つの因子を k に関する単一の２次方程式の更にそれの３乗べきにしてしまうことである．

分母の因子が２つの場合という最も簡単な計算からはじめる．

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{[xA+(1-x)B]^2} = \int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\delta(x+y-1)\frac{1}{[xA+yB]^2} \quad (6.39)$$

使用例：

$$\frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)} = \int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\delta(x+y-1)\frac{1}{[x(k-p)^2+y(k^2-m^2)]^2}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\delta(x+y-1)\frac{1}{[k^2-2xk\cdot p+xp^2-ym^2]^2}$$

$\ell \equiv k - xp$ とするならば，分母は ℓ^2 のみに依存する．積分 d^4k はずっと簡単になり，よって $\mathrm{d}^4k = \mathrm{d}^4\ell$ で積分は ℓ に関して球対称である．この変換を可能にしている変数 x と y は Feynman パラメターと言われている．

必要な公式は

$$\frac{1}{A_1A_2\cdots A_n} = \int_0^1 \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\delta\left(\sum x_i - 1\right)\frac{(n-1)!}{[x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n]^n} \quad (6.41)$$

である．

形状因子 (Form Factors) の計算

公式 (6.41) を (6.38) の分母に適用してみる．

$$\frac{1}{((k-p)^2+\mathrm{i}\epsilon)({k'}^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)(k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)} = \int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3}$$

ここで新しい分母 D は

$$D = x(k^2-m^2)+y({k'}^2-m^2)+z(k-p)^2+(x+y+z)\mathrm{i}\epsilon$$

$$= k^2+2k\cdot(yq-zp)+yq^2+zp^2-(x+y)m^2+\mathrm{i}\epsilon, \quad (6.43)$$

である．2 行目で $x+y+z=1$ と $k' = k+q$ を使った．平方を完成するため k をシフトさせ

$$\ell \equiv k + yq - zp$$

とする．こうして

$$D = \ell^2 - \Delta + \mathrm{i}\epsilon,$$

$$\Delta \equiv -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 \tag{6.44}$$

である．
////////////////////////(6.44) 式の導出はじまり/////////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.191)：
まず

$$\ell^2 = k^2 + y^2q^2 + z^2p^2 + 2yk\cdot q - 2yzq\cdot p - 2zk\cdot p$$

であるから，(6.43) 式と比較すると

$$D = \ell^2 - y^2q^2 - z^2p^2 + 2yzq\cdot p + yq^2 + zp^2 - (1-z)m^2 + \mathrm{i}\epsilon$$

$$= \ell^2 - y^2q^2 + yq^2 + 2yzq\cdot p + z(1-z)m^2 - (1-z)m^2 + \mathrm{i}\epsilon$$

$$= \ell^2 + \underbrace{y(1-y)q^2 + 2y(1-y}-x)q\cdot p - (1-z)^2m^2 + \mathrm{i}\epsilon$$

を得る．ここで $p^2 = m^2$ を使った．ファインマンダイアグラムより $p' = p+q$ であることが分かるから $p'^2 = (p+q)^2 = p^2+2p\cdot q+q^2$ なので $2p\cdot q+q^2 = 0$ が得られる．これを考慮すると上の式の $\underbrace{\ \cdot\ }$ がゼロと成ることが分かる．よって

$$D = \ell^2 - 2yxq\cdot p - (1-z)^2m^2 + \mathrm{i}\epsilon = \ell^2 + xyq^2 - (1-z)^2m^2 + \mathrm{i}\epsilon$$

が得られる．ここで再度 $2p\cdot q + q^2 = 0$ を使っている..
///////////////////////////////おわり//////////////////////////////////

$$\int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^\mu}{D^3} = 0, \tag{6.45}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^\mu\ell^\nu}{D^3} = \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\ell^2}{D^3}, \tag{6.46}$$

これらの関係式を使って

$$分子 = \overline{u}(p')\left[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' +\ m^2\gamma^\mu - 2m(k+k')^\mu\right]u(p)$$

$$\to \overline{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu \ell^2 + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1-y)\not{q} + z\not{p})\right.$$

$$\left. + m^2\gamma^\mu \ - 2m((1-2y)q^\mu + 2zp^\mu)\right] u(p).$$

を得ることができる．
///////////////////////////上の式の導出はじまり/////////////////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.191)：
$\not{k}\gamma^\mu \not{k}'$ 以外は $\ell = k + yq - zp$ と $k' = k + q$ を使って k, k' を消去するだけでよい．$\not{k}\gamma^\mu \not{k}'$ は $k = \ell - yq + zp \equiv \ell + a$ また，$k' = (\ell - yq + zp) + q = \ell + (1-y)q + zp \equiv \ell + b$ とすると

$$\not{k}\gamma^\mu \not{k}' = (\not{\ell} + \not{a})\gamma^\mu(\not{\ell} + \not{b}) = \not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} + \not{a}\gamma^\mu\not{\ell} + \not{\ell}\gamma^\mu\not{b} + \not{a}\gamma^\mu\not{b} = \not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} + \not{a}\gamma^\mu\not{b}$$

を得る．ここで $\not{a}\gamma^\mu\not{\ell}$ と $\not{\ell}\gamma^\mu\not{b}$ は公式 (6.45) 式によりゼロとなる．何故なら $\not{a}\gamma^\mu\not{\ell} = \not{a}\gamma^\mu\gamma_\nu\ell^\nu$ と ℓ の 1 次の形であるから．次に $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ を考慮すると

$$\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} = \ell_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\not{\ell} = \ell_\nu(2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu)\not{\ell} = 2\ell_\nu g^{\mu\nu}\not{\ell} - \ell_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\not{\ell} = 2g^{\mu\nu}\ell_\nu\not{\ell} - \gamma^\mu\not{\ell}\not{\ell}$$

$$= 2\ell^\mu\ell^\nu\gamma_\nu - \gamma^\mu\ell^2 \to 2\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\ell^2\gamma_\nu - \gamma^\mu\ell^2 = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\gamma_\nu\ell^2 - \gamma^\mu\ell^2$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^\mu\ell^2 - \gamma^\mu\ell^2 = -\frac{1}{2}\gamma^\mu\ell^2,$$

を得る．ここで→以降は積分の公式 (6.46) 式を使っている．また勿論 $g^{\mu\nu}\gamma_\nu = \gamma^\mu$ である．
///////////////////////////////上の式の導出おわり///////////////////////////

$$分子 = \overline{u}(p')\left[\gamma^\mu\cdot\left(-\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2\right)\right.$$

$$\left. + (p'^\mu + p^\mu)\cdot mz(z-1) + q^\mu\cdot m(z-2)(x-y)\ \right] u(p)$$

/////////////////////////上記式の導出のはじまり//////////////////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.192)：
ステップ I：$1 - y \equiv w$ として

$$(-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1-y)\not{q} + z\not{p}) = (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu(w\not{q} + z\not{p})$$

$$= -yw \underbrace{\not{q}\gamma^\mu \not{q}}_{\text{(i)}} + zw \underbrace{\not{p}\gamma^\mu \not{q}}_{\text{(ii)}} - yz \underbrace{\not{q}\gamma^\mu \not{p}}_{\text{(iii)}} + z^2 \underbrace{\not{p}\gamma^\mu \not{p}}_{\text{(iv)}}, \tag{1}$$

<u>**(i)** $\overline{u}\not{q}\gamma^\mu \not{q}u$ の計算</u>，もっとも面倒な項 ($\overline{u}(p') = \overline{u}$ としても間違うことはない．)

$$\overline{u}\not{q}\gamma^\mu \not{q}u = \overline{u}(\not{p}' - \not{p})\gamma^\mu(\not{p}' - \not{p})u = \overline{u}(m - \not{p})\gamma^\mu(\not{p}' - m)u$$

$$= \overline{u}(m\gamma^\mu \not{p}' - \not{p}\gamma^\mu \not{p}' - m^2\gamma^\mu + m\not{p}\gamma^\mu)u$$

この式を先頭から計算していく．

(a)

$$\overline{u}m\gamma^\mu \not{p}'u = m\overline{u}(2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu)u = 2m\overline{u}p'^\mu u - m^2\overline{u}\gamma^\mu u$$

(b)

$$\overline{u}\not{p}\gamma^\mu \not{p}'u = \overline{u}\not{p}(2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu)u = 2\overline{u}\not{p}p'^\mu u - \overline{u}\not{p}\not{p}'\gamma^\mu u = 2m\overline{u}p'^\mu u - \overline{u}p_\nu\gamma^\nu {p'}_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu u$$

$$= 2m\overline{u}p'^\mu u - \overline{u}p_\nu p'_\rho\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu u = 2m\overline{u}p'^\mu u - \overline{u}p_\nu p'_\rho(2g^{\nu\rho} - \gamma^\rho\gamma^\nu)\gamma^\mu u$$

$$= 2m\overline{u}p'^\mu u - \overline{u}(2p^\rho p'_\rho - \not{p}'\not{p})\gamma^\mu u = 2m\overline{u}p'^\mu u - 2\overline{u}(p\cdot p')\gamma^\mu u + \overline{u}\not{p}'\not{p}\gamma^\mu u$$

$$= 2m\overline{u}p'^\mu u - 2\overline{u}\left(m^2 - \frac{1}{2}q^2\right)\gamma^\mu u + m\overline{u}\not{p}\gamma^\mu u$$

$$= 2m\overline{u}p'^\mu u - \overline{u}(2m^2 - q^2)\gamma^\mu u + m\overline{u}(2p^\mu - \gamma^\mu\not{p})u$$

$$= 2m\overline{u}p'^\mu u - \overline{u}(2m^2 - q^2)\gamma^\mu u + 2m\overline{u}p^\mu u - m^2\overline{u}\gamma^\mu u$$

$$= 2m\overline{u}(p^\mu + p'^\mu)u - 3m^2\overline{u}\gamma^\mu u + \overline{u}\gamma^\mu q^2 u$$

を得る．ここで，第 3 行目の $p\cdot p'$ は以下のように求められる : $p' = p + q$ より

$$p\cdot p' = p\cdot(p+q) = p^2 + p\cdot q = m^2 + p\cdot q$$

また，すでに求めたように $p'^2 = p^2 + 2p\cdot q + q^2, \to 2p\cdot q + q^2 = 0$ を使うことにより

$$p\cdot p' = m^2 - \frac{1}{2}q^2$$

を得る．

(c) $m^2\overline{u}\gamma^\mu u$

(d)

$$m\overline{u}\not{p}\gamma^\mu u = 2m\overline{u}p^\mu u - m^2\overline{u}\gamma^\mu u$$

となるので，$\overline{u}\not{q}\gamma^\mu\not{q}u$ は

$$\overline{u}\not{q}\gamma^\mu\not{q}u = \text{(a)} - \text{(b)} - \text{(c)} + \text{(d)} = -\overline{u}\gamma^\mu q^2 u$$

となる．

<u>**(ii)** $\overline{u}\not{p}\gamma^\mu\not{q}u$ の計算</u>

なお，以下の式中に現れる (i) は前の結果 $\overline{u}\not{q}\gamma^\mu\not{q}u = -\overline{u}\gamma^\mu q^2 u$ を表す．

$$\overline{u}\not{p}\gamma^\mu\not{q}u = \overline{u}(\not{p}' - \not{q})\gamma^\mu\not{q}u = \overline{u}(m - \not{q})\gamma^\mu\not{q}u = m\overline{u}\gamma^\mu\not{q}u - \overline{u}\not{q}\gamma^\mu\not{q}u$$

$$= m\overline{u}\gamma^\mu(\not{p}' - \not{p})u - \text{(i)} = m\overline{u}\gamma^\mu\not{p}'u - m^2\overline{u}\gamma^\mu u - \text{(i)}$$

$$= m\overline{u}(2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu)u - m^2\overline{u}\gamma^\mu u - \text{(i)} = 2m\overline{u}p'^\mu u - m^2\overline{u}\gamma^\mu u - m^2\overline{u}\gamma^\mu u - \text{(i)}$$

$$= 2m\overline{u}p'^\mu u - 2m^2\overline{u}\gamma^\mu u - \text{(i)} = 2m\overline{u}p'^\mu u - 2m^2\overline{u}\gamma^\mu u + \overline{u}\gamma^\mu q^2 u$$

となる．

<u>**(iii)** $\overline{u}\not{q}\gamma^\mu\not{p}u$ の計算</u>

$$\overline{u}\not{q}\gamma^\mu\not{p}u = m\overline{u}\not{q}\gamma^\mu u = m\overline{u}(\not{p}' - \not{p})\gamma^\mu u = m\overline{u}(m - \not{p})\gamma^\mu u = m^2\overline{u}\gamma^\mu u - m\overline{u}\not{p}\gamma^\mu u$$

$$= m^2\overline{u}\gamma^\mu u - m\overline{u}(2p^\mu - \gamma^\mu\not{p})u = m^2\overline{u}\gamma^\mu u - 2m\overline{u}p^\mu u + m^2\overline{u}\gamma^\mu u$$

$$= 2m^2\overline{u}\gamma^\mu u - 2m\overline{u}p^\mu u$$

<u>**(iv)** $\overline{u}\not{p}\gamma^\mu\not{p}u$ の計算</u>

$$\overline{u}\not{p}\gamma^\mu\not{p}u = m\overline{u}\not{p}\gamma^\mu u = m\overline{u}(2p^\mu - \gamma^\mu\not{p})u = 2m\overline{u}p^\mu u - m^2\overline{u}\gamma^\mu u$$

が得られた．

ステップ II：

(1) 式の全ての項が得られたので，(1) 式を計算する．ただし $\overline{u}, u$ は外す：

$$\text{(1) 式} = -y(1-y)\gamma^\mu q^2 + z(1-y)(2mp'^\mu - 2m^2\gamma^\mu + \gamma^\mu q^2)$$

$$-yz(2m^2\gamma^\mu - 2mp^\mu) + z^2(2mp^\mu - m^2\gamma^\mu)$$

である．これらの中から γ^μ に比例する項をさらに q^2 を持つ項と m^2 を持つ項とに分けその係数を抜き出す．

$$q^2: \quad y(1-y) + z(1-y) = (y+z)(1-y) = (1-x)(1-y)$$

$$m^2: \quad -2z(1-y) - 2yz - z^2 + \text{“}1\text{”} = \text{“}1\text{”} - 2z - z^2$$

となり，示そうとした q^2 と m^2 の係数が得られた．ただし後者に現れる “1” は (6.38) 式にある $m^2\gamma^\mu$ を意味する．

次に，以下に記した残りの項の導出を考える．すなわち

$$+(p'^\mu + p^\mu) \cdot mz(z-1) + q^\mu \cdot m(z-2)(x-y) \Big] u(p)$$

であるが，これは $(p'+p)^\mu$ と q^μ への分解であり，因数分解の自由性があるので導出が面倒であるため上で計算し得られた結果と，テキストに記された式を展開し p' と p に分解したものの係数が一致することを確認する．なお，テキストで $(p'+p)^\mu$ をくくり出しているのは後に Gordon 分解を利用するためである．まず

<u>(i)　(1) 式を使って計算した式</u>

$$\Big[z(1-y)2mp'^\mu + yz2mp^\mu + z^2 2mp^\mu \Big] - 2m\{(1-2y)q^\mu + 2zp^\mu\}$$

$$= 2m\{z(1-y)p' + yzp + z^2 p - (1-2y)(p'-p) - zp\}$$

が得られる．ここで mp' と mp の係数を集めると，

$$mp': \quad 2z(1-y) - 2(1-y) = 2z - 2yz - 2 + 4y,$$

$$mp: \quad 2yz + 2z^2 + 2(1-2y) - z = 2yz + 2z^2 + 2 - 4y - 2z$$

となる．一方，結果の式を展開し同じく p' と p に分解すると

<u>(ii)　結果の式を使って計算した式</u>

$$mp': \quad z(z-1) + (z-2)(x-y) = z(z-1) + (z-2)(1-2y-z)$$

$$= z^2 - z + z - 2yz - z^2 - 2 + 4y + 2z = 2z - 2yz - 2 + 4y$$

でこれは (i) で得た mp' の係数と一致する．mp の方も同様である．

/////////////////////////上記式導出のおわり//////////////////////////////

$$\overline{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) = 2\mathrm{i}e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3}$$

$$\times\overline{u}(p')\left[\gamma^{\mu}\cdot\left(-\frac{1}{2}\ell^2+(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}(2m^2z(1-z))\right]u(p), \tag{6.47}$$

となる．

$$D=\ell^2-\Delta+\mathrm{i}\epsilon, \qquad \Delta=-xyq^2+(1-z)^2m^2>0$$

次の計算をしておこう．

//////////////////////////注はじまり//////////////////////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.193)：

以下では

$$\ell^2=(\ell^0)^2-\boldsymbol{\ell}^2=(\mathrm{i}\ell_E^0)^2-\boldsymbol{\ell}^2=(\mathrm{i}\ell_E^0)^2-\boldsymbol{\ell}_E^2=-(\ell_E^0)^2-\boldsymbol{\ell}_E^2=-\ell_E^2$$

である．よって $[\ell^2-\Delta]^m=[-(\ell_E^2+\Delta)]^m=(-1)^m[\ell_E^2+\Delta]^m$ となる．

//////////////////////////注おわり//

$$\int\frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{1}{[\ell^2-\Delta]^m}=\frac{\mathrm{i}}{(-1)^m}\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4\ell_E\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta]^m}$$

$$=\frac{\mathrm{i}(-1)^m}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}\Omega_4\int_0^{\infty}\mathrm{d}\ell_E\frac{\ell_E^3}{[\ell_E^2+\Delta]^m}$$

因子 $\int\mathrm{d}\Omega_4$ は 4 次元内単位球の表面積で，たまたまそれは $2\pi^2$ である．

//////////////////4次元内単位球の表面積はじまり//////////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.193)：

$$\Omega_4=\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\omega=0}^{\pi}\sin^2\omega\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\omega=2\pi\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\omega=0}^{\pi}\sin^2\omega\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\omega$$

$$=2\pi\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\int_{\omega=0}^{\pi}\sin^2\omega\mathrm{d}\omega=4\pi\int_{\omega=0}^{\pi}\frac{1-\cos2\omega}{2}\mathrm{d}\omega$$

$$=2\pi\left[\omega-\frac{1}{2}\sin\omega\right]_0^{\pi}=2\pi^2.$$

//////////////////4次元内単位球の表面積おわり//////////////////////////

（この面積を計算する一つの方法は，4 次元球座標系

$$\boldsymbol{x} = (r\sin\omega\sin\theta\cos\phi, r\sin\omega\sin\theta\sin\omega, r\sin\omega\cos\theta, r\cos\omega)$$

で，体積測度は $\mathrm{d}^4x = r^3\sin^2\omega\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r$ である．

//////////////////////4 次元体積測度はじまり //////////////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.193)：

一般曲線座標系で座標が (u_1, u_2, u_3, u_4) で表されるとき，線素 $\mathrm{d}s$ は $\mathrm{d}s^2 = h_1^2\mathrm{d}u_1^2 + h_2^2\mathrm{d}u_2^2 + h_3^2\mathrm{d}u_3^2 + h_4^2\mathrm{d}u_4^2$ で与えられる．また，そのときの微小体積 $\mathrm{d}v = h_1\mathrm{d}u_1h_2\mathrm{d}u_2h_3\mathrm{d}u_3h_4\mathrm{d}u_4$ である．今の場合，座標は $(x, y, z, t) = (r\sin\omega\sin\theta\cos\phi, r\sin\omega\sin\theta\sin\omega, r\sin\omega\cos\theta, r\cos\omega)$ であるから

$$\mathrm{d}x = r\cos\omega\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\omega + r\sin\omega\cos\theta\cos\phi\mathrm{d}\theta$$

$$-r\sin\omega\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi + \sin\omega\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r$$

同様に $\mathrm{d}y, \mathrm{d}z, \mathrm{d}t$ について計算し，$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}t^2$ をつくると，

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\omega^2 + r^2\sin^2\omega\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\omega\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}r^2$$

を得るので（確認済み），体積測度は $\mathrm{d}v = r^3\sin^2\omega\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\omega\mathrm{d}r$ となる．

よって積分公式内の $\mathrm{d}\Omega_4 = \sin^2\omega\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\omega$ であり，$\ell_E^3 = r^3$ である．

/////////////////////4 次元体積測度おわり ///////////////////////////

$$\int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} = \frac{\mathrm{i}(-1)^m}{(4\pi)^2}\frac{1}{(m-1)(m-2)}\frac{1}{\Delta^{m-2}} \tag{6.49}$$

///////////////////////// 念のため (6.49) はじまり //////////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.193)：

$$\frac{\mathrm{i}(-1)^m}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}\Omega_4\int_0^\infty \mathrm{d}\ell_E\frac{\ell_E^3}{[\ell_E^2 + \Delta]^m} = \frac{\mathrm{i}(-1)^m}{(2\pi)^4}2\pi^2\int_0^\infty \mathrm{d}\ell_E\frac{\ell_E^3}{[\ell_E^2 + \Delta]^m}$$

となる．ここで $\ell_E^2 = t$ とすると，$\ell_E\mathrm{d}\ell_E = \mathrm{d}t/2$ であるから，積分だけを抜き出して書くと，部分積分を使い

$$\int_0^\infty \frac{t\mathrm{d}t}{2[t+\Delta]^m} = \left[\frac{t}{2(1-m)(t+\Delta)^{m-1}}\right]_0^\infty - \frac{1}{2(1-m)}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(t+\Delta)^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{2(m-1)(2-m)}\left[\frac{1}{(t+\Delta)^{m-2}}\right]_0^\infty = \frac{1}{2(m-1)(m-2)}\frac{1}{\Delta^{m-2}}$$

///////////////////////念のため (6.49) おわり //////////////////////////

同様に

$$\int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta]^m} = \frac{\mathrm{i}(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2}\frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)}\frac{1}{\Delta^{m-3}} \tag{6.50}$$

を得る．///////////////////////念のため (6.50) はじまり //////////////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.193)：
(6.49) と同じ積分である．ただし，$\ell^2 = -\ell_E^2$ である．

$$\int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta]^m} = \frac{\mathrm{i}(-1)^m}{(2\pi)^4}2\pi^2\int_0^\infty \mathrm{d}\ell_E\frac{-\ell_E^5}{[\ell_E^2+\Delta]^m}$$

となる．よって，$\ell_E^2 = t$ として部分積分を 2 回行うことで問題の積分は得られる．
///////////////////////念のため (6.50) おわり //////////////////////////

$$\int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\left(\frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta_\Lambda]^3}\right) = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\ell_E^2\left(\frac{\ell_E^4}{[\ell_E^2+\Delta]^3} - \frac{\ell_E^4}{[\ell_E^2+\Delta_\Lambda]^3}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\log\left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right), \tag{6.53}$$

を得る．
//////////////////////(6.53) の導出はじまり ///////////////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.194)：
先ず，第 1 行目の左辺を確認する．

$$\frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta_\Lambda]^3} = \frac{\ell^2\{[\ell^2-\Delta_\Lambda]^3 - [\ell^2-\Delta]^3\}}{[\ell^2-\Delta]^3[\ell^2-\Delta_\Lambda]^3}$$

分子を a^3-b^3 の因数分解の公式を使い展開すると

$$= \frac{\ell^2\{(\Delta-\Delta_\Lambda)([\ell^2-\Delta_\Lambda]^2 - [\ell^2-\Delta_\Lambda][\ell^2-\Delta] + [\ell^2-\Delta]^2\}}{[\ell^2-\Delta]^3[\ell^2-\Delta_\Lambda]^3}$$

$$\approx \frac{\ell^2(-\Delta_\Lambda)^3}{[\ell^2-\Delta]^3(-\Delta_\Lambda)^3}$$

となり，元に戻る．次に，Wick の回転後，$\ell^2 = -\ell_E^2$ に注意すると

$$\int \frac{\mathrm{d}^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta]^3} = \frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}2\pi^2\int_0^\infty \mathrm{d}\ell_E\frac{-\ell_E^5}{[\ell_E^2+\Delta]^3} = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}2\int_0^\infty \mathrm{d}\ell_E\frac{\ell_E^5}{[\ell_E^2+\Delta]^3}$$

となる．ここで積分変数を ℓ_E から $\ell_E^2 = t$ に変更すると $\mathrm{d}\ell_E = \mathrm{d}\ell_E^2/2 = \mathrm{d}t/2$ となるので

$$= \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\ell_E^2 \frac{\ell_E^4}{[\ell_E^2+\Delta]^3} = \frac{\mathrm{i}}{(4\pi)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}t \frac{t^2}{(t+\Delta)^3}$$

を得る．部分積分を 2 度行うと

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t \frac{t^2}{(t+\Delta)^3} = \left[\frac{t^2}{-2(t+\Delta)^2}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t+\Delta)^2}$$

$$= \left[\frac{t}{(t+\Delta)^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{(t+\Delta)} = \log|\infty| - \log\Delta$$

//////////////////////(6.53) の導出のおわり//////////////////////////

6.4 電子バーテックス関数：赤外発散

$$F_1(q^2) = 1 - \frac{\alpha}{2\pi} f_{\mathrm{IR}}(q^2)\log\left(\frac{m^2 \ \ \text{or} \ \ -q^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{6.61}$$

と書くことができる．ここで

$$f_{\mathrm{IR}}(q^2) = \int_0^1 \left(\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}\right)\mathrm{d}\xi - 1, \tag{6.62}$$

である．
////////////////////(6.62) の導出のはじまり/////////////////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.199)：
２つ上の式で log の中の真数を $(m^2 \ \ \text{or} \ \ -q^2) \to m^2$ と略記すると

$$\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\xi \left[-2\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}\log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 2\log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}\xi \left[\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)} - 1\right]\log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)$$

$$= -\frac{\alpha}{2\pi}\left\{\int_0^1 \left[\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}\right]\mathrm{d}\xi - \int_0^1 \mathrm{d}\xi\right\}\log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)$$

$$-\frac{\alpha}{2\pi}\underbrace{\left\{\int_0^1 \left[\frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2\xi(1-\xi)}\right]\mathrm{d}\xi - 1\right\}}_{f_{\mathrm{IR}}}\log\left(\frac{m^2 \ \ \text{or} \ \ -q^2}{\mu^2}\right)$$

////////////////////(6.62) の導出のおわり/////////////////////////////

第 7 章　輻射補正

7.1 Field-Strength Renormalization

$$\int \mathrm{d}^4x \langle\Omega|T\psi(x)\overline{\psi}(0)|\Omega\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} = \frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2} + \frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2}(-\mathrm{i}\Sigma)\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2} + \cdots \tag{7.22}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4x \langle\Omega|T\psi(x)\overline{\psi}(0)|\Omega\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \\ = \frac{\mathrm{i}}{(\not{p}-m_0)} + \frac{\mathrm{i}}{(\not{p}-m_0)}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p}-m_0}\right) + \frac{\mathrm{i}}{(\not{p}-m_0)}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p}-m_0}\right)^2 + \cdots \\ = \frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m_0-\Sigma(\not{p})}\end{aligned} \tag{7.23}$$

となる．

////////////////////念のため (7.23) はじまり/////////////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.220)：

まず (7.22) 式右辺第 2 項は

$$\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2}(-\mathrm{i}\Sigma)\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2} = \frac{\mathrm{i}}{(\not{p}-m_0)}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p}-m_0}\right)$$

と書ける．次に (7.22) 式で第 3 番目の項を書き，更にそれを上のように書き直すと

$$\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2}(-\mathrm{i}\Sigma)\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2}(-\mathrm{i}\Sigma)\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2} = \frac{\mathrm{i}}{(\not{p}-m_0)}\left(\frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p}-m_0}\right)^2$$

となる．これが，(7.23) 式第 2 行であるが，これは初項 a と公比 r がそれぞれ

$$a = \frac{\mathrm{i}}{(\not{p}-m_0)}, \quad r = \frac{\Sigma(\not{p})}{\not{p}-m_0}$$

の無限等比級数の和であるから $r = |\Sigma(\not{p})/(\not{p}-m_0)| \leq 1$ として

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\mathrm{i}/(\not{p}-m_0)}{1-\Sigma(\not{p})/(\not{p}-m_0)} = \frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m_0-\Sigma(\not{p})}$$

////////////////////念のため (7.23) おわり////////////////////////////////////

$$(\not{p}-m)\cdot\left(1-\left.\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}\not{p}}\right|_{\not{p}=m}\right)+\mathcal{O}((\not{p}-m)^2) \tag{7.25}$$

の形をもつ.

//////////////////////////注 (7.25) のはじまり//////////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.220) :

川村嘉春著相対論的量子力学 (14.43) 式によれば，$\Sigma(\not{p})$ を on-shell 近傍 ($p^2 \to m^2$) で展開すると ($\not{p}$ を m の周りで展開する)

$$\Sigma(\not{p})=\Sigma(m)+\left.\frac{\mathrm{d}\Sigma(\not{p})}{\mathrm{d}\not{p}}\right|_{\not{p}=m}(\not{p}-m)+\mathcal{O}((\not{p}-m)^2)$$

となる．これと (**??**) 式の δm を使うと (7.23) 式の分母は

$$\not{p}-m_0-\Sigma(\not{p})=\not{p}-(m-\delta m)-\left(\Sigma(m)+\frac{\mathrm{d}\Sigma(\not{p})}{\mathrm{d}\not{p}}(\not{p}-m)\right)$$

$$=\not{p}-m-\Sigma(m)+\delta m-\frac{\mathrm{d}\Sigma(\not{p})}{\mathrm{d}\not{p}}(\not{p}-m)=(\not{p}-m)\left(1-\frac{\mathrm{d}\Sigma(\not{p})}{\mathrm{d}\not{p}}-(\Sigma(m)-\delta m)\right)$$

$$=(\not{p}-m)\left(1-\frac{\mathrm{d}\Sigma(\not{p})}{\mathrm{d}\not{p}}\right)\left(1-\frac{\Sigma(m)-\delta m}{1-\mathrm{d}\Sigma(\not{p})/\mathrm{d}\not{p}}\right)$$

となる．よって，これを (7.23) 式の分母に戻すと

$$\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m_0-\Sigma(\not{p})}=\frac{\mathrm{i}}{(\not{p}-m)\left(1-\frac{\mathrm{d}\Sigma(\not{p})}{\mathrm{d}\not{p}}\right)\left(1-\frac{\Sigma(m)-\delta m}{1-\mathrm{d}\Sigma(\not{p})/\mathrm{d}\not{p}}\right)}$$

$$=\frac{\mathrm{i}\left(1-\frac{\mathrm{d}\Sigma(\not{p})}{\mathrm{d}\not{p}}\right)^{-1}}{(\not{p}-m)\left(1-\frac{\Sigma(m)-\delta m}{1-\mathrm{d}\Sigma(\not{p})/\mathrm{d}\not{p}}\right)}\equiv\frac{\mathrm{i}Z_2}{\not{p}-m}$$

とする．この式で $\Sigma(m)=\delta m$ とすると Z_2 の定義 (7.26) が明らかになる．

//////////////////////////注 (7.25) のおわり//////////////////////////

$$Z_2^{-1}=1-\left.\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}\not{p}}\right|_{\not{p}=m} \tag{7.26}$$

と定義する.

Π_2 の計算

$$
\mathrm{i}\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -(-\mathrm{i}e)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{\mathrm{i}(\not{k}+m)}{k-2-m^2}\gamma^\nu \frac{\mathrm{i}(\not{k}+\not{q}+m)}{(k+q)^2-m^2}\right]
$$

$$
= -4e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}(k\cdot(k+q)-m^2)}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)} \tag{7.78}
$$

ここで Feynman パラメターを導入して分母の因子を結合する：

$$
\frac{1}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)} = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{(k^2+2xk\cdot q+xq^2-m^2)^2}
$$

$$
= \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{1}{(\ell^2+x(1-x)q^2-m^2)^2}
$$

である．ここで $\ell = k+xq$ とした．(7.78) 式の分子は ℓ によって

分子 $= 2\ell^\mu\ell^\nu - g^{\mu\nu}\ell^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2+x(1-x)q^2) + (\ell$の 1 次$)$

と表される.

//////////////////////(7.78) の分子の導出はじまり///////////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.248)：

　$k = \ell - xq$ により k を消去すればよい．また $q\ell$ といった項は ℓ の 1 次の項としてまとめた.

$$
k^\mu(k+q)^\nu = (\ell^\mu - xq^\mu)(k^\nu + (1-x)q^\nu) = \ell^\mu\ell^\nu - x(1-x)q^\mu q^\nu + (\ell\text{の 1 次の項})
$$

$$
k\cdot(k+q) = (\ell - xq)\cdot(\ell + (1-x)q) = \ell^2 - x(1-x)q^2 + (\ell\text{の 1 次の項})
$$

より，(7.78) 式の分子が得られる.

//////////////////////(7.78) の分子の導出おわり///////////////////////////

次元正則化法

$$
\int \frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^2} = \int \frac{\mathrm{d}\Omega_d}{(2\pi)^d}\int_0^\infty \mathrm{d}^d\ell_E \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2+\Delta)^2} \tag{7.80}
$$

(7.80) 式の最初の因子は d 次元での単位球の表面積である．

(7.80) 式の第 2 因子は (簡単のため $\ell_E=\ell$ としている)

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\ell \frac{\ell^{d-1}}{(\ell^2+\Delta)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}(\ell^2)\frac{(\ell^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell^2+\Delta)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}\int_0^1 \mathrm{d}x x^{1-\frac{d}{2}}(1-x)^{\frac{d}{2}-1},$$

となる．ここで $x=\Delta/(\ell^2+\Delta)$ の変数変換を行った．
////////////////////////上の式の導出のはじまり//////////////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.250)：
変数変換を処理すると

$$x = \frac{\Delta}{(\ell^2+\Delta)} \equiv \frac{\Delta}{(t+\Delta)} \longrightarrow t = \Delta\frac{(1-x)}{x}$$

である．よって

$$\mathrm{d}x = -\frac{\Delta}{(t+\Delta)^2}\mathrm{d}t \longrightarrow \mathrm{d}t = -\frac{(t+\Delta)^2}{\Delta}\mathrm{d}x$$

である．これらを元の積分に代入すると

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}(\ell^2)\frac{(\ell^2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\ell^2+\Delta)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}t\frac{t^{\frac{d}{2}-1}}{(t+\Delta)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^0 \left(-\frac{(t+\Delta)^2}{\Delta}\mathrm{d}x\right)\frac{1}{(t+\Delta)^2}\left(\Delta\frac{(1-x)}{x}\right)^{\frac{d}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}\int_0^1 \mathrm{d}x x^{1-\frac{d}{2}}(1-x)^{\frac{d}{2}-1}$$

////////////////////////上の式の導出のおわり//////////////////////////

よって，$d-$ 次元積分 (7.80) の最終結果は

$$\int \frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

となる．
/////////////////////(7.80) の派生式の導出のはじまり///////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.250)：

$\beta = d/2$ は明らかである．α は $1 - d/2 = \alpha - 1$ から得られ，$\alpha = 2 - d/2$ となる．これらを代入すると

$$\int \frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} = \left(\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\right) \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}} B\left(2 - \frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$$

となる．$\epsilon = 4 - d$ すなわち $2 - d/2 = \epsilon/2$ として

$$= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma(\epsilon/2)\Gamma(d/2)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{\Gamma(d/2)}$$

よって $d \to 4$ のとき，$\Gamma(d/2) \to \Gamma(2) = 1$ である．
//////////////////////(7.80) の派生式の導出のおわり ///////////////////
.

$\Gamma(z)$ は孤立した極を，$z = 0, -1, -2, \cdots$ に持つので，この積分は $d = 4, 6, 8, \cdots$ に孤立した極をもつ．$d = 4$ 近傍の挙動をみるために $\epsilon = 4 - d$ とし，また近似

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \approx \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{7.83}$$

を使う．

よって，積分 (7.80) は $d \to 4$ としたとき

$$\int \frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2} \to \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log\Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \tag{7.84}$$

となる．
//////////////////////(7.84) の導出のはじまり ///////////////////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.250)：
先ず，$\epsilon \to 0$ としたとき $a^\epsilon \to 1$ であることに注意すると，小さな数 x を考え

$$\epsilon \to 0 \qquad \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} = \Delta^{-\frac{\epsilon}{2}} = 1 + x$$

とする．また対数の展開に $\log(1+x) = x - x^2/2 + \cdots$ に注意して，上の式の対数をとる．

$$\log(\Delta^{-\frac{\epsilon}{2}}) = -\frac{\epsilon}{2}\log\Delta = \log(1+x) \approx x \longrightarrow x = -\frac{\epsilon}{2}\log\Delta$$

が得られるので，

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} = 1 + x = 1 - \frac{\epsilon}{2}\log\Delta$$

これを使うことで

$$\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}}\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)=\frac{1}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{\epsilon}{2}\log\Delta+\cdots\right)\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma+\log(4\pi)+\mathcal{O}(\epsilon)\right)$$

を展開したのが問題の式である．また $\log(4\pi)$ は，上と同じ理由から発生する．すなわち因子 $(4\pi)^{d/2}=(4\pi)^{2-\epsilon/2}=(4\pi)^2(4\pi)^{-\epsilon/2}$ に対して上と同じ計算を行えばよい．

//////////////////////(7.84) の導出のおわり///////////////////////////////

以下の積分公式を簡単に示すことができる：

$$\int\frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\ell_E^2+\Delta)^n}=\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}};\qquad(7.85)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{\ell_E^2}{(\ell_E^2+\Delta)^n}=\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{d}{2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}-1},\qquad(7.86)$$

の 2 つである．

/////////////////念のため (7.85)(7.86) の導出のはじまり//////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.251)：

(7.85) 式について：$n=2$ の場合と同様であるが，

$$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{(2\pi)^d}\frac{1}{2}\int_0^\infty\mathrm{d}t\frac{t^{\frac{d}{2}-1}}{(t+\Delta)^n}$$

$$=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{(2\pi)^d}\frac{1}{2}\int_1^0\left(-\frac{(t+\Delta)^2}{\Delta}\mathrm{d}x\right)\frac{1}{(t+\Delta)^n}\left(\Delta\frac{(1-x)}{x}\right)^{\frac{d}{2}-1}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1\mathrm{d}x\frac{1}{\Delta(t+\Delta)^{n-2}}\Delta^{\frac{d}{2}-1}\left(\frac{(1-x)}{x}\right)^{\frac{d}{2}-1}$$

であるから，$t+\Delta=\Delta/x$ などを代入し計算すると

$$=\frac{1}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}}\int_0^1\mathrm{d}x x^{n-\frac{d}{2}-1}(1-x)^{\frac{d}{2}-1}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})\Gamma(d/2)}{\Gamma(n)}$$

を得る．(7.86) 式は (7.85) 式を利用するなら分子に $\ell_E^2=t$ をかけるだけである，よって

$$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{(2\pi)^d}\frac{1}{2}\int_0^\infty\mathrm{d}t\frac{t^{\frac{d}{2}-1}t}{(t+\Delta)^n}=\frac{1}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1\mathrm{d}x\frac{1}{\Delta(t+\Delta)^{n-2}}\Delta^{\frac{d}{2}}\left(\frac{(1-x)}{x}\right)^{\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-1-\frac{d}{2}} \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot x^{n-\frac{d}{2}-2}(1-x)^{\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-1-\frac{d}{2}} \int_0^1 x^{(n-\frac{d}{2}-1)-1}(1-x)^{(\frac{d}{2}+1)-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-1-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\Gamma(n)}$$

を得る．ここでガンマ関数の性質 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ より，$\Gamma(\frac{d}{2}+1) = \frac{d}{2}\Gamma(\frac{d}{2})$ を代入すると

$$= \frac{1}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-1-\frac{d}{2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-1-\frac{d}{2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}$$

として，ガンマ関数の性質から $d/2$ が現れる．
/////////////////念のため (7.85)(7.86) の導出のおわり//////////////////////

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -(2-\epsilon)\gamma^\nu, \\ &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} - \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho, \\ &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\sigma + \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \end{aligned} \tag{7.89}$$

である．
/////////////////////念のため (7.89) の導出のはじまり//////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.251)：
第 1,2 の式は

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma_\mu = 2g^{\mu\nu}\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\mu = 2\gamma^\nu - d\gamma^\nu = -(2-\epsilon)\gamma^\nu$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma^\rho\gamma_\mu = 2\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\mu = 2\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\nu\{-(2-\epsilon)\}\gamma^\rho$$

$$= 2\gamma^\rho\gamma^\nu + 2\gamma^\nu\gamma^\rho - \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho = 4g^{\rho\nu} - \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho$$

/////////////////////念のため (7.89) の導出のおわり//////////////////

第10章　くりこみのシステム化

$V(p^2)$ を次元正則化を使って詳細に計算していく．その手順は全くセクション 7.5 と同じである：

$$V(p^2) = \frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\frac{1}{[k^2+2xk\cdot p+xp^2-m^2]^2}$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}^d \ell}{(2\pi)^d}\frac{1}{[\ell^2+x(1-x)p^2-m^2]^2} \qquad (\ell = k+xp)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}^d \ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{[\ell_E^2-x(1-x)p^2+m^2]^2} \qquad (\ell_E^0 = -\mathrm{i}\ell^0)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\frac{1}{[m^2-x(1-x)p^2]^{2-d/2}}$$

$$\xrightarrow[d\to 4]{} -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma+\log(4\pi)-\log[m^2-x(1-x)p^2]\right), \quad (10.23)$$

ここで $\epsilon = 4-d$ である．

////////////////////(10.23) の導出のはじまり////////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.327)：

第 1 行目と第 2 行目は 247 ページと同じであり，4 行目には (7.85) 式を使った．また，(7.83) 式を

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon}-\gamma$$

とした近似式の方がこれまでの結果を表すことができるので以後これを使う．

さらに，$\epsilon \to 0$，$a^\epsilon \to 1$ を意味する式変形を行う：

$$\frac{1}{[m^2-x(1-x)p^2]^{2-d/2}} = \frac{1}{\Delta^{\epsilon/2}} \equiv 1+x, \quad x \ll 1$$

とし，この両辺の対数をとった後，少々計算し

$$-\frac{\epsilon}{2}\log\Delta = \log(1+x) \simeq x \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\Delta^{\epsilon/2}} = 1-\frac{\epsilon}{2}\log\Delta$$

を得る．よって

$$\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\frac{1}{[m^2-x(1-x)p^2]^{2-d/2}} = \left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma\right)\left(1-\frac{\epsilon}{2}\log\Delta\right)$$

$$\simeq \frac{2}{\epsilon}-\gamma-\log\Delta$$

を得る．なお，分母にある因子 $(4\pi)^{d/2}$ から $\log(4\pi)$ が加算される．
/////////////////////(10.23) の導出のおわり/////////////////////////

結合定数 (10.22) 式はしたがって

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 \mathrm{d}x\left(\frac{1}{[m^2-x(1-x)4m^2]^{2-d/2}}+\frac{2}{[m^2]^{2-d/2}}\right)$$

となる．

$$\xrightarrow[d\to 4]{} -\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\left(\frac{6}{\epsilon}-3\gamma+3\log(4\pi)-\log[m^2-x(1-x)4m^2]-2\log[m^2]\right), \tag{10.24}$$

が得られる．この式が $d\to 4$ で発散することがわかる．しかし (10.21) 式を全てまとめれば,

$$\mathrm{i}\mathcal{M} = -\mathrm{i}\lambda - \frac{\mathrm{i}\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\left[\log\left(\frac{m^2-x(1-x)s}{m^2-x(1-x)4m^2}\right)+\log\left(\frac{m^2-x(1-x)t}{m^2}\right)\right.$$
$$\left.+\log\left(\frac{m^2-x(1-x)u}{m^2}\right)\right], \tag{10.25}$$

となる．
////////////////////(10.25) の導出のはじまり/////////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.327)：
(10.23) 式より

$$V(s) = -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma+\log(4\pi)-\log[m^2-x(1-x)s]\right)$$

であり，同様に $V(t), V(u)$ を求め，$V(s)+V(t)+V(u)$ を計算すると

$$V(s)+V(t)+V(u) = -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\left(\frac{6}{\epsilon}-3\gamma+3\log(4\pi)-\log[m^2-x(1-x)s]\right.$$
$$\left.-\log[m^2-x(1-x)t]-\log[m^2-x(1-x)u]\right)$$

となるので，これに (10.24) 式を考えると，これが持つ ϵ とが相殺して発散が消える．
////////////////////(10.25) の導出のおわり/////////////////////

$$-4g^2\int_0^1 \mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d}\frac{\ell^2-x(1-x)p^2+m_f^2}{(\ell^2+x(1-x)p^2-m_f^2)^2}$$

$$= -4g^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{-\mathrm{i}}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{\frac{d}{2}\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Delta^{1-d/2}} - \frac{\Delta\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \right)$$

$$= \frac{4\mathrm{i}g^2(d-1)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Delta^{1-d/2}}, \tag{10.33}$$

ここで $\Delta = m_f^2 - x(1-x)p^2$ である．
//////////////////(10.33) の導出のはじまり/////////////////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.329)：
$\ell \to \ell_E$ への変換で，$\ell^0 = \mathrm{i}\ell_E^0$ であるから，分子と分母は

$$\ell^2 - x(1-x)p^2 + m_f^2 = -\ell_E^2 - x(1-x)p^2 + m_f^2 = -(\ell_E^2 + x(1-x)p^2 - m_f^2)$$

$$= -(\ell_E^2 - \Delta)$$

$$(\ell^2 + x(1-x)p^2 - m_f^2)^2 = [-(\ell_E^2 + m_f^2 - x(1-x)p^2)]^2 = (\ell_E^2 + \Delta)^2$$

として，公式 (7.85) と (7.86) を使う．また，Γ 関数の公式より

$$\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(1-\frac{d}{2}+1\right) = \left(1-\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)$$

であるから，

$$\frac{d}{2}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) - \left(1-\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) = (d-1)\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)$$

を得る．
//////////////////(10.33) の導出のおわり//////////////////////////////

10.3 量子電気力学のくりこみ

QED の 1 ループ構造
$\epsilon = 4 - d$ として

$$-\mathrm{i}\Sigma_2(p) = -\mathrm{i}\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})((4-\epsilon)m - (2-\epsilon)x\not{p})}{((1-x)m^2 + x\mu^2 - x(1-x)p^2)^{2-d/2}}, \tag{10.41}$$

となる．
/////////////////////(10.41) の導出のはじまり///////////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.333)：
(7.16) 式からはじめる必要がある．この式の分子は $\gamma^\mu(\not{k}+m)\gamma_\mu$ であるから，この計算に (7.89) 式を使用する．

$$\gamma^\mu(\not{k}+m)\gamma_\mu = \gamma^\mu\not{k}\gamma_\mu + m\gamma^\mu\gamma_\mu = -(2-\epsilon)\not{k} + dm$$

ここで $\ell = k - xp$ としているので，積分の特徴から ℓ の奇数次項は消え，

$$-(2-\epsilon)\not{k} + dm \to -(2-\epsilon)x\not{p} + (4-\epsilon)m$$

を得る．なお，ここで $\gamma^\mu\gamma_\mu = d$ を使っている．これは定義式 $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ に $g_{\mu\nu}$ をかけることで

$$g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu + g_{\mu\nu}\gamma^\nu\gamma^\mu = 2g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \to 2\gamma^\mu\gamma_\mu = 2d$$

から得られる．
////////////////////(10.41) の導出のおわり //////////////////////////

次元正則化法で再計算する．

$$\delta F(q^2) = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\delta(x+y+z-1)\left[\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\frac{(2-\epsilon)^2}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}(q^2\{2(1-x)(1-y)-\epsilon xy\} + m^2[2(1-4z+z^2)-\epsilon(1-z)^2])\right], \tag{10.45}$$

ここで，前と同様 $\Delta = (1-z)^2m^2 + z\mu^2 - xyq^2$ である．第 4 の条件の使用により，

$$\delta_1 = -\delta F_1(0) = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\int \mathrm{d}z(1-z)\left[\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{((1-z)^2m^2+z\mu^2)^{2-d/2}}\frac{(2-\epsilon)^2}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{((1-z)^2m^2+z\mu^2)^{3-d/2}}(m^2[2(1-4z+z^2)-\epsilon(1-z)^2])\right], \tag{10.46}$$

となる．

//////////////// (10.46) 式の導出のはじまり ///////////////////
(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.334)：
テキストでは δ_1 の計算を形状因子を基に算出しているが，$\delta_1 = Z_1 - 1$ であり，Z_1 は電子の頂点関数に対するスケーリング因子である．よって，直接こ

れを計算することで δ_1 を求めたい．これに対応する振幅は (6.38) 式まで遡る．つまり (6.38) 式の $d-$ 次元への拡張計算を行うが，$g_{\nu\rho}\gamma^\rho = \gamma_\nu$ としてからはじめる．

$$\overline{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p) = \frac{-\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^d}\int\frac{\mathrm{d}^d k\ \ \overline{u}(p')\gamma^\nu(\not{k}'+m)\gamma^\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu u(p)}{((k-p)^2+\mathrm{i}\epsilon)({k'}^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)(k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)}, \tag{2}$$

分母に対しては Feynman パラメターを使って変形すると，(6.43) 式が得られる．

$$D = k^2 + 2k\cdot(yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x+y)m^2 + \mathrm{i}\epsilon, \tag{6.43'}$$

ただし $x+y+z=1$，$k' = k+q$ である．以下の ℓ を導入する：

$$\ell \equiv k + yq - zp$$

これにより，$D = \ell^2 - \Delta + \mathrm{i}\epsilon$ と書くことができる．ここで

$$\Delta \equiv -xyq^2 + (1-z)^2 m^2 \tag{6.44}$$

である．

一方，分子の方は，$d-$ 次元 Dirac 縮約の公式 (7.89) を適用すると，

$$\begin{aligned}&\gamma^\nu(\not{k}'+m)\gamma^\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu\\ &= -2\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + \epsilon\not{k}'\gamma^\mu\not{k} - (2-\epsilon)m^2\gamma^\mu + m\{4(k+k')^\mu - \epsilon(\gamma^\mu\not{k} + \not{k}'\gamma^\mu)\}\end{aligned}$$

が得られる．ここで $\gamma^\nu\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma_\nu = k'_\rho k_\sigma\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma_\nu$ などを使った．δ_1 を計算する場合は，くり込み条件で $q\to 0$ とすることから，計算の簡単化のため，最初から $q^\mu = 0, q^2 = 0$ として計算を進める．これにより，

$$k = k', \quad p = p', \quad k = \ell + zp$$

となる．よって

$$\begin{aligned}&\gamma^\nu(\not{k}'+m)\gamma^\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu\\ &= -(2-\epsilon)\not{k}\gamma^\mu\not{k} - (2-\epsilon)m^2\gamma^\mu + m\{8k^\mu - \epsilon(\gamma^\mu\not{k} + \not{k}\gamma^\mu)\},\end{aligned} \tag{3}$$

を得る．この式の右辺第 1 項を変形する．なお，ℓ の 1 次の項は (6.45) 式で示されているように，ℓ 積分の結果ゼロとなること，つまり $\not{\ell}\gamma^\mu\not{p}$ などを落としている．

$$\not{k}\gamma^\mu\not{k} = (\not{\ell} + z\not{p})\gamma^\mu(\not{\ell} + z\not{p}) = \not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} + z^2\not{p}\gamma^\mu\not{p}, \tag{4}$$

さらに $\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell}$ についてであるが，

$$\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} = \ell_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\sigma\ell^\sigma \neq \ell_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu\ell^\nu = -(2-\epsilon)\gamma^\mu\ell^2$$

であることに注意しなければならない．そこで次のように変形していく

$$\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} = \ell_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu\not{\ell} = \ell_\nu(2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu\gamma^\nu)\not{\ell} = 2\ell^\mu\not{\ell} - \gamma^\mu\not{\ell}\not{\ell} = 2\ell^\mu\ell^\nu\gamma_\nu - \gamma^\mu\ell^2$$

とする．つぎに ℓ の積分公式 (**??**) 式を使うと，

$$\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} \to 2\left(\frac{1}{d}g^{\mu\nu}\gamma_\nu\right) - \gamma^\mu\ell^2 = \left(\frac{2}{d} - 1\right)\gamma^\mu\ell^2 = -\frac{(2-\epsilon)}{d}\gamma^\mu\ell^2, \qquad (5)$$

また (4) で，Dirac 方程式より $\overline{u}(p)\not{p} = m$，$\not{p}u(p) = m$ であるから

$$z^2\not{p}\gamma^\mu\not{p} \to \overline{u}(p)z^2\not{p}\gamma^\mu\not{p}u(p) = z^2\overline{u}m^2\gamma^\mu u$$

となるので，結局 (4) は

$$\not{k}\gamma^\mu\not{k} \to -\frac{(2-\epsilon)}{d}\gamma^\mu\ell^2 + z^2m^2\gamma^\mu, \qquad (6)$$

となる．次に (3) 式の $8mk^\mu$ は (6.45) 式を考慮すると $8mk^\mu = 8m(\ell^\mu + zp^\mu) \to 8mzp^\mu$ となる．$p' = p$，$q = 0$ の場合の Gordon 分解は

$$\frac{(p'+p)^\mu}{2m} = \gamma^\mu - \frac{\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \quad \to \quad p^\mu = m\gamma^\mu$$

となる．よって (4) で

$$8mk^\mu \to 8m^2z\gamma^\mu, \qquad (7)$$

となることを示せる．更に，(3) の最後の項 $-\epsilon mz(\gamma^\mu\not{p} + \not{p}\gamma^\mu)$ は Dirac 方程式より

$$-\overline{u}\epsilon mz(\gamma^\mu\not{p} + \not{p}\gamma^\mu)u \quad \to \quad -2\epsilon m^2z\gamma^\mu \qquad (8)$$

である．(6)〜(8) 式を (3) に代入すると

$\gamma^\nu(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu$

$$= -(2-\epsilon)\left(-\frac{(2-\epsilon)}{d}\gamma^\mu\ell^2 + z^2m^2\gamma^\mu\right) - (2-\epsilon)m^2\gamma^\mu + 8zm^2\gamma^\mu - 2\epsilon m^2\gamma^\mu$$

$$= \frac{(2-\epsilon)^2}{d}\gamma^\mu\ell^2 - 2(1 - 4z + z^2)m^2\gamma^\mu + \epsilon(1-z)^2m^2\gamma^\mu \qquad (9)$$

となり，振幅 (2) の分子が得られた．

これまでに得られて結果を記す．これはテキスト (6.47) 式に相当するが，$q \to 0$ としている．

$$\overline{u}(p)\delta\Gamma^\mu u(p) = -\mathrm{i}e^2 \int \frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d} \int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\delta(x+y+z-1)\frac{2}{D^3},$$

$$\times\overline{u}\left[\gamma^\mu \cdot \left\{\frac{(2-\epsilon)^2}{d}\ell^2 - 2(1-4z+z^2)m^2 + \epsilon(1-z)^2m^2\right\}\right]u \qquad (10)$$

ここで

$$D = \ell^2 - \Delta + \mathrm{i}\epsilon, \quad \Delta = (1-z)^2m^2$$

である．4 次元 Euclid 化を実施し，公式 (7.85)，(7.86) を使うと

$$\int \frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d}\frac{1}{[\ell^2-\Delta]^3} = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta]^3} = -\mathrm{i}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{3-\frac{d}{2}}, \qquad (11)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^d\ell}{(2\pi)^d}\frac{\ell^2}{[\ell^2-\Delta]^3} = \mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta]^3} = \mathrm{i}\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{d}{2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(3)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}, \qquad (12)$$

となる．これらの結果を (10) 式へ代入し，$\delta\Gamma$ 部分だけ取り出すと

$$\delta\Gamma = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\gamma^\mu \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\delta(x+y+z-1)\left[\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}\frac{(2-\epsilon)^2}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-\frac{d}{2}}}\{m^2[2(1-4z+z^2)-\epsilon(1-z)^2]\}\right], \qquad (13)$$

ここでは，赤外発散を避けるため $\Delta = (1-z)^2m^2 + z\mu^2$ とした．δ 関数を積分すると

$$\delta\Gamma = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\gamma^\mu \int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}y\left[\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}\frac{(2-\epsilon)^2}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-\frac{d}{2}}}\{m^2[2(1-4z+z^2)-\epsilon(1-z)^2]\}\right], \qquad (14)$$

となることから (y の積分を実行すると因子 $1-z$ がでる)，(10.46) 式が得られる．

////////////////// (10.46) 式の導出のおわり /////////////////////

(10.46) 式と (10.43) 式を直接計算することで，$\delta_1 = \delta_2$ であることが分かる．

////////////////// $\delta_1 = \delta_2$ の確認はじまり ////////////////////

(M.E. Peskin & D.V.Schroeder p.334) :

δ_1 と δ_2 の定義式の積分記号の前の因数は同じであるので，積分内のみの比較をする．まず (10.43) 式の δ_2 からはじめる．ただし $\Delta(x) = (1-x)^2 m^2 + x\mu^2$ とする．

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \left[(2-\epsilon)x - \frac{\epsilon}{2} \frac{2x(1-x)m^2}{\Delta}(4-2x-\epsilon(1-x)) \right], \qquad (15)$$

これを 2 つに分け

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} (2-\epsilon)x, \qquad (16)$$

$$-\int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \frac{\epsilon}{2} \frac{2x(1-x)m^2}{\Delta}(4-2x-\epsilon(1-x)), \qquad (17)$$

とする．(16) 式の被積分関数を $\epsilon \to 0$ として展開するが，一部は既に (7.84) で行っているので，それ以降を記す.

$$\left(\frac{2}{\epsilon} - \log\Delta(x) - \gamma\right)(2-\epsilon)x \simeq 2\left(\frac{2}{\epsilon} - \log\Delta(x) - \gamma\right)x - 2x$$

$$= 2\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - 1\right)x - 2x\log\Delta(x)$$

よって，第 1 項の積分は

$$\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - 1\right)\int_0^1 2x\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - 1\right)$$

であり，

$$-2\int_0^1 x\log((1-x)^2 m^2 + x\mu^2)\mathrm{d}x = -2\int_0^1 (1-t)\log(t^2 m^2 + (1-t)\mu^2)\mathrm{d}t$$

$$= -\Big[(2t-t^2)\log(t^2 m^2 + (1-t)\mu^2) \Big]_0^1 + \int_0^1 (2t-t^2)\frac{2tm^2 - \mu^2}{t^2 m^2 + (1-t)\mu^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\log m^2 + \int_0^1 \frac{(2t-t^2)2tm^2}{t^2 m^2}\mathrm{d}t = -\log m^2 + 2\int_0^1 (2-t)\mathrm{d}t = -\log m^2 + 3$$

なお第 3 行目の積分では $\mu \to 0$ として概算の積分を行った．よって，(16) の積分結果は

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} (2-\epsilon)x \simeq \frac{2}{\epsilon} - \gamma - \log m^2 + 2, \qquad (18)$$

次に (17) の積分を行う．なお，$2-d/2=\epsilon/2$ であるから $\Gamma(2-d/2)=\Gamma(\epsilon/2)$ となり，Γ 関数の性質 $z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$ などを使って変形を行うと

$$-\int_0^1 \mathrm{d}x\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}+1\right)\frac{2x(1-x)m^2}{\Delta^{\epsilon/2+1}}(4-2x-\epsilon(1-x))$$

$$\xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \quad -\int_0^1 \mathrm{d}x\frac{2x(1-x)m^2}{(1-x)^2m^2+x\mu^2}(4-2x)$$

$$=-4\int_0^1 \mathrm{d}x\frac{(x^3-3x^2+2x)m^2}{(1-x)^2m^2+x\mu^2}\simeq -4\int_0^1\left(x-1+\frac{(-x+1)m^2}{(1-x)^2m^2+x\mu^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2-4\int_0^1\frac{tm^2}{t^2m^2+(1-t)\mu^2}\mathrm{d}t\simeq 2-2\Big[\ \log(t^2m^2+(1-t)\mu^2)\Big]_0^1$$

$$=2-2\log\frac{m^2}{\mu^2}, \tag{19}$$

矢印以後 2 行目では $\mu\to 0$ として概算のための計算をしている．よって，δ_2 に関する積分は (18) と (19) を加えたもので

$$\int_0^1\mathrm{d}x\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\left[(2-\epsilon)x-\frac{\epsilon}{2}\frac{2x(1-x)m^2}{\Delta}(4-2x-\epsilon(1-x))\right]$$

$$\xrightarrow[\epsilon\to 0]{}\frac{2}{\epsilon}-\gamma-\log m^2-2\log\frac{m^2}{\mu^2}+4, \tag{20}$$

となることを先ず示した．

次は δ_1 の積分を実行する．δ_2 同様，(10.46) 式の積分記号以下を計算しそれが (20) となれば，両者の一致が示せる．以下 $\Delta(z)=(1-z)^2m^2+z\mu^2$ とする．こうして δ_1 に関して

$$\int \mathrm{d}z(1-z)\left[\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\frac{(2-\epsilon)^2}{2}+\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-d/2}}(m^2[2(1-4z+z^2)-\epsilon(1-z)^2])\right], \tag{21}$$

となり，これを

$$\int\mathrm{d}z(1-z)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\frac{(2-\epsilon)^2}{2}=\int\mathrm{d}z(1-z)\frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Delta^{\epsilon/2}}\frac{(2-\epsilon)^2}{2}, \tag{22}$$

$$\int\mathrm{d}z(1-z)\frac{\Gamma(1+\frac{\epsilon}{2})}{\Delta^{1+\epsilon/2}}(m^2[2(1-4z+z^2)-\epsilon(1-z)^2]), \tag{23}$$

と 2 つに分ける．先ず．(22) の被積分関数を変形しておく．ここでも既に行った (7.84) を利用し

$$\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\frac{(2-\epsilon)^2}{2}=\left(\frac{2}{\epsilon}-\log\Delta(z)-\gamma\right)\frac{(2-\epsilon)^2}{2}$$

$$=\left(\frac{2}{\epsilon}-\log\Delta(z)-\gamma\right)\left(2-2\epsilon+\frac{\epsilon^2}{2}\right)$$

$$\simeq 2\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma-2\right)-2\log\Delta(z)$$

これを (22) に代入して積分を行うと

$$\int_0^1 2\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma-2\right)(1-z)\mathrm{d}z=\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma-2\right)2\left[z-\frac{z^2}{2}\right]_0^1=\left(\frac{2}{\epsilon}-\gamma-2\right),$$

$$-2\int_0^1(1-z)\log\{(1-z)^2m^2+z\mu^2\}\mathrm{d}z=-2\int_0^1 t\log\{t^2m^2+(1-t)\mu^2\}\mathrm{d}t$$

$$=-\Big[\,t^2\log\{t^2m^2+(1-t)\mu^2\}\Big]_0^1+\int_0^1 t^2\frac{2tm^2}{t^2m^2+(1-t)\mu^2}\mathrm{d}t$$

$$\simeq-\log m^2+\int_0^1\frac{2t^3m^2}{t^2m^2}\mathrm{d}t=-\log m^2+1$$

以上の結果を集めると

$$\int\mathrm{d}z(1-z)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\frac{(2-\epsilon)^2}{2}\simeq\frac{2}{\epsilon}-\gamma-\log m^2-1, \tag{24}$$

が得られる．次に (23) 式の積分は $\epsilon\to 0$ で

$$\int_0^1 2(1-z)\frac{(1-4z+z^2)m^2}{(1-z)^2m^2+z\mu^2}\mathrm{d}z=2\int_0^1 t\frac{t^2+2t-2}{t^2m^2+(1-t)\mu^2}\mathrm{d}t$$

$$\simeq 2\int_0^1\left(t+2-\frac{2tm^2}{t^2m^2+(1-t)\mu^2}\right)\mathrm{d}t=5-2\Big[\,\log t^2m^2+(1-t)\mu^2\Big]_0^1$$

$$=5-2\log\frac{m^2}{\mu^2}, \tag{25}$$

ここで 2 行目の積分は ($\mu\to 0$ として) 概算をするための計算を行った．(24) と (25) とから,

$$\int\mathrm{d}z(1-z)\left[\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}}\frac{(2-\epsilon)^2}{2}+\frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-d/2}}(m^2[2(1-4z+z^2)-\epsilon(1-z)^2])\right],$$

$$\xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \frac{2}{\epsilon} - \gamma - \log m^2 - 2\log\frac{m^2}{\mu^2} + 4, \tag{26}$$

が得られる．

こうして，(20) と (26) が一致することにより，$\delta_1 = \delta_2$ が示せた．

因みに，

$$\delta_1 \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \frac{\alpha}{4\pi}\left[-\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log\frac{4\pi}{m^2}\right) + 2\log\frac{m^2}{\mu^2} - 4\right], \tag{27}$$

であり，$\epsilon \to 0$ で $-2/\epsilon$ は発散する．既に記したように $\log 4\pi$ は積分の前の因子から発生する．またカッコ内の $\log(4\pi/m^2)$ という表現は次元の観点から気になるが，ここまでとする．

////////////////// $\delta_1 = \delta_2$ の確認おわり /////////////////////