# 読書メモ：川村嘉春著
# 相対論的量子力学

2015 年 5 月 14 日

備忘録として，途中計算式を書きとめた．もちろん，テキスト内に詳細な計算がある場合にはあらためて記録することは行わない．

# 第 11 章　クーロン散乱

## 11.2 クーロンポテンシャルによる電子の散乱

### 11.2.1 クーロン散乱の S 行列要素

散乱行列である $S$ 行列要素は (9.26) より

$$S_{fi} = \mathrm{i}e \int \mathrm{d}^4x \overline{\psi}_f(x)\gamma_\mu A^\mu(x)\Psi_i(x), \tag{11.3}$$

で与えられる．ここは，後のためにも (11.2) 式のままの $A_\mu$ の形をとった方が良い．つまり

$$S_{fi} = \mathrm{i}e \int \mathrm{d}^4x \overline{\psi}_f(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\Psi_i(x) \tag{11.3'}$$

//////////////////////////////////////////////////////////////////////

$$S_{fi} = \mathrm{i}k_0 Ze^2 \frac{1}{V}\frac{m_e}{\sqrt{E_iE_f}}\overline{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)\int \mathrm{d}^4x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_f-p_i)x}}{|\boldsymbol{x}|}$$

$$= \mathrm{i}k_0 Ze^2 \frac{1}{V}\frac{m_e}{\sqrt{E_iE_f}}4\pi\frac{\overline{u}(p_f,s_f)\gamma^0 u(p_i,s_i)}{|\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i|^2}2\pi\delta(E_f-E_i), \tag{11.6}$$

となる．ここで散乱振幅の中央に現れる $\gamma$ が $\gamma^\mu$ では無く $\gamma^0$ であることに注意すべきである．これは静止した原子核による散乱 (11.2) による．ただし，$\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x$ である．また時間および空間に関する積分を以下の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_f-E_i)t} = 2\pi\delta(E_f-E_i), \tag{11.7}$$

と

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 x \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)\cdot\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|/a}}{|\boldsymbol{x}|} = \frac{4\pi}{|\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i|^2+1/a^2}, \tag{11.8}$$

を用いて実行した．

//////////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////

**(11.8) 式の導出**

(11.8) の積分を $I$ と置く．$\mathrm{d}^3x = 2\pi r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r$ である．ここで $|\boldsymbol{x}| = r$ であり，また $|\boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i| = q$ とするならば，被積分関数は：

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr\cos\theta - r/a}}{r} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu}r}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr\cos\theta}$$

である．$\mu = 1/a$ とした．まず $\theta$ についての積分を実行する．積分変数を $-\cos\theta = t$ とすると

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}qrt}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}qrt}}{\mathrm{i}qr}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\mathrm{i}qr}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr}\right)$$

となる．全体の積分で分母の $r^2$ は分子のそれとキャンセルする．よって残った積分は

$$I = \frac{2\pi}{\mathrm{i}q}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mu r}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr}\right)\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{\mathrm{i}q}\int_0^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-(\mu-\mathrm{i}q)r} - \mathrm{e}^{-(\mu+\mathrm{i}q)r}\right]\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2\pi}{\mathrm{i}q}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(\mu-\mathrm{i}q)r}}{-(\mu-\mathrm{i}q)} - \frac{\mathrm{e}^{-(\mu+\mathrm{i}q)r}}{-(\mu+\mathrm{i}q)}\right]_0^{\infty} = \frac{2\pi}{\mathrm{i}q}\left[\frac{1}{(\mu-\mathrm{i}q)} - \frac{1}{(\mu+\mathrm{i}q)}\right] = \frac{4\pi}{\mu^2+q^2}$$

．ここで $a$ は遮蔽距離で，クーロンポテンシャルの場合 $a \to +\infty$ とする．

//////////////////////////////終り//////////////////////////////////////////

### 11.2.2 散乱断面積

相対論的運動学により

$$\frac{1}{E_i|\boldsymbol{v}_i|}\frac{|\boldsymbol{p}_f|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_f|}{E_f}\delta(E_f - E_i) \to 1 \tag{11.13}$$

が導かれる．具体的にはエネルギー $E_f^2 = \boldsymbol{p}^2 + m_e^2$ より $E_f\mathrm{d}E_f = |\boldsymbol{p}_f|\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_f|$, また $E_i = E_f$，$|\boldsymbol{p}_i| = |\boldsymbol{p}_f|$ となる．$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/E$ であるから，$|\boldsymbol{v}_i| = |\boldsymbol{v}_f|$ でもある．こうして $E_f$ に関して積分することで (11.13) 式が得られる．

//////////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////

簡単な計算であるが記しておく．まず $E_f\mathrm{d}E_f = |\boldsymbol{p}_f|\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_f|$ を使う

$$\frac{1}{E_i|\boldsymbol{v}_i|}\frac{|\boldsymbol{p}_f|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_f|}{E_f}\delta(E_f - E_i) = \frac{1}{E_i|\boldsymbol{v}_i|}|\boldsymbol{p}_f|\frac{|\boldsymbol{p}_f|\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_f|}{E_f}\delta(E_f - E_i)$$

$$= \frac{1}{E_i|\boldsymbol{v}_i|}|\boldsymbol{p}_f|\mathrm{d}E_f\delta(E_f - E_i) = \delta(E_f - E_i)\mathrm{d}E_f$$

最後に，$E_i = |\boldsymbol{p}_i|/|\boldsymbol{v}_i| = |\boldsymbol{p}_f|/|\boldsymbol{v}_i| \therefore |\boldsymbol{p}_f| = E_i|\boldsymbol{v}_i|$ を使った．よって

$$\int \delta(E_f - E_i)\mathrm{d}E_f = 1$$

となる．

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

### 11.2.3 モットの断面積

$$\sum_{\alpha,\delta}\left(\gamma^0\frac{\not{p}_i + m_e}{2m_e}\gamma^0\right)_{\alpha\delta}\left(\frac{\not{p}_f + m_e}{2m_e}\right)_{\delta\alpha} = \mathrm{Tr}\left(\gamma^0\frac{\not{p}_i + m_e}{2m_e}\gamma^0\frac{\not{p}_f + m_e}{2m_e}\right) \tag{11.19}$$

次に (11.19) 式のトレースに関する部分は $\gamma$ に関する公式群を使って

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^0\frac{\not{p}_i + m_e}{2m_e}\gamma^0\frac{\not{p}_f + m_e}{2m_e}\right) = \frac{1}{4m_e^2}\left[\mathrm{Tr}(\gamma^0\not{p}_i\gamma^0\not{p}_f) + m_e^2\mathrm{Tr}(\gamma^0)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4m_e^2}\left(8E_iE_f - 4(p_i \cdot p_f) + \ 4m_e^2\right) \tag{11.23}$$

を得る．

////////////////////////////始まり////////////////////////////////////////

**(11.19) 式のトレース計算**

$\mathrm{Tr}(\gamma^0\not{p}_i\gamma^0\not{p}_f)$ の計算を行う．テキストとは異なり内積の表記として $(p_i \cdot p_f)$ を使った．ここでは公式を利用するため単独で現れる 2 つの $\gamma^0$ を 4 元ベクトル $a = b = (1, 0, 0, 0)$ に対する $\not{a}, \not{b}$ という量で置き換える．よって，

$$\mathrm{Tr}(\gamma^0\not{p}_i\gamma^0\not{p}_f) = \mathrm{Tr}(\not{a}\not{p}_i\not{b}\not{p}_f) = 4[(a \cdot p_i)(b \cdot p_f) + (a \cdot p_f)(p_i \cdot b) - (a \cdot b)(p_i \cdot p_f)]$$

$$= 4[E_iE_f + E_fE_i - (p_i \cdot p_f)] = 4[2E_iE_f - (p_i \cdot p_f)]$$

を得る．

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

## 11.3 クーロンポテンシャルによる陽電子の散乱

公式

$$\sum_{\pm s} v_\beta(p, s)\overline{v}_\gamma(p, s) = -\left(\frac{-\not{p} + m_e}{2m_e}\right)_{\beta\gamma} \tag{11.34}$$

////////////////////////////始まり////////////////////////////////////////
**(11.34) 式の導出**
この公式の導出をエイチスンの方法で実行する．ただし，表記の簡単化のため $m_e = m$ として記す．スピン和は $i = 1, 2$ とする．

$$v(i) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^i \\ \chi^i \end{pmatrix}, \quad \overline{v}(i) = v^\dagger(i)\gamma^0 = \sqrt{E+m}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^{i\mathrm{T}}, -\chi^{i\mathrm{T}}\right)$$

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \sum_i \chi^i\chi^{i\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{I}$$

である．よって

$$\sum_i v(i)\overline{v}(i) = \sum_i (E+m)\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^i \\ \chi^i \end{pmatrix}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^{i\mathrm{T}}, -\chi^{i\mathrm{T}}\right)$$

$$= \sum_i (E+m)\begin{pmatrix} \dfrac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2}{(E+m)^2}\chi^i\chi^{i\mathrm{T}} & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^i\chi^{i\mathrm{T}} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi^i\chi^{i\mathrm{T}} & -\chi^i\chi^{i\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E-m)\mathbf{I} & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -(E+m)\mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{1}$$

上の行列の 1 行 1 列要素は

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2}{(E+m)^2} = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{(E+m)^2} = \frac{E^2-m^2}{(E+m)^2} = \frac{E-m}{E+m}$$

として導かれた．一方 $\not{p} - m$ を行列表現すると

$$\not{p} - m = \gamma^\mu p_\mu - m\mathbf{I} = \gamma^0 E - \gamma^a p_a - m\mathbf{I}$$

$$= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0 \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

となるから，(1) と (2) は一致する．よって

$$\sum_i v(i)\overline{v}(i) = \not{p} - m$$

が示せた．ただし，エイチスンでは $v^\dagger v = 2E$ であり，本テキストは $v^\dagger v = E/m$ と規格化が異なる． □
////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

## 11.4 $\gamma$ 行列に関する公式と定理

[**公式 1**]　スピノルの双一次形式 $\overline{u}(f)\Gamma u(i)$ の絶対値の 2 乗に関して

$$|\overline{u}(f)\Gamma u(i)|^2 = [\overline{u}(f)\Gamma u(i)][\overline{u}(i)\overline{\Gamma}u(f)] \tag{11.36}$$

が成り立つ.

//////////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////

$$|\overline{u}(f)\Gamma u(i)|^2 = \overline{u}(f)\Gamma u(i)[\overline{u}(f)\Gamma u(i)]^\dagger = \overline{u}(f)\Gamma u(i)[(u^\dagger(f)\gamma^0)\Gamma u(i)]^\dagger$$

$$= \overline{u}(f)\Gamma u(i)u^\dagger(i)\Gamma^\dagger\gamma^0 u(f) = \overline{u}(f)\Gamma u(i)\underbrace{u^\dagger(i)\gamma^0}\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 u(f) = \overline{u}(f)\Gamma u(i)\overline{u}(i)\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 u(f)$$

//////////////////////////////終り//////////////////////////////////////////

ここで $\Gamma$ は 4 行 4 列の行列で $\overline{\Gamma} \equiv \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$ で定義され

$$\overline{\gamma}^\mu = \gamma^\mu, \quad \overline{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n}} = \gamma^{\mu_n}\cdots\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}, \tag{11.37}$$

が成り立つ.

//////////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////

テキストにはこれ以外の式もあるが当面後で使われるもののみを示しておく.

$\mu = 0$ の場合 :$\overline{\gamma}^\mu = \gamma^0(\gamma^0)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0,$

$\mu = a = 1, 2, 3$ の場合 :$\overline{\gamma}^a = \gamma^0(\gamma^a)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0(-\gamma^a)\gamma^0 = \gamma^0(\gamma^0\gamma^a) = \gamma^a$

となるので証明できた．これを使うと

$$\overline{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n}} = \gamma^0(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n})^\dagger\gamma^0 = \gamma^0(\gamma^{\mu_n\dagger})\cdots(\gamma^{\mu_2\dagger})(\gamma^{\mu_1\dagger})$$

$$= \gamma^0(\gamma^{\mu_n\dagger})\gamma^0\gamma^0\cdots\gamma^0\gamma^0(\gamma^{\mu_2\dagger})\gamma^0\gamma^0(\gamma^{\mu_1\dagger}) = \gamma^{\mu_n}\cdots\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}$$

次に $\overline{\not{p}} = \not{p}$ を示しておく.

$$\overline{\not{p}} = \overline{\gamma^\mu p_\mu} = \overline{\gamma^0 p_0 + \gamma^a p_a} = \gamma^0[(\gamma^0)^\dagger p_0 + (\gamma^a)^\dagger p_a]\gamma^0 = \gamma^0[\gamma^0 p_0 - \gamma^a p_a]\gamma^0$$

$$= \gamma^0[\gamma^0\gamma^0 p_0 - \gamma^a\gamma^0 p_a] = \gamma^0 p_0 - \gamma^0(-\gamma^0\gamma^a)p_a = \gamma^0 p_0 + \gamma^a p_a = \not{p}$$

が成立するので，一般に $\Gamma = \not{p}\not{q}\cdots\not{u}$ の場合

$$\overline{\Gamma} = \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 = \gamma^0(\not{p}\not{q}\cdots\not{u})^\dagger\gamma^0 = \gamma^0(\not{u}^\dagger\cdots\not{q}^\dagger\not{p}^\dagger)\gamma^0 = \gamma^0\not{u}^\dagger\gamma^0\gamma^0\cdots\gamma^0\gamma^0\not{q}^\dagger\gamma^0\gamma^0\not{p}^\dagger\gamma^0$$

$$= \overline{\not{u}}\cdots\overline{\not{q}}\cdot\overline{\not{p}} = \not{u}\cdots\not{q}\not{p}$$

となる．すなわち**補助公式**

$$\Gamma = \not{p}\not{q}\cdots\not{u}\ \text{のとき} \qquad \overline{\Gamma} = \not{u}\cdots\not{q}\not{p}$$

が得られた．この公式は後にクラインー仁科の公式の計算で使う.

//////////////////////////////終り//////////////////////////////////////////

# 第12章　コンプトン散乱

## 12.1 コンプトン散乱

### 12.1.1 コンプトン散乱のS行列要素

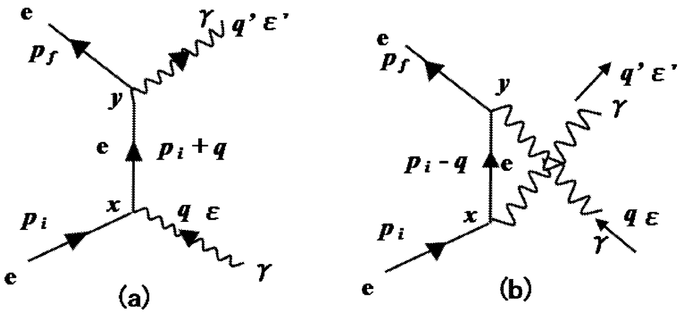


図 1: コンプトン散乱のファインマンダイアグラム

$$
\begin{aligned}
S_{fi} = &-\mathrm{i}e^2 \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y \frac{m_e}{V^2} \frac{1}{\sqrt{E_f E_i}} \frac{1}{2\sqrt{q'^0 2q^0}} \\
&\times \overline{u}(p_f, s_f) \not{\varepsilon}' \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m_e} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(y-x)} \not{\varepsilon} u(p_i, s_i) \\
&\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_f y} \left( \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q'y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}q'y} \right) \left( \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x} \\
&-\mathrm{i}e^2 \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y \frac{m_e}{V^2} \frac{1}{\sqrt{E_f E_i}} \frac{1}{2\sqrt{q'^0 2q^0}} \\
&\times \overline{u}(p_f, s_f) \not{\varepsilon} \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m_e} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(y-x)} \not{\varepsilon}' u(p_i, s_i) \\
&\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_f y} \left( \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qy} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}qy} \right) \left( \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q'x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}q'x} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x}
\end{aligned} \tag{12.8}
$$

となる．なお，((10.39) の伝播関数の中の)i$\varepsilon$ を省略した．

4 元運動量保存則 $p_f + q' = p_i + q$ を考慮して (図 1(b) の場合には，$(p_i - q') + q = p_f$ と考えれば理解しやすい．)，$x, y, p$ についての積分を実行する．

/////////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////

**(12.8) 式の積分**

この計算は簡単だが面倒である．(12.8) 式右辺の第 1 積分の被積分関数で

$$
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(y-x)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_f y} \left( \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q'y} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}q'y} \right) \left( \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x}
$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(y-x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_f y}\left[\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-q'y-qx)}}_{(1)}+\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q'y-qx)}}_{(2)}+\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-q'y+qx)}}_{(3)}+\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q'y+qx)}}_{(4)}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x}$$

と 4 つの積分が発生する．この指数部だけを取り出して記すと i は外して記す：

$$(1)\ \ (-p+p_f-q')y+(p-q-p_i)x \quad (2)\ \ (-p+p_f+q')y+(p-q-p_i)x,$$

$$(3)\ \ (-p+p_f-q')y+(p+q-p_i)x \quad (4)\ \ (-p+p_f+q')y+(p+q-p_i)x,$$

次の公式を使う事を念頭に置く．

$$\int_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-\hat{q})x}\mathrm{d}x = 2\pi\delta(q-\hat{q})$$

これらの中から運動量保存則を満たす場合を探す.

$$\begin{array}{ll}
(1)\ \ p=p_f-q',\ \ p=q-p_i \to p_f-q'=q-p_i & \to \times \\
(2)\ \ p=p_f+q',\ \ p=q+p_i \to p_f+q'=q+p_i & \to \bigcirc \\
(3)\ \ p=p_f-q',\ \ p=p_i-q \to p_f-q'=p_i-q & \to \times \\
(4)\ \ p=p_f+q',\ \ p=p_i-q \to p_f+q'=p_i-q & \to \times
\end{array}$$

よってファインマンダイアグラム (a) の場合 (2) に対して $\mathrm{d}^4x, \mathrm{d}^4y$ の積分を実行し，またファインマンダイアグラム (b) に対しても同様に行うと (12.9) 式を得る．なお，中間状態に対しては (a) では $\not{p}=\not{p}_i+\not{q}$ とし (b) では $\not{p}=\not{p}_i+\not{q}'$ としている．これらは図 1 から明らかである．

$$S_{fi}=\frac{m_e}{V^2}\frac{1}{\sqrt{E_fE_i}}\frac{1}{2\sqrt{q'^0 2q^0}}(2\pi)^4\delta^4(p_f+q'-p_i-q)$$

$$\times\overline{u}(p_f,s_f)\left[(-\mathrm{i}\not{\epsilon}')\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_i+\not{q}-m_e}(-\mathrm{i}\not{\epsilon})+(-\mathrm{i}\not{\epsilon})\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_i-\not{q}'-m_e}(-\mathrm{i}\not{\epsilon}')\right]u(p_i,s_i) \tag{12.9}$$

となる．

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

**コンプトン散乱の S 行列要素の対称性**

$$S_{fi}=\frac{m_e}{V^2}\frac{1}{\sqrt{E_fE_i}}\frac{1}{2\sqrt{q'^0 2q^0}}(2\pi)^4\delta^4(p_f+q'-p_i-q)$$

$$\times\overline{u}(p_f,s_f)\left[(-\mathrm{i}\not{\epsilon}')\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_i+\not{q}-m_e}(-\mathrm{i}\not{\epsilon})+(-\mathrm{i}\not{\epsilon})\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_i-\not{q}'-m_e}(-\mathrm{i}\not{\epsilon}')\right]u(p_i,s_i) \tag{12.9}$$

となる．(12.9) 式の形からコンプトン散乱の S 行列要素は次のような対称性を持っていることがわかる．
(1) 交差対称性 : 2 つの光子の入れ替え $q^\mu, \varepsilon^\mu \longleftrightarrow -q'^\mu, \varepsilon'^\mu$ の下で $S_{fi}$ は不変である．これは，光子がボーズ・アインシュタイン統計に従うことに起因する．
(2) ゲージ対称性 : 運動量空間におけるゲージ変換 $\varepsilon_\mu \to \varepsilon_\mu + aq_\mu$，$\varepsilon'_\mu \to \varepsilon'_\mu + a'q'_\mu (a, a'$ は定数) 下で $S_{fi}$ は不変である．2 つの寄与の和によりゲージ不変になることに注意されたい．
//////////////////////////////はじまり//////////////////////////////
ゲージ対称性について : 式が長くなるので [] 内各項の両端の $-\mathrm{i}$ をすべて計算し処理すると，全体で $-\mathrm{i}$ が出る :

$$S_{fi} = -\mathrm{i}\frac{m_e}{V^2}\frac{1}{\sqrt{E_f E_i}}\frac{1}{2\sqrt{q'^0 2q^0}}(2\pi)^4\delta^4(p_f + q' - p_i - q)$$

$$\times\overline{u}(p_f, s_f)\left[\not{\varepsilon}'\frac{1}{\not{p}_i + \not{q} - m_e}\not{\varepsilon} + \not{\varepsilon}\frac{1}{\not{p}_i - \not{q}' - m_e}\not{\varepsilon}'\right]u(p_i, s_i) \tag{3}$$

この式がゲージ変換 $\varepsilon_\mu \to \varepsilon_\mu + aq_\mu$，$\varepsilon'_\mu \to \varepsilon'_\mu + a'q'_\mu (a, a'$ は定数) で不変であるとは

$$S'_{fi} = -\mathrm{i}\frac{m_e}{V^2}\frac{1}{\sqrt{E_f E_i}}\frac{1}{2\sqrt{q'^0 2q^0}}(2\pi)^4\delta^4(p_f + q' - p_i - q)$$

$$\times\overline{u}(p_f)\left[(\not{\varepsilon}' + a'\not{q}')\frac{1}{\not{p}_i + \not{q} - m_e}(\not{\varepsilon} + a\not{q}) + (\not{\varepsilon} + a\not{q})\frac{1}{\not{p}_i - \not{q}' - m_e}(\not{\varepsilon}' + a'\not{q}')\right]u(p_i) \tag{4}$$

としたとき $S_{fi} = S'_{fi}$ となることである (不変)．
そのためには上の式を全て展開した時

$$\overline{u}(p_f)\left[\not{\varepsilon}'\frac{1}{\not{p}_i + \not{q} - m_e}(a\not{q}) + (a\not{q})\frac{1}{\not{p}_i - \not{q}' - m_e}\not{\varepsilon}'\right]u(p_i) = 0, \tag{5}$$

$$\overline{u}(p_f)\left[(a'\not{q}')\frac{1}{\not{p}_i + \not{q} - m_e}\not{\varepsilon} + \not{\varepsilon}\frac{1}{\not{p}_i - \not{q}' - m_e}(a'\not{q}')\right]u(p_i) = 0, \tag{6}$$

$$\overline{u}(p_f)\left[(a'\not{q}')\frac{1}{\not{p}_i + \not{q} - m_e}(a\not{q}) + (a\not{q})\frac{1}{\not{p}_i - \not{q}' - m_e}(a'\not{q}')\right]u(p_i) = 0 \tag{7}$$

となればよい．ここでエイチスン＆ヘイの問題 6.10 を参考にする．これらの式の分母をスカラー化しておく．

$$\frac{1}{\not{p}_i + \not{q} - m_e} = \frac{\not{p}_i + \not{q} + m_e}{(p_i + q)^2 - m_e^2} = \frac{\not{p}_i + \not{q} + m_e}{2(p_i q)}$$

となる．ここで $q^2=0$ を考慮し

$$(p_i+q)^2-m_e^2=p_i^2+2(p_iq)+q^2-m_e^2=m_e^2+2(p_iq)-m_e^2=2(p_iq)$$

となることを使った．同様に

$$\frac{1}{\not p_i-\not q'-m_e}=\frac{\not p_i-\not q'+m_e}{(p_i-q')^2-m_e^2}=\frac{\not p_i-\not q'+m_e}{-2(p_iq')}$$

である．ここでも $(p_i-q')^2-m_e^2=-2(p_iq')$ を使っている．
(I)　このようにすると (5) は

$$a\overline{u}(p_f)\left[\frac{\not\epsilon'(\not p_i+\not q+m_e)\not\epsilon}{2(p_iq)}+\frac{\not\epsilon(\not p_i-\not q'+m_e)\not\epsilon'}{-2(p_iq')}\right]u(p_i)$$

と書くことができる．先ず，この式の第 1 項の分子を計算する．

$$\overline{u}(p_f)\not\epsilon'(\not p_i+\not q+m_e)\not\epsilon u(p_i)=\overline{u}(p_f)\not\epsilon'(\not p_i\not\epsilon+\not q\not\epsilon+m_e\not\epsilon)u(p_i)$$

$$=\overline{u}(p_f)\not\epsilon'\{2(p_iq)-\not\epsilon\not p_i+m_e\not\epsilon\}u(p_i)=2(p_iq)\overline{u}(p_f)\not\epsilon'u(p_i)$$

$$-\not\epsilon(\not p_i-m_e)u(p_i)=2(p_iq)\overline{u}(p_f)\not\epsilon'u(p_i) \tag{8}$$

となる．ここで $\not p_i\not\epsilon=2(p_iq)-\not\epsilon\not p_i$ と光子の質量ゼロ $\not q\not\epsilon=0$ 更に Dirac 方程式 $(\not p_i-m_e)u(p_i)=0$ を使った．これから，(5) の第 1 項は分母が消え，$\overline{u}(p_f)\not\epsilon'u(p_i)$ を得る．

次に (5) の第 2 項を同様の計算をするが，諸関係式を使うため，4 元運動量保存則 $p_f+q'=p_i+q$ より $p_i-q'=p_f-q$ であることを，第 2 項分子に代入する．よって代入後の分子は

$$\overline{u}(p_f)\not\epsilon(\not p_f-\not q+m_e)\not\epsilon'u(p_i)=\overline{u}(p_f)(\not\epsilon\not p_f-\not\epsilon\not q+m_e\not\epsilon)\not\epsilon'u(p_i)$$

$$=\overline{u}(p_f)\{2(p_fq)-\not p_f\not\epsilon+m_e\not\epsilon)\not\epsilon'u(p_i)=2(p_fq)\overline{u}(p_f)\not\epsilon'u(p_i)$$

$$-\overline{u}(p_f)(\not p_f-m_e)\not\epsilon u(p_i)=2(p_fq)\overline{u}(p_f)\not\epsilon'u(p_i) \tag{9}$$

また，4 元運動量保存則 $p_f+q'=p_i+q$ より $p_i-q'=p_f-q$ の式から

$$(p_i-q')^2=(p_f-q)^2 \quad\to\quad p_i^2-2(p_iq')+{q'}^2=p_f^2-2(p_fq)+q^2$$

よって，$(p_iq')=(p_fq)$ となるから，これと (9) を (5) の第 2 項に代入すると，第 1 項と相殺して全体としてゼロとなる．
(II)　次に (6) がゼロになることを示す．(6) を書き換えると

$$a'\overline{u}(p_f)\left[\frac{\not\epsilon'(\not p_i+\not q+m_e)\not\epsilon}{2(p_iq)}+\frac{\not\epsilon(\not p_i-\not q'+m_e)\not\epsilon'}{-2(p_iq')}\right]u(p_i)$$

となる．この式の第 1 項分子は次のように変形される．ただし前でも使用した 4 元運動量の関係式 $p_i + q = p_f + q'$ を使う．

$$\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}'(\not{p}_i + \not{q} + m_e)\not{\epsilon}u(p_i) = \overline{u}(p_f)\not{\epsilon}'(\not{p}_f + \not{q}' + m_e)\not{\epsilon}u(p_i)$$

$$= \overline{u}(p_f)(\not{\epsilon}'\not{p}_f + \not{\epsilon}'\not{q}' + m_e\not{\epsilon}')\not{\epsilon}u(p_i) = \overline{u}(p_f)\{2(p_f\epsilon') - \not{p}_f\not{\epsilon}' + m_e\not{\epsilon}'\}\not{\epsilon}u(p_i)$$

$$= 2(p_f\epsilon')\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}u(p_i) - \overline{u}(p_f)(\not{p}_f - m_e)\not{\epsilon}'\not{\epsilon}u(p_i) = 2(p_fq')\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}u(p_i)$$

ここで $(p_fq') = (p_iq)$ であるから，(6) 式第 1 項は $\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}u(p_i)$ である．

一方，(6) 式第 2 項分子は

$$\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}(\not{p}_i - \not{q}' + m_e)\not{\epsilon}'u(p_i) = \overline{u}(p_f)\not{\epsilon}(\not{p}_i\not{\epsilon}' - \not{q}'\not{\epsilon}' + m_e\not{\epsilon}')u(p_i)$$

$$= \overline{u}(p_f)\not{\epsilon}\{2(p_i\epsilon') - \not{\epsilon}'\not{p}_i + m_e\not{\epsilon}')u(p_i) = 2(p_i\epsilon')\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}u(p_i)$$

$$-\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}\not{\epsilon}'(\not{p}_i - m_e)u(p_i) = 2(p_iq')\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}u(p_i)$$

と変形されるので，(6) 式第 2 項分母分子で $2(p_iq')$ を払うことにより，$-\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}u(p_i)$ を得るので，(6) 式第 1 項と相殺し (6) 式もゼロとなる．

(III)　最後は (7) 式がゼロになることの確認である．これまで同様 (7) 式を書き換えると，

$$aa'\overline{u}(p_f)\left[\frac{\not{\epsilon}'(\not{p}_i + \not{q} + m_e)\not{q}}{2(p_iq)} + \frac{\not{q}(\not{p}_i - \not{q}' + m_e)\not{\epsilon}'}{-2(p_iq')}\right]u(p_i)$$

となるから，この第 1 項の分子を計算する．

$$\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}'(\not{p}_i + \not{q} + m_e)\not{q}u(p_i) = \overline{u}(p_f)\not{\epsilon}'(\not{p}_i\not{q} + \not{q}\not{q} + m_e\not{q})u(p_i)$$

$$= \overline{u}(p_f)\not{\epsilon}'\{2(p_iq) - \not{q}\not{p}_i + m_e\not{q}\}u(p_i) = 2(p_iq)\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}'u(p_i)$$

$$-\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}'\not{q}(\not{p}_i - m_e)u(p_i) = 2(p_iq)\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}'u(p_i)$$

が得られる．よってこれを (7) 式第 1 項の分子に代入すると $2(p_iq)$ が相殺し $+\overline{u}(p_f)\not{\epsilon}'u(p_i)$ を得る．

次に第 2 項分子を 4 元運動量保存則より $p_i - q' = p_f - q$ とした後に計算を実行すると

$$\overline{u}(p_f)\not{q}(\not{p}_i - \not{q}' + m_e)\not{\epsilon}'u(p_i) = \overline{u}(p_f)\not{q}(\not{p}_f - \not{q} + m_e)\not{\epsilon}'u(p_i)$$

$$= \overline{u}(p_f)(\not{q}\not{p}_f - \not{q}\not{q} + m_e\not{q})\not{\epsilon}'u(p_i) = \overline{u}(p_f)\{2(p_fq) - \not{p}_f\not{q} + m_e\not{q}\}\not{\epsilon}'u(p_i)$$

$$= 2(p_f q)\overline{u}(p_f)\not{q}' u(p_i) - \overline{u}(p_f)(\not{p}_f - m_e)\not{q}\not{q}' u(p_i) = 2(p_f q)\overline{u}(p_f)\not{q}' u(p_i)$$

が得られる．既に確かめたように $(p_f q) = (p_i q')$ だから，上の結果を (7) 式第 2 項の分子に代入すると分母分子の $(p_f q), (p_i q')$ が相殺した結果 $-\overline{u}(p_f)\not{q}' u(p_i)$ となるので第 1 項とキャンセルして (7) 式もゼロとなる．

こうして (5)，(6)，(7) 式は全てゼロとなることが分かったので，(4) 式は

$$S'_{fi} = -\mathrm{i}\frac{m_e}{V^2}\frac{1}{\sqrt{E_f E_i}}\frac{1}{2\sqrt{q'^0 2q^0}}(2\pi)^4\delta^4(p_f + q' - p_i - q)$$

$$\times\overline{u}(p_f)\left[\not{\epsilon}'\frac{1}{\not{p}_i + \not{q} - m_e}\not{\epsilon} + \not{\epsilon}\frac{1}{\not{p}_i - \not{q}' - m_e}\not{\epsilon}'\right]u(p_i) = S_{fi} \tag{10}$$

となり，コンプトン散乱の振幅がゲージ不変であることが示せた．

//////////////////////////終り//////////////////////////////

### 12.1.2 コンプトン散乱の微分断面積

実験室系 (固定標的系) において，始状態で電子は固定されているので，$E_i = m_e$ が成り立つ．入射粒子は光子であるから $|\boldsymbol{v}_i| = 1(= c)$ となる．

また

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^3 p_f}{2E_f} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3 p_f\int_0^{\infty}\mathrm{d}p_{f0}\delta(p_f^2 - m_e^2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4 p_f\delta(p_f^2 - m_e^2)\theta(p_{f0}),\quad (\theta(p_{f0}): \text{階段関数}) \tag{12.13}$$

を用いる．

/////////////////////////////始まり/////////////////////////////////////////

**(12.13) の導出**

以下 $\hbar, c$ を入れた形で記す．

$$\frac{c}{2E_f} = \int_0^{\infty}\mathrm{d}p_{f0}\delta(p_f^2 - m^2c^2)$$

を導かなければならない．既に運動量部分の 3 次元積分があるので，$\mathrm{d}p_{f0}$ はエネルギー部に対する積分となる．よって $p_{f0}$ を $p_f$ の第ゼロ成分つまりエネルギーに対応する部分，$(p^0)_f$ とすると

$$p_f^2 = (p_f^0)^2 - \boldsymbol{p}_f^2 = \left(\frac{E_f}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}_f^2 = m^2c^2 \quad \therefore\ p_f^0 = \frac{E_f}{c} = +\sqrt{\boldsymbol{p}_f^2 + m^2c^2}$$

であり，

$$\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p_f^0}\right]_{p_f^0} = 2(p_f^0),\quad \int_0^{\infty}\mathrm{d}p_f^0\delta(p_f^2 - m^2c^2) = \int_0^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p_f^0}\right]_{p_f^0}^{-1}\delta(p_f - mc)\mathrm{d}p_f^0 = \frac{c}{2E_f}$$

更に，階段関数を使い $p_f^0 < 0$ で $\theta(p_f^0) = 0$，$p_f^0 \geq 0$ で $\theta(p_f^0) = 1$ とすることで積分領域を $[-\infty, +\infty]$ へ拡張する：

$$\int_0^\infty \mathrm{d}p_f^0 \delta(p_f^2 - m^2c^2) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}p_f^0 \delta(p_f^2 - m^2c^2)\theta(p_f^0)$$

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

この (12.13) 式を用いて $q'$ に関する立体角微小素片 $\mathrm{d}\Omega_{q'}$ を除く運動量についての積分を実行すると////////////////////////////始まり////////////////////////////////////////
**(12.14) 式まで計算詳細**

$$\mathrm{d}\Omega_{q'} \int_0^\infty \frac{|\boldsymbol{q}'|^2 \mathrm{d}|\boldsymbol{q}'|}{2q'^0} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}^3 p_f}{2E_f} \delta^4(p_f + q' - p_i - q)$$

$$= \mathrm{d}\Omega_{q'} \int_0^\infty \frac{|\boldsymbol{q}'| \mathrm{d}|\boldsymbol{q}'|}{2} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}^4 p_f \delta(p_f^2 - m_e^2)\theta(p_f^0)\delta^4(p_f + q' - p_i - q)$$

とする．ここで光子の方程式 $(q^0)^2 - \boldsymbol{q}^2 = 0, \rightarrow q^{0'} = |\boldsymbol{q}|'$ を使って，分母の $q'^0$ をキャンセルした．更に続けて

$$= \mathrm{d}\Omega_{q'} \int_0^\infty \frac{|\boldsymbol{q}'| \mathrm{d}|\boldsymbol{q}'|}{2} \delta((q + p_i - q')^2 - m_e^2)\theta(|\boldsymbol{q}| - m_e - |\boldsymbol{q}'|)$$

を得る．$\delta^4(p_f + q' - p_i - q)$ より $p_f = q + p_i - q'$ となる．$(E_i, \boldsymbol{0}), (q^0, \boldsymbol{q}), (p_f^0, \boldsymbol{p}), (q'^0, \boldsymbol{q}')$ であるから階段関数 $\theta(p_f^0)$ に関してはエネルギーの計算となる

$$E_i + q^0 = p_f^0 + q'^0 \quad \rightarrow \quad p_f^0 = E_i + |\boldsymbol{q}| - |\boldsymbol{q}'| = m_e + |\boldsymbol{q}| - |\boldsymbol{q}'|$$

また，$p_f^0 > 0$ となるのは $m_e + |\boldsymbol{q}| - |\boldsymbol{q}'| > 0$ であるから $|\boldsymbol{q}'| < m_e + |\boldsymbol{q}|$ となる．これが $|\boldsymbol{q}'|$ の積分領域となり $[0, m_e + |\boldsymbol{q}|]$．次に

$$= \mathrm{d}\Omega_{q'} \int_0^{|\boldsymbol{q}| + m_e} \frac{|\boldsymbol{q}'| \mathrm{d}|\boldsymbol{q}'|}{2} \delta(2m_e(|\boldsymbol{q}| - |\boldsymbol{q}'|) - 2|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{q}'|(1 - \cos\theta)]$$

となる．$\delta$ 関数内の計算は $q^2 = (q')^2 = 0, p_i^2 = m_e^2$ などを考慮して

$$(q + p_i - q')^2 - m_e^2 = q^2 + (p_i)^2 + (q')^2 + 2(q \cdot p_i) - 2(p_i \cdot q') - 2(q \cdot q') - m_e^2$$

$$= 2q^0 m_e - 2m_e q'^0 - 2(q^0 q'^0 - \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}') = 2m_e(|\boldsymbol{q}| - |\boldsymbol{q}'|) - 2|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{q}'|(1 - \cos\theta)$$

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

最後の $\delta$ 関数を処理すると

$$= \frac{|\boldsymbol{q}'|^2}{4m_e|\boldsymbol{q}|} \mathrm{d}\Omega_{q'} \tag{12.14}$$

となる．

### 12.1.3 クライン－仁科の公式

ここで $u(p_i, s_i)$ がディラック方程式の解であること

$$\left.\begin{aligned} &(\not{p}_i + m_e)\not{\varepsilon} u(p_i, s_i) = \not{\varepsilon}(-\not{p}_i + m_e)u(p_i, s_i) = 0, \\ &(\not{p}_i + m_e)\not{\varepsilon}' u(p_i, s_i) = \not{\varepsilon}'(-\not{p}_i + m_e)u(p_i, s_i) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{12.20}$$

が成立する．

////////////////////////////始まり////////////////////////////////////////

ここでは $\gamma$ 行列の性質より $\not{p}_i\not{\varepsilon} = -\not{\varepsilon}\not{p}_i + 2(p_i\varepsilon) = -\not{\varepsilon}\not{p}_i$ を使う．また設定より $(p_i\varepsilon) = 0$ を用いる．

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

(12.20) と，4 元運動量の関係式 $p_i^2 = E_i^2 - \boldsymbol{p}_i^2 = m_e^2$，$q^2 = {q'}^2 = 0$ を用いると

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega_{q'}} = \frac{1}{2}\sum_{\pm s_i, \pm s_j} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega_{q'}}$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{|\boldsymbol{q}'|}{|\boldsymbol{q}|}\right)^2 \mathrm{Tr}\left[\frac{\not{p}_f + m_e}{2m_e}\left(\frac{\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}}{2qp_i} + \frac{\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{q}'}{2q'p_i}\right)\frac{\not{p}_i + m_e}{2m_e}\left(\frac{\not{q}\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'}{2qp_i} + \frac{\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}}{2q'p_i}\right)\right] \tag{12.21}$$

となる．

////////////////////////////始まり////////////////////////////////////////

この式の導出を行う際に，公式 $[\overline{u}(p_f, s_f)\Gamma u(p_i, s_i)]^\dagger = \overline{u}(p_i, s_i)\overline{\Gamma}u(p_f, s_f)$，$\overline{\Gamma} \equiv \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$ を使う．(11.37) 式の補助公式

$$\Gamma = \not{p}\not{q}\cdots\not{u} \text{ のとき} \qquad \overline{\Gamma} = \not{u}\cdots\not{q}\not{p}$$

も使う．

$$|M_{fi}|^2 = \sum_{\pm s_i, \pm s_j}\left[\overline{u}(p_f, s_f)\left(\frac{\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}}{2qp_i} + \frac{\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{q}'}{2q'p_i}\right)u(p_i, s_i)\right]^\dagger \overline{u}(p_f, s_f)\left(\frac{\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}}{2qp_i} + \frac{\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{q}'}{2q'p_i}\right)u(p_i, s_i)$$

$$= \sum_{\pm s_i, \pm s_j}\overline{u}(p_f, s_f)\left(\frac{\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}}{2qp_i} + \frac{\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{q}'}{2q'p_i}\right)u(p_i, s_i)\overline{u}(p_i, s_i)\overline{\left(\frac{\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}}{2qp_i} + \frac{\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{q}'}{2q'p_i}\right)}u(p_f, s_f)$$

$$= \sum_{\pm s_j}\overline{u}(p_f, s_f)\left(\frac{\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}}{2qp_i} + \frac{\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{q}'}{2q'p_i}\right)\frac{\not{p}_i + m_e}{2m_e}\left(\frac{\not{q}\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}}{2qp_i} + \frac{\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}'}{2q'p_i}\right)u(p_f, s_f)$$

$$= \sum_{\pm s_j} u(p_f, s_f)\overline{u}(p_f, s_f) \left( \frac{\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{q}}{2qp_i} + \frac{\not{\epsilon}\not{\epsilon}'\not{q}'}{2q'p_i} \right) \frac{\not{p}_i + m_e}{2m_e} \left( \frac{\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}}{2qp_i} + \frac{\not{q}'\not{\epsilon}'\not{\epsilon}'}{2q'p_i} \right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left[ \frac{\not{p}_f + m_e}{2m_e} \left( \frac{\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{q}}{2qp_i} + \frac{\not{\epsilon}\not{\epsilon}'\not{q}'}{2q'p_i} \right) \frac{\not{p}_i + m_e}{2m_e} \left( \frac{\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}}{2qp_i} + \frac{\not{q}'\not{\epsilon}'\not{\epsilon}'}{2q'p_i} \right) \right]$$

がまず得られる．この後の Tr 計算は本文中に記されている． □

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

**【(12.21) 式から (12.22) の導出】**(12.21) の Tr 部分を

$$\mathrm{Tr}\left[ \frac{\not{p}_f + m_e}{2m_e} \left( \frac{\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{q}}{2qp_i} + \frac{\not{\epsilon}\not{\epsilon}'\not{q}'}{2q'p_i} \right) \frac{\not{p}_i + m_e}{2m_e} \left( \frac{\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}'}{2qp_i} + \frac{\not{q}'\not{\epsilon}'\not{\epsilon}}{2q'p_i} \right) \right] = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \tag{12.23}$$

と置く．すなわち

$$\mathrm{Tr}[A(B+C)D(E+F)] = \mathrm{Tr}[(AB+AC)(DE+DF)]$$

$$= \mathrm{Tr}(ABDE + ACDF + ABDF + ACDE) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

と $T_i$ を定義した．

$T_1$ を計算すると (先ず，$\not{q}$ が奇数個含まれる項はゼロとなることを使用し)，

$$\underbrace{\mathrm{Tr}\left[ (\not{p}_f + m_e)\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{q}(\not{p}_i + m_e)\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}' \right]}_{\text{第 1 辺}} = \underbrace{\mathrm{Tr}\left[ \not{p}_f\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{q}\not{p}_i\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}' \right] + m_e^2\mathrm{Tr}\left[ \not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{q}\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}' \right]}_{\text{第 2 辺}}$$

である．

////////////////////////////始まり////////////////////////////////////////

計算の指針の一つは，未知の終状態の量 $\boldsymbol{p_f}$ を消去することのようである．まず第 2 辺での質量部分は

$$m_e^2\mathrm{Tr}\left[ \not{\epsilon}'\not{\epsilon}(\not{q}\not{q})\not{\epsilon}\not{\epsilon}' \right] = 0 \quad \text{何故なら} \quad \not{q}\not{q} = qq = q^2 = 0$$

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

$$= \underbrace{2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[ \not{p}_f\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}' \right] - \mathrm{Tr}\left[ \not{p}_f\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{p}_i\not{q}\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}' \right]}_{\text{第 3 辺}} = \underbrace{-2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[ \not{p}_f\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{\epsilon}\not{q}\not{\epsilon}' \right]}_{\text{第 4 辺}}$$

となる．

////////////////////////////始まり////////////////////////////////////////

第 2 辺第 1 項は

$$\mathrm{Tr}\left[ \not{p}_f\not{\epsilon}'\not{\epsilon}(\not{q}\not{p}_i)\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}' \right] = \mathrm{Tr}\left[ \not{p}_f\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\{2(qp_i) - \not{p}_i\not{q}\}\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}' \right] = 2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[ \not{p}_f\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}' \right] - \mathrm{Tr}\left[ \not{p}_f\not{\epsilon}'\not{\epsilon}\not{p}_i\not{q}\not{q}\not{\epsilon}\not{\epsilon}' \right]$$

$$= 2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\right] - \mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{p}_i(\not{q}\not{q})\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\right] = 2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\right]$$

となる．次に第 3 辺第 1 項から第 4 辺には公式 $\not{a}\not{b} = 2(ab) - \not{b}\not{a}$ と $(q\varepsilon) = 0$ を使う．

$$2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}(\not{q}\not{\varepsilon})\not{\varepsilon}'\right] = 2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\{2(q\varepsilon) - \not{\varepsilon}\not{q}\}\not{\varepsilon}'\right] = -2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}\not{q}\not{\varepsilon}'\right]$$

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

こうして

$$= \underbrace{2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\not{q}\not{\varepsilon}'\right]}_{\text{第 5 辺}} = \underbrace{2(qp_i)2(q\varepsilon')\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\right] - 2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}'\not{q}\right]}_{\text{第 6 辺}}$$

が得られる．

////////////////////////////始まり////////////////////////////////////////

第 4 辺から第 5 辺では

$$-2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'(\not{\varepsilon}\not{\varepsilon})\not{q}\not{\varepsilon}'\right] = 2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\not{q}\not{\varepsilon}'\right] \quad \text{何故なら} \quad \not{\varepsilon}\not{\varepsilon} = -1$$

同様に $\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}' = -1$ でもある．なお，ノルムが負である理由は計量テンソルが $g_{aa} = -1$ であるから．次に第 5 辺から第 6 辺では $\not{q}\not{\varepsilon}'$ に対して先の公式を再度使用して

$$2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\not{q}\not{\varepsilon}'\right] = 2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'(2(q\varepsilon') - \not{\varepsilon}'\not{q}\right]$$

として第 6 辺が得られる．

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

$$= \underbrace{8(qp_i)[(qp_f) + 2(q\varepsilon')(p_f\varepsilon')]}_{\text{第 7 辺}} = 8(qp_i)[(q'p_i) + 2(q\varepsilon')^2] \qquad (12.28)$$

のように変形される．

////////////////////////////始まり////////////////////////////////////////

第 6 辺では $\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}' = -1$ を使う：

$$2(qp_i)2(q\varepsilon')\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{\varepsilon}'\right] + 2(qp_i)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_f\not{q}\right] = 2(qp_i)2(q\varepsilon')4(p_f\varepsilon') + 2(qp_i)4(p_fq)$$

となり第 7 辺が得られる．$p_f$ を消去するために，$qp_f = q'p_i$ を使う．これは運動量保存則 $p_i + q = p_f + q'$ より

$$(p_i - q')^2 = (p_f - q)^2 \longrightarrow p_i^2 - 2(p_iq') + {q'}^2 = p_f^2 - 2(p_fq) + q^2 \longrightarrow (p_iq') = (p_fq)$$

また，$p_i + q = p_f + q'$ に $\varepsilon'$ をかけることで $p_f\varepsilon' = q\varepsilon'$ も得られる．これらを 第 7 辺に代入すると最終式が得られる．

/////////////////////////////終り/////////////////////////////////////////

/////////////////////////////始まり/////////////////////////////////////////

$T_3$ のトレース部分の計算方針は次のようである．まず，$T_1$ と同じように進めると，すぐにつまづく．つまり $q'$ もしくは $q$ が必要なだけ存在しないため $q^2 q'^2 = 0$ が使えず，質量の部分がゼロとならない．したがって，この質量部分をゼロとする手段をとるようである．

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_f + m_e)\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}(\not{p}_i + m_e)\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]$$

$$= \underbrace{\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_i + \not{q} - \not{q}' + m_e)\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}(\not{p}_i + m_e)\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]}_{\text{第 2 辺}}$$

$$= \underbrace{\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_i + m_e)\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}(\not{p}_i + m_e)\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right] + \mathrm{Tr}\left[(\not{q} - \not{q}')\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}(\not{p}_i + m_e)\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]}_{\text{第 3 辺}}$$

$$= \underbrace{\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_i + m_e)\not{q}(\not{p}_i + m_e)\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right] + 2(q\varepsilon')\mathrm{Tr}\left[\not{\varepsilon}\not{q}\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right] - 2(q'\varepsilon)\mathrm{Tr}\left[\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q}\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\right]}_{\text{第 4 辺}}$$

$$= \underbrace{2(p_i q)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right] - 2(q\varepsilon')\mathrm{Tr}\left[\not{q}\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\right] + 2(q'\varepsilon)\mathrm{Tr}\left[\not{\varepsilon}\not{q}\not{p}_i\not{q}'\right]}_{\text{第 5 辺}}$$

とする．第 2 辺は未知の $p_f$ を消去するため，運動量保存則を使った．第 3 辺は 2 つに分けただけ．第 4 辺第 1 項は中央付近にある $\not{\varepsilon}'$ と $\not{\varepsilon}$ を左にずらすことを以下のように行う．$\not{q}$ より右の $\not{q}(\not{p}_i + m_e)\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}$ を略記する．また $p_i\varepsilon' = p_i\varepsilon = 0$ を使用する．

$$(\not{p}_i + m_e)\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{q} = \{2(p_i\varepsilon') - \not{\varepsilon}'\not{p}_i + m_e\not{\varepsilon}'\}\not{\varepsilon}\not{q} = \not{\varepsilon}'(-\not{p}_i + m_e)\not{\varepsilon}\not{q}$$

$$= \{-2(p_i\varepsilon) + \not{\varepsilon}\not{p}_i + m_e\not{\varepsilon}\}\not{q} = \not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}(\not{p}_i + m_e)\not{q}$$

を得る．次に Tr の性質 $\mathrm{Tr}[\not{a}\not{Q}\not{b}] = \mathrm{Tr}[\not{Q}\not{b}\not{a}]$ を 2 度使うことで第 4 辺第 1 項を得る．第 3 辺第 2 項で質量の項は $\not{a}$ が奇数個の積となりゼロとなる．こうして質量項を落した第 3 辺第 2 項の先頭は

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{q}\not{\varepsilon}')\not{\varepsilon}\not{q}\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right] = \mathrm{Tr}\left[\{2(q\varepsilon') - \not{\varepsilon}'\not{q}\}\not{\varepsilon}\not{q}\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right] = 2(q\varepsilon')\mathrm{Tr}\left[\not{\varepsilon}\not{q}\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right] - \mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}'(\not{q}\not{\varepsilon})\not{q}\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}]$$

$$= 2(q\varepsilon')\mathrm{Tr}\left[\not{\varepsilon}\not{q}\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right] - \mathrm{Tr}[\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\{2(q\varepsilon) - \not{q}\not{q}\}\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}] = 2(q\varepsilon')\mathrm{Tr}\left[\not{\varepsilon}\not{q}\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]$$

となる．最後に $(q\varepsilon)=0$, と$\not{q}\not{q}=0$ を使った．その次の項にも同様の操作を行う．

第 4 辺第 1 項から第 5 辺を導くには多少の計算が必要となる．まず，第 4 辺第 1 項先頭の 3 つの因数を展開し，奇数個の $\not{a}$ はゼロとなるという性質と $\not{p}_i\not{p}_i=m_e^2$ を使う．

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_i+m_e)\not{q}(\not{p}_i+m_e)\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]=\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_i\not{q}\not{p}_i+m_e\not{q}\not{p}_i+m_e\not{p}_i\not{q}+m_e^2\not{q})\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]$$

$$=\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_i\not{q}\not{p}_i+m_e^2\not{q})\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]=\mathrm{Tr}\left[(2\{(p_iq)-\not{q}\not{p}_i\}\not{p}_i+m_e^2\not{q})\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]$$

$$=\mathrm{Tr}\left[(2(p_iq)\not{p}_i-m_e^2\not{q}+m_e^2\not{q})\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]=2(p_iq)\mathrm{Tr}\left[\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]$$

として第 5 辺第 1 項が得られる．次の 2 つの項は第 4 辺の対応する項で $\mathrm{Tr}[\not{a}\not{Q}\not{b}]=\mathrm{Tr}[\not{Q}\not{b}\not{a}]$ と $\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}=\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}'=-1$ を使う．

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////
更に

$$=8(p_iq)(p_iq')[2(\varepsilon\varepsilon')^2-1]-8(q\varepsilon')^2(p_iq')+8(q'\varepsilon)^2(p_iq) \qquad (12.30)$$

のように変形される．

////////////////////////////始まり////////////////////////////////////////

第 5 辺第 1 項 $\mathrm{Tr}\left[\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]$ の計算は面倒である．先ず，次の公式を導いておく．

$$\mathrm{Tr}\left[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}\right]=4(a\cdot b)[(c\cdot d)(e\cdot f)-(c\cdot e)(d\cdot f)+(c\cdot f)(d\cdot e)]$$

$$-4(a\cdot c)[(b\cdot d)(e\cdot f)-(b\cdot e)(d\cdot f)+(b\cdot f)(d\cdot e)]$$

$$+4(a\cdot d)[(b\cdot c)(e\cdot f)-(b\cdot e)(c\cdot f)+(b\cdot f)(c\cdot e)]$$

$$-4(a\cdot e)[(b\cdot c)(d\cdot f)-(b\cdot d)(c\cdot f)+(b\cdot f)(c\cdot d)]$$

$$+4(a\cdot d)[(b\cdot c)(d\cdot e)-(b\cdot d)(c\cdot e)+(b\cdot e)(c\cdot d)]$$

なお，見易さから 4 元ベクトルの内積の間に点を入れた．これは $\mathrm{Tr}\left[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\right]$ の公式を導く方法と同じ手法で導かれる．よって，$\not{a}=\not{p}_i$，$\not{b}=\not{q}'$，$\not{c}=\not{\varepsilon}'$，$\not{d}=\not{\varepsilon}$，$\not{e}=\not{\varepsilon}'$，$\not{f}=\not{\varepsilon}$ として，この公式へ代入すると

$$\mathrm{Tr}\left[\not{p}_i\not{q}'\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\not{\varepsilon}'\not{\varepsilon}\right]=4(p_iq')[2(\varepsilon\varepsilon')^2-1]-4(p_i\varepsilon')[\cdots\cdots]$$

$$+4(p_i\varepsilon)[\cdots\cdots]-4(p_i\varepsilon')[\cdots\cdots]+4(p_i\varepsilon)[\cdots\cdots]$$

となり，$p_i\varepsilon = p_i\varepsilon' = 0$ であるから，右辺先頭の項以外はすべてゼロとなる．
////////////////////////////////終り//////////////////////////////////////////////

### 12.1.4 コンプトン散乱の全断面積

$$\overline{\sigma} = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\left[\frac{1}{\left\{1+\frac{|\boldsymbol{q}|}{m_\mathrm{e}}(1-z)\right\}^3}+\frac{1}{1+\frac{|\boldsymbol{q}|}{m_\mathrm{e}}(1-z)}\right.$$

$$\left.-\frac{1-z^2}{\left\{1+\frac{|\boldsymbol{q}|}{m_\mathrm{e}}(1-z)\right\}^2}\right] \qquad (12.37)$$

となる．(12.16) 式を使った．
また高エネルギー極限 ($|\boldsymbol{q}|/m_\mathrm{e} \gg 1$) においては

$$\overline{\sigma} \simeq \frac{\pi\alpha^2}{|\boldsymbol{q}|m_\mathrm{e}}\left[\ln\frac{2|\boldsymbol{q}|}{m_\mathrm{e}}+\frac{1}{2}+O\left(\frac{m_\mathrm{e}}{|\boldsymbol{q}|}\ln\frac{|\boldsymbol{q}|}{m_\mathrm{e}}\right)\right] \qquad (12.39)$$

を得る．
////////////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////////
導出計算：(12.37) 式の括弧内の積分を行う．$|\boldsymbol{q}|/m_\mathrm{e} \equiv A \gg 1$ として，更に
変数変換 $1-z=t$ とすると

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\frac{1}{\left\{1+\frac{|\boldsymbol{q}|}{m_\mathrm{e}}(1-z)\right\}^3} = \int_0^2\frac{\mathrm{d}t}{(1+At)^3} = \frac{1}{A}\left[-\frac{1}{2(1+At)^2}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2A}\left[1-\frac{1}{2(1+2A)^2}\right] \simeq \frac{1}{A}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{16A^2}\right] \qquad (11)$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\frac{1}{1+\frac{|\boldsymbol{q}|}{m_\mathrm{e}}(1-z)} = \int_0^2\frac{\mathrm{d}t}{1+At} = \frac{1}{A}\Big[\ln(1+At)\Big]_0^2 = \frac{1}{A}\ln(1+2A) \simeq \frac{1}{A}\ln 2A \qquad (12)$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\frac{1-z^2}{\left\{1+\frac{|\boldsymbol{q}|}{m_\mathrm{e}}(1-z)\right\}^3} = \int_0^2\mathrm{d}t\frac{2t-t^2}{(1+At)^2} = \left[-\frac{2t-t^2}{A(1+At)}\right]_0^2+\int_0^2\frac{(2-2t)\mathrm{d}t}{A(1+At)}$$

$$= \frac{2}{A^2}\Big[(1-t)\ln(1+At)\Big]_0^2 + \frac{2}{A^2}\int_0^2 \ln(1+At)\mathrm{d}t \qquad (13)$$

が得られる．(11)，(12)，(13) で $A \gg 1$ を考慮すると，(13) はオーダーが 1 次異なり，無視する．よって (11)，(12) を加え，$A$ を処理した式が (12.39) となる．
////////////////////////////終り//////////////////////////////////////////

# 第 13 章　電子電子散乱と電子陽電子散乱

### 13.1.2 電子・電子散乱の S 行列要素

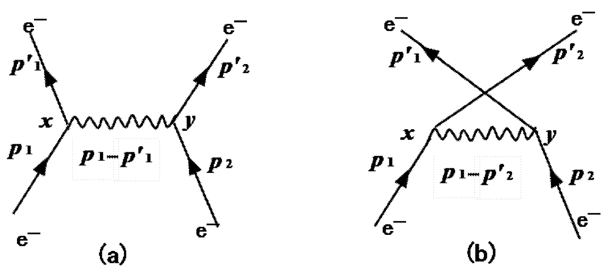


図 2: 電子電子散乱

$$\begin{aligned} S_{fi} = \mathrm{i}\frac{e^2}{V^2}\sqrt{\frac{m_\mathrm{e}^4}{E_1E_1'E_2E_2'}}\int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y \int \frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q(x-y)}\frac{1}{q^2} \\ \times \Big\{\overline{u}(p_1', s_1')\gamma_\mu u(p_1, s_1)\cdot \overline{u}(p_2', s_2')\gamma_\mu u(p_2, s_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1'-p_1)x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_2'-p_2)y} \\ - \overline{u}(p_2', s_2')\gamma_\mu u(p_1, s_1)\cdot \overline{u}(p_1', s_1')\gamma_\mu u(p_2, s_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_2'-p_1)x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1'-p_2)y}\Big\} \end{aligned} \qquad (13.14)$$

となる．

{ } の中の第 1 項は図 13.1(a) に，第 2 項は図 13.1(b) に対応し，第 2 項の符号がマイナスになるのはフェルミ・ディラック統計に従い反対称性を表している．

(13.14) に対して，$x, y, q$ に関する積分を行うと

$$S_{fi} = 4\pi \mathrm{i} \frac{\alpha}{V^2} \sqrt{\frac{m_\mathrm{e}^4}{E_1 E_1' E_2 E_2'}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) M_{fi} \tag{13.15}$$

が導かれる．
////////////////////////////始まり/////////////////////////////////////////
積分の順序は $x \to y \to q$ もしくは $y \to x \to q$ の順で行う．まず第 1 項を $x$ で積分する．指数関数を含む部分は $\exp(-\mathrm{i}q(x-y))/q^2$ を考慮して

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1' - p_1 - q)x}$$

の積分を実行すると $(2\pi)^4 \delta^4(p_1' - p_1 - q)/q^2$ となる．次に $y$ の積分では同様に

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_2' - p_2 + q)y} \to (2\pi)^4 \delta^4(p_2' - p_2 + q)$$

となり，最後に $q$ で積分すると，$(2\pi)^4 (2\pi)^4/(2\pi)^4$ の計算も含めると

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_2' - p_2 + p_1' - p_1)/(p_1 - p_1')^2$$

となる．
////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

### 13.1.3 偏極していない電子に関する散乱断面積

電子が偏極していない場合の散乱断面積は

$$\mathrm{d}\overline{\sigma} = \frac{16\alpha^2}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|} \frac{m_\mathrm{e}^4}{E_1 E_2} \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \overline{|M_{fi}|^2} \frac{\mathrm{d}^3 p_1'}{2E_1'} \frac{\mathrm{d}^3 p_2'}{2E_2'} \tag{13.20}$$

となる．ここで $\overline{|M_{fi}|^2}$ は $|M_{fi}|^2$ に対してスピン状態に関して平均をとったもので，(11.36)，(11.20)，(11.21) を用いて

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\pm s_1, \pm s_1'} \sum_{\pm s_2, \pm s_2'} |M_{fi}|^2$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(p_1 - p_1')^4} \mathrm{Tr}\left( \frac{\not{p}_1' + m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}} \gamma_\nu \right) \mathrm{Tr}\left( \frac{\not{p}_2' + m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}} \gamma^\mu \frac{\not{p}_2 + m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}} \gamma^\nu \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(p_1 - p_1')^2 (p_1 - p_2')^2} \mathrm{Tr}\left( \frac{\not{p}_1' + m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}} \gamma_\nu \frac{\not{p}_2' + m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}} \gamma^\mu \frac{\not{p}_2 + m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}} \gamma^\nu \right) \right]$$

$$+\text{前記の 2 項で } (p_1' \longleftrightarrow p_2') \text{ と交換した式} \tag{13.21}$$

で与えられる．
////////////////////////////////始り////////////////////////////////////////
先ずは第 1 項が 2 つの Tr になることに注目する．さて (11.36) により $M_{fi} \equiv a - b$ の絶対値の 2 乗すなわち $(a-b)\overline{(a-b)}$ の $a\overline{a}$ 部分の計算を行う．$u(p_i, s_i) = u(s_i)$ と簡略化するが，この表記は一意である．(11.19) の拡大形の計算をする．

$$\sum_{\pm s_1, \pm s'_1} \sum_{\pm s_2, \pm s'_2} \overline{u}(s'_1)\gamma_\mu u(s_1)\overline{u}(s'_2)\gamma^\mu u(s_2) \cdot \overline{u}(s_2)\gamma^\nu u(s'_2)\overline{u}(s_1)\gamma_\nu u(s'_1)$$

$$= \sum_{\pm s_1, \pm s'_1, \pm s_2, \pm s'_2} \sum_{(\alpha\beta\delta\eta\kappa\lambda\rho\sigma)} \overline{u}_\alpha(s'_1)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(s_1)\overline{u}_\delta(s'_2)(\gamma^\mu)_{\delta\eta}$$

$$\times u_\eta(s_2)\overline{u}_\kappa(s_2)(\gamma^\nu)_{\kappa\lambda} u_\lambda(s'_2)\overline{u}_\rho(s_1)(\gamma_\nu)_{\rho\sigma} u_\sigma(s'_1)$$

$$= \sum_{\pm s_1, \pm s'_1, \pm s'_2} \sum_{(\alpha\beta\delta\eta\kappa\lambda\rho\sigma)} \overline{u}_\alpha(s'_1)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(s_1)\overline{u}_\delta(s'_2)(\gamma^\mu)_{\delta\eta}$$

$$\times \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\right)_{\eta\kappa} (\gamma^\nu)_{\kappa\lambda} u_\lambda(s'_2)\overline{u}_\rho(s_1)(\gamma_\nu)_{\rho\sigma} u_\sigma(s'_1)$$

$$= \sum_{\pm s_1, \pm s'_1, \pm s'_2} \sum_{(\alpha\beta\delta\eta\lambda\rho\sigma)} \overline{u}_\alpha(s'_1)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \overline{u}_\delta(s'_2)(\gamma^\mu)_{\delta\eta} \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)_{\eta\lambda}$$

$$\times u_\lambda(s'_2) \underbrace{u_\beta(s_1)\overline{u}_\rho(s_1)}(\gamma_\nu)_{\rho\sigma} u_\sigma(s'_1)$$

$$= \sum_{\pm s'_1, \pm s'_2} \sum_{(\alpha\beta\delta\eta\lambda\sigma)} \overline{u}_\alpha(s'_1)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \overline{u}_\delta(s'_2)(\gamma^\mu)_{\delta\eta} \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)_{\eta\lambda}$$

$$\times u_\lambda(s'_2) \left(\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\right)_{\beta\sigma} u_\sigma(s'_1)$$

$$= \sum_{\pm s'_1, \pm s'_2} \sum_{(\alpha\beta\delta\eta\lambda\sigma)} \overline{u}_\alpha(s'_1)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \underbrace{u_\lambda(s'_2)\overline{u}_\delta(s'_2)}(\gamma^\mu)_{\delta\eta}$$

$$\times \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)_{\eta\lambda} \left(\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\right)_{\beta\sigma} u_\sigma(s'_1)$$

$$= \sum_{\pm s'_1} \sum_{(\alpha\beta\eta\lambda\sigma)} \underbrace{u_\sigma(s'_1)\overline{u}_\alpha(s'_1)}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \left(\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\right)_{\beta\sigma} \left(\frac{\not{p}'_2 + m}{2m}\gamma^\mu\right)_{\lambda\eta} \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)_{\eta\lambda}$$

$$= \sum_{(\beta\eta\lambda\sigma)} \left(\frac{\not{p}_1' + m}{2m}\gamma_\mu\right)_{\sigma\beta} \left(\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\right)_{\beta\sigma} \left(\frac{\not{p}_2' + m}{2m}\gamma^\mu\right)_{\lambda\eta} \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)_{\eta\lambda}$$

$$= \sum_{\beta\sigma} \left(\frac{\not{p}_1' + m}{2m}\gamma_\mu\right)_{\sigma\beta} \left(\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\right)_{\beta\sigma} \sum_{\eta\lambda} \left(\frac{\not{p}_2' + m}{2m}\gamma^\mu\right)_{\lambda\eta} \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)_{\eta\lambda}$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_1' + m}{2m}\gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\right) \mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_2' + m}{2m}\gamma^\mu \frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)$$

として得られる．

次にクロスターム $a\bar{b}$ も同様に計算する．

$$\sum_{\pm s_1, \pm s_1'} \sum_{\pm s_2, \pm s_2'} \overline{u}(s_1')\gamma_\mu u(s_1)\overline{u}(s_2')\gamma^\mu u(s_2) \cdot \overline{u}(s_2)\gamma^\nu u(s_1')\overline{u}(s_1)\gamma_\nu u(s_2')$$

$$= \sum_{\pm s_1, \pm s_1', \pm s_2, \pm s_2'} \sum_{(\alpha\beta\delta\eta\kappa\lambda\rho\sigma)} \overline{u}_\alpha(s_1')(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(s_1)\overline{u}_\delta(s_2')(\gamma^\mu)_{\delta\eta} u_\eta(s_2)$$

$$\times \overline{u}_\kappa(s_2)(\gamma^\nu)_{\kappa\lambda} u_\lambda(s_1')\overline{u}_\rho(s_1)(\gamma_\nu)_{\rho\sigma} u_\sigma(s_2')$$

$$= \sum_{\pm s_1, \pm s_1', \pm s_2'} \sum_{(\alpha\beta\delta\eta\lambda\rho\sigma)} \overline{u}_\alpha(s_1')(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \overline{u}_\delta(s_2')(\gamma^\mu)_{\delta\eta}$$

$$\times \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)_{\eta\lambda} u_\lambda(s_1') \underbrace{u_\beta(s_1)\overline{u}_\rho(s_1)}(\gamma_\nu)_{\rho\sigma} u_\sigma(s_2')$$

$$= \sum_{\pm s_1', \pm s_2'} \sum_{(\alpha\beta\delta\eta\lambda\sigma)} \overline{u}_\alpha(s_1')(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \overline{u}_\delta(s_2')(\gamma^\mu)_{\delta\eta}$$

$$\times \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)_{\eta\lambda} u_\lambda(s_1') \left(\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\right)_{\beta\sigma} u_\sigma(s_2')$$

$$= \sum_{\pm s_1', \pm s_2'} \sum_{(\alpha\beta\delta\eta\lambda\sigma)} \overline{u}_\delta(s_2')(\gamma^\mu)_{\delta\eta} \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)_{\eta\lambda}$$

$$\times u_\lambda(s_1')\overline{u}_\alpha(s_1')(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \left(\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\right)_{\beta\sigma} u_\sigma(s_2')$$

$$= \sum_{\pm s_2'} \sum_{(\beta\delta\eta\lambda\sigma)} u_\sigma(s_2')\overline{u}_\delta(s_2')(\gamma^\mu)_{\delta\eta} \left(\frac{\not{p}_2 + m}{2m}\gamma^\nu\right)_{\eta\lambda} \left(\frac{\not{p}_1' + m}{2m}\gamma_\mu\right)_{\lambda\beta} \left(\frac{\not{p}_1 + m}{2m}\gamma_\nu\right)_{\beta\sigma}$$

$$= \sum_{\sigma\eta\lambda\beta} \left( \frac{\not{p}_2' + m}{2m} \gamma^\mu \right)_{\sigma\eta} \left( \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma^\nu \right)_{\eta\lambda} \left( \frac{\not{p}_1' + m}{2m} \gamma_\mu \right)_{\lambda\beta} \left( \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \right)_{\beta\sigma}$$

$$= \mathrm{Tr} \left( \frac{\not{p}_2' + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma^\nu \frac{\not{p}_1' + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \right)$$

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

Peskin&Schroeder より，公式

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \\ &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}, \\ &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu, \end{aligned} \tag{5.9}$$

**証明**：$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ を使う．

(1)

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma_\mu = 2g^{\mu\nu}\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\mu = 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu$$

(2)　上の結果を使う．

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma^\rho\gamma_\mu = 2g^{\mu\nu}\gamma^\rho\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\mu \\ &= 2\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\nu(-2\gamma^\rho) = 2(\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\rho) = 4g^{\rho\nu} \end{aligned}$$

(3)　上の結果を使う．

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - \gamma^\nu(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu) \\ &= 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - \gamma^\nu(4g^{\rho\sigma}) = 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 4g^{\rho\sigma}\gamma^\nu = 2\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu - 2(\gamma^\rho\gamma^\sigma \\ &+\gamma^\sigma\gamma^\rho)\gamma^\nu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu \end{aligned}$$

以上　□

公式

$$\frac{\mathrm{d}^3 p_1'}{2E'} = \frac{|\boldsymbol{p}_1'|^2 \mathrm{d}|\boldsymbol{p}_1'| \mathrm{d}\Omega_1'}{2E'}, \quad \frac{\mathrm{d}^3 p_2'}{2E'} = \int \mathrm{d}^4 p_2' \delta({p'}_2^2 - m_\mathrm{e}^2)\theta(E') \tag{13.25}$$

を用いて，$p_2'$ に関する積分を実行すると

$$\mathrm{d}\overline{\sigma} = \mathrm{d}\Omega_1' \int_0^\infty \frac{|\boldsymbol{p}_1'|^2 \mathrm{d}|\boldsymbol{p}_1'|}{2E'} \delta((p_1 + p_2 - p_1')^2 - m_\mathrm{e}^2)$$

$$\times\, \theta(2E - E') F(p_1', p_2' = p_1 + p_2 - p_1')$$

となる．

////////////////////////////////始り////////////////////////////////////////

(13.25) 式の $\theta(E') = \theta((p_2')_0)$ は $E'$ or $(p_2')_0 \geq 0$ で $\theta = 1$ となる．衝突前後のエネルギーに関しては

$$E + E = (p_2')_0 + E' \longrightarrow (p_2')_0 = 2E - E' \geq 0 \longrightarrow 0 \leq E' \leq 2E$$

////////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

次に $|\boldsymbol{p}_1'|$ に関する積分を実行する

$$= \mathrm{d}\Omega_1' \int_0^{2E} \frac{|\boldsymbol{p}_1'|\mathrm{d}E'}{2} \delta\left(4E^2 - 4EE'\right) F(p_1', p_2' = p_1 + p_2 - p_1')$$

$$= \mathrm{d}\Omega_1' \frac{|\boldsymbol{p}_1'|}{8E} F(p_1', p_2' = p_1 + p_2 - p_1')|_{E=E'}$$

$$= \mathrm{d}\Omega_1' \frac{\alpha^2 m_\mathrm{e}^4}{E^2} \overline{|M_{fi}|^2}\Big|_{E=E'} \tag{13.26}$$

が得られる．ここで $(p_1 + p_2)^2 = 4E^2$, $(p_1 + p_2)p_1' = 2EE'$, $p_1'^2 = m_\mathrm{e}^2$, $|\boldsymbol{p}_1'|\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_1'| = E'\mathrm{d}E'$ を用いた．

////////////////////////////////始り////////////////////////////////////////

δ 関数の処理で

$$\int_0^{2E} \frac{\mathrm{d}E'}{2} \delta\left(4E^2 - 4EE'\right) = \int_0^{2E} \frac{\mathrm{d}E'}{2} \delta\left(4E(E - E')\right) = \int_0^{2E} \frac{\mathrm{d}E'}{2} \frac{1}{4E} \delta\left(E - E'\right)$$

.

////////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

### 13.1.4 メラー散乱の公式

$\overline{|M_{fi}|^2}$ の計算：

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_1' + m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}}\gamma_\mu \frac{\not{p}_1 + m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}}\gamma_\nu\right) = \frac{1}{m_\mathrm{e}^2}[p_{1\mu}' p_{1\nu} + p_{1\mu} p_{1\nu}' - \eta_{\mu\nu}(p_1' p_1 - m_\mathrm{e}^2)]$$

$$\approx \frac{1}{m_\mathrm{e}^2}[p_{1\mu}' p_{1\nu} + p_{1\mu} p_{1\nu}' - \eta_{\mu\nu}(p_1' p_1)] \tag{13.28}$$

が得られる．

////////////////////////////////始り////////////////////////////////////////

$\gamma$ の奇数次の項を落して

$$\mathrm{Tr}(\not{p}_1'\gamma_\mu + m_\mathrm{e}\gamma_\mu)(\not{p}_1\gamma_\nu + m_\mathrm{e}\gamma_\nu) = \mathrm{Tr}(\not{p}_1'\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu + m_\mathrm{e}^2\gamma_\mu\gamma_\nu)$$

となる．$\gamma_\mu=\eta_{\mu\alpha}\gamma^\alpha$ であり，$\gamma^\alpha$ は 4 元ベクトル $M$ で $\alpha$ 成分だけが 1 でその他はゼロとする．同様に $\gamma_\nu$ に対しては 4 元ベクトル $N$ を付与する．よって

$$\mathrm{Tr}(\not{p}'_1\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu)=\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\mathrm{Tr}(\not{p}'_1\not{M}\not{p}_1\not{N})$$

$$=4\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}[(p'_1M)(p_1N)+(p'_1N)(p_1M)-(p'_1p_1)(MN)]$$

$$=4\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}[(p'_1)^\alpha p_1^\beta+(p'_1)^\beta p_1^\alpha-(p'_1p_1)g^{\alpha\beta}]=4[\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}(p'_1)^\alpha p_1^\beta+\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}(p'_1)^\beta p_1^\alpha$$

$$-(p'_1p_1)\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}g^{\alpha\beta}]=4[p'_{1\mu}p_{1\beta}+p'_{1\nu}p_{1\mu}-(p'_1p_1)\eta_{\mu\nu}]$$

また，$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=4\eta_{\mu\nu}$ となる．最終的には $E\gg m_\mathrm{e}$ として質量項は落した．
////////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

これを使って

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'_1+m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}}\gamma_\mu\frac{\not{p}_1+m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}}\gamma_\nu\right)\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'_2+m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}}\gamma^\mu\frac{\not{p}_2+m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}}\gamma^\nu\right)$$

$$\approx\frac{1}{m_\mathrm{e}^4}[p'_{1\mu}p_{1\nu}+p_{1\mu}p'_{1\nu}-\eta_{\mu\nu}(p'_1p_1)][{p'}_2^\mu p_2^\nu+p_2^\mu {p'}_2^\nu-\eta^{\mu\nu}({p'}_2p_2)]$$

$$=2[(p'_1p'_2)(p_1p_2)+(p'_1p_2)(p_1p'_2)]$$

となる．
////////////////////////////////始り////////////////////////////////////////
例えば

$$p'_{1\mu}p_{1\nu}{p'}_2^\mu p_2^\nu=(p'_1p'_2)(p_1p_2),\quad p'_{1\mu}p_{1\nu}p_2^\mu{p'}_2^\nu=(p'_1p_2)(p_1p'_2),$$

$$-p'_{1\mu}p_{1\nu}\eta^{\mu\nu}({p'}_2p_2)=-(p'_1p_1)({p'}_2p_2),\quad \eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}(p'_1p_1)({p'}_2p_2)=4(p'_1p_1)({p'}_2p_2)$$

////////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

また，

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'_1+m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}}\gamma_\mu\frac{\not{p}_1+m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}}\gamma_\nu\frac{\not{p}'_2+m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}}\gamma^\mu\frac{\not{p}_2+m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{e}}\gamma^\nu\right)$$

$$\approx\frac{1}{(2m_\mathrm{e})^4}\mathrm{Tr}\left(\not{p}'_1\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}'_2\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu\right)=-\frac{2}{m_\mathrm{e}^4}(p_1p_2)(p'_1p'_2)\approx-\frac{2}{m_\mathrm{e}^4}(2EE')^2, \tag{13.31}$$

となる．
////////////////////////////////始り////////////////////////////////////////
$\not{p}'_1+m_{\rm e}\approx\not{p}'_1$ などとした．次に $\not{p}'_1\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}'_2\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu$ では Peskin 公式 $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu=-2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu$，$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu=4g^{\nu\rho}$ を使う．これは本テキスト p.162 の定理 5 に対応．

$$\not{p}'_1\gamma_\mu\not{p}_1(\gamma_\nu\not{p}'_2\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu)=\not{p}'_1\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu(p'_2)_\alpha\gamma^\alpha\gamma^\mu(p_2)_\beta\gamma^\beta\gamma^\nu=\not{p}'_1\gamma_\mu\not{p}_1(\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu)(p'_2)_\alpha(p_2)_\beta$$

$$=\not{p}'_1\gamma_\mu\not{p}_1(-2\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha)(p'_2)_\alpha(p_2)_\beta=-2\not{p}'_1\gamma_\mu\not{p}_1\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha(p'_2)_\alpha(p_2)_\beta$$

$$=-2\not{p}'_1\gamma_\mu(p_1)_\lambda\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha(p'_2)_\alpha(p_2)_\beta=-2\not{p}'_1(\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\mu)\gamma^\alpha(p_1)_\lambda(p'_2)_\alpha(p_2)_\beta$$

$$=-8\not{p}'_1\eta^{\lambda\beta}\gamma^\alpha(p_1)_\lambda(p'_2)_\alpha(p_2)_\beta=-8\not{p}'_1\not{p}'_2\eta^{\lambda\beta}(p_1)_\lambda(p_2)_\beta=-8\not{p}'_1\not{p}'_2(p_1p_2)$$

となるから

$$\mathrm{Tr}(\not{p}'_1\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}'_2\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu)=-8(p_1p_2)\mathrm{Tr}(\not{p}'_1\not{p}'_2)=-32(p_1p_2)(p'_1p'_2)$$

を得る．
////////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

$\overline{|M_{fi}|^2}$ の残りの項 $(p'_1\longleftrightarrow p'_2)$ について：テキストにはないので計算し記す．
//////////////////////////////////始り////////////////////////////////////
(13.28) に対応する項：

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'_2+m_{\rm e}}{2m_{\rm e}}\gamma_\mu\frac{\not{p}_1+m_{\rm e}}{2m_{\rm e}}\gamma_\nu\right)=\frac{1}{m_{\rm e}^2}[p'_{2\mu}p_{1\nu}+p_{1\mu}p'_{2\nu}-\eta_{\mu\nu}(p'_2p_1-m_{\rm e}^2)]$$

$$\approx\frac{1}{m_{\rm e}^2}[p'_{2\mu}p_{1\nu}+p_{1\mu}p'_{2\nu}-\eta_{\mu\nu}(p'_2p_1)]\tag{13.28'}$$

となるので

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'_2+m_{\rm e}}{2m_{\rm e}}\gamma_\mu\frac{\not{p}_1+m_{\rm e}}{2m_{\rm e}}\gamma_\nu\right)\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'_1+m_{\rm e}}{2m_{\rm e}}\gamma^\mu\frac{\not{p}_2+m_{\rm e}}{2m_{\rm e}}\gamma^\nu\right)$$

$$\approx\frac{1}{m_{\rm e}^4}[p'_{2\mu}p_{1\nu}+p_{1\mu}p'_{2\nu}-\eta_{\mu\nu}(p'_2p_1)][{p'}_1^{\mu}p_2^\nu+p_2^\mu{p'}_1^{\nu}-\eta^{\mu\nu}({p'}_1p_2)]$$

$$=2[(p'_1p'_2)(p_1p_2)+(p_1p'_1)(p_2p'_2)]$$

となるので

$$\frac{1}{4[(p_1-p'_2)^2]^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'_2+m_{\rm e}}{2m_{\rm e}}\gamma_\mu\frac{\not{p}_1+m_{\rm e}}{2m_{\rm e}}\gamma_\nu\right)\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'_1+m_{\rm e}}{2m_{\rm e}}\gamma^\mu\frac{\not{p}_2+m_{\rm e}}{2m_{\rm e}}\gamma^\nu\right)$$

$$\approx \frac{1}{2m_e^4}\frac{(p'_1p'_2)(p_1p_2)+(p_1p'_1)(p_2p'_2)}{[(p_1-p'_2)^2]^2} \approx \frac{1}{8m_e^4}\frac{1+\sin^4\dfrac{\theta}{2}}{\cos^4\dfrac{\theta}{2}} \tag{13.29'}$$

また，

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}'_2+m_e}{2m_e}\gamma_\mu\frac{\not{p}_1+m_e}{2m_e}\gamma_\nu\frac{\not{p}'_1+m_e}{2m_e}\gamma^\mu\frac{\not{p}_2+m_e}{2m_e}\gamma^\nu\right)$$

$$\approx \frac{1}{(2m_e)^4}\mathrm{Tr}\left(\not{p}'_2\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}'_1\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu\right)$$

ここで，次の計算をしておく

$$\not{p}'_2\gamma_\mu\not{p}_1(\gamma_\nu\not{p}'_1\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu)=\not{p}'_2\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu(p'_1)_\alpha\gamma^\alpha\gamma^\mu(p_2)_\beta\gamma^\beta\gamma^\nu$$

$$=\not{p}'_2\gamma_\mu\not{p}_1(\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu)(p'_1)_\alpha(p_2)_\beta=\not{p}'_2\gamma_\mu\not{p}_1(-2\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha)(p'_1)_\alpha(p_2)_\beta$$

$$=-2\not{p}'_2\gamma_\mu\not{p}_1\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha(p'_1)_\alpha(p_2)_\beta=-8\not{p}'_2\eta^{\lambda\beta}\gamma^\alpha(p_1)_\lambda(p'_1)_\alpha(p_2)_\beta$$

$$=-8\not{p}'_2\not{p}'_1\eta^{\lambda\beta}(p_1)_\lambda(p_2)_\beta=-8\not{p}'_2\not{p}'_1(p_1p_2)$$

これを使うと

$$\frac{1}{(2m_e)^4}\mathrm{Tr}\left(\not{p}'_2\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}'_1\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\nu\right)=-8(p_1p_2)\frac{1}{(2m_e)^4}\mathrm{Tr}(\not{p}'_2\not{p}'_1)$$

$$=-\frac{32}{16m_e^4}(p_1p_2)(p'_1p'_2)\approx-\frac{2}{m_e^4}(2EE')^2 \tag{13.31'}$$

となり，これについては (13.31) と同じである．
//////////////////////////////////終り////////////////////////////////
よって $\overline{|M_{fi}|^2}$ の残りの項 $(p'_1\longleftrightarrow p'_2)$ については

$$\frac{1}{8m_e^4}\left(\frac{1+\sin^4\dfrac{\theta}{2}}{\cos^4\dfrac{\theta}{2}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\right) \tag{13.34}$$

である．