# 読書メモ：武田・宮沢　素粒子物理学

2019 年 9 月 26 日

## 第 2 章　量子力学

### § 2.1 Sshrodinger 方程式

エルミート性

**問題 2.1**

球座標系でのハミルトニアン演算子であるが，

$$p_r = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial r}, \quad p_\theta = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad p_\varphi = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

で置き換えれば良いか．ただし

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \int_0^\infty r^2 \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \varphi^*(r,\theta,\varphi)\psi(r,\theta,\varphi)$$

とする．

**答**

そのままの 2 乗の形 $\partial^2/\partial r^2$ ではエルミートにならない．球座標系でのラプラシアンの形

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

を使えば良い．例えば

$$\int_0^\infty \psi^*(\nabla^2\psi)_r r^2\mathrm{d}r = \int_0^\infty \psi^*\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi\right\}r^2\mathrm{d}r = \int_0^\infty \psi^*\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi\mathrm{d}r$$

$$= \psi^*\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial\psi^*}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\mathrm{d}r = -\int_0^\infty \left(r^2\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathrm{d}r$$

$$= -\psi\left(r^2\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\right)\Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \psi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi^*\right)\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^\infty \psi\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi^*\right\}r^2\mathrm{d}r = \int_0^\infty \psi(\nabla^2\psi^*)_r r^2\mathrm{d}r$$

となりエルミート性が確認される．
　ここで仮定された

$$R \to \infty \qquad \psi \to 0$$

は§ 2.4 で議論される波動関数の境界条件となる．

状態間の遷移

$$a_0(0) = 1, \quad a_n(0) = 0, \quad n \neq 0, \tag{2.62}$$

である．この条件より，$t = 0$ で方程式の右辺を評価すると

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial a_n(t)}{\partial t} = \langle n|H'|0\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_n - E_0)t/\hbar}$$

となるから，積分し

$$a_n(t) = \frac{\langle n|H'|0\rangle}{E_0 - E_n} \left( \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_n - E_0)t/\hbar} - 1 \right), \tag{2.63}$$

を得る．
//////////////////////////////始まり////////////////////
つまり，ここでの解法は陽解法のような形をとる．すなわち，

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial a_n^{(i+1)}(t)}{\partial t} = \sum_m \langle n|H'|m\rangle a_m^{(i)}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_n - E_m)t/\hbar},$$

として，$i = 0$ すなわち $a_m^{(0)}$ を与えて積分すると，第 $(i+1) =$ 第 1 次近似解 $a_n^{(1)}$ を得る．絶対値の計算で

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - 1\right)^* \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - 1\right) = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - 1\right) \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - 1\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + 1 = 2(1 - \cos\alpha)$$

とする．
/////////////////////////終り///////////////////////

//////////////////////////////始まり////////////////////////////////
ここでよく知られた積分を記しておく：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} \mathrm{d}x = \pi$$

被積分関数は偶関数なので積分範囲を $[0, \infty]$ とする．また数学的厳密性は無視する．ここでは「基礎数学２　解析入門　杉浦光夫著」(東京大学出版会)p.295

を参考とした．当該積分の準備として

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

この式で 2 番目の積分 $(x)$ から 3 番目の積分，積分変数の変換で変数の中へ $n$ が入る部分に移る所でリーマン・ルベーグの定理を使用するようであるが省略する．この式の変形を逆に追う．まず，最右辺の積分が $\pi/2$ になることは明らかである．次に

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt = \frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}t}{2\sin\dfrac{t}{2}}$$

を確認する．公式

$$\cos A\sin B = \frac{1}{2}\left\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\right\}$$

確認する式右辺の分母を払うと，左辺は

$$\sin\frac{t}{2}+2\cos t\sin\frac{t}{2}+2\cos 2t\sin\frac{t}{2}+\cdots+2\cos nt\sin\frac{t}{2}$$

であり，上記の公式を使うと

$$=\sin\frac{t}{2}+\left(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)+\left(\sin\frac{5t}{2}-\sin\frac{3t}{2}\right)+\cdots$$

$$+\left(\sin\frac{2n+1}{2}t-\sin\frac{2n-1}{2}t\right)=\sin\frac{2n+1}{2}t$$

となるので上記の式が成立することが確認された．次に

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

であるが，変数を

$$\frac{2n+1}{2}t = x, \qquad \text{or} \qquad t = \frac{2}{2n+1}x$$

で変換すると分子は $\sin x$ となり，また微分は

$$\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\mathrm{d}x$$

となる．更に，分母においては $\theta\to 0$, $\sin\theta\approx\theta$ を考慮すると

$$\lim_{n\to\infty}2\sin\frac{t}{2} = \lim_{n\to\infty}2\sin\left(\frac{2}{2n+1}\frac{x}{2}\right)\approx 2\frac{2}{2n+1}\frac{x}{2} = \frac{2}{2n+1}x$$

となるので，上記の積分に対して等号が成立することも確認される．最後

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

の成立はほぼ明らかである．よって

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

が証明される．なお，この積分は複素積分によっても簡単に導ける．以上「解析入門 I」より．

さて，本題に移る．上の式の部分積分を行う．ただし議論の都合上，積分範囲を $[v,u]$，$(v\to 0, u\to\infty)$ としておく．

$$\int_v^u\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\left(-\frac{\cos x}{x}\right)\Big|_v^u-\int_v^u\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{\cos x}{x}\right)\Big|_v^u-\int_v^u\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_v^u\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{\cos x}{x}\right)\Big|_v^u+\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_v^u+\int_v^u\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\underbrace{-\frac{\cos u}{u}+\frac{1}{u}}_{u\to\infty,\quad 0}+\underbrace{\frac{\cos v}{v}-\frac{1}{v}}_{v\to 0,\quad 0}+\int_v^u\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$(v\to 0, u\to\infty)\approx\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

以上□

///////////////////////////終り///////////////////////////////////

# 第3章　素粒子のスピン

**§ 3.5 角運動量の保存則**

素粒子の集まりがあったとき，素粒子間に働く力は素粒子相互の相対的配置や，スピン角運動量，軌道角運動量の相対的向きに関係する．したがって系全体を空間の任意の点を通る任意の軸の周りに回転しても働く力は変らない．

座標系を $z$ 軸まわりに微小角度 $\Delta\theta$ だけ回転したとき, 系の状態は次の $\psi'$ に移る (3.4) 式.

$$\psi \to \psi' = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\Delta\theta}{\hbar} M_z\right)\psi.$$

ハミルトニアン $H$ のこの状態での値は，この回転に対して以下のように変る：

$$\langle\psi, H\psi\rangle \to \langle\psi', H\psi'\rangle = \left\langle \left(1 + \mathrm{i}\frac{\Delta\theta}{\hbar} M_z\right)\psi, H\left(1 + \mathrm{i}\frac{\Delta\theta}{\hbar} M_z\right)\psi \right\rangle$$

$$= \langle\psi, H\psi\rangle + \mathrm{i}\frac{\Delta\theta}{\hbar}\langle\psi, [H, M_z]\psi\rangle, \tag{3.41}$$

を得る．

//////////////////////////始まり/////////////////////////////////////

**(3.41) 式の導出**

この式は以下のように導出される．$\mathrm{i}\Delta\theta/\hbar = \mathrm{i}\alpha$ としておく．

$$与式 = \langle(1 + \mathrm{i}\alpha M_z)\psi, H(1 + \mathrm{i}\alpha M_z)\psi\rangle = \langle\psi + \mathrm{i}\alpha M_z\psi, H\psi + \mathrm{i}\alpha H M_z\psi\rangle$$

$$= \langle\psi H\psi\rangle + \langle\mathrm{i}\alpha M_z\psi, H\psi\rangle + \langle\psi, \mathrm{i}\alpha H M_z\psi\rangle = \langle\psi H\psi\rangle + (\mathrm{i}\alpha M_z\psi)^\dagger H\psi$$

$$+\mathrm{i}\alpha\langle\psi, H M_z\psi\rangle = \langle\psi H\psi\rangle - \mathrm{i}\alpha(\psi^* M_z^\dagger)H\psi + \mathrm{i}\alpha\langle\psi, H M_z\psi\rangle$$

$$= \langle\psi H\psi\rangle - \mathrm{i}\alpha\langle\psi, M_z H\psi\rangle + \mathrm{i}\alpha\langle\psi, H M_z\psi\rangle = \langle\psi H\psi\rangle + \mathrm{i}\alpha\langle\psi, [H, M_z]\psi\rangle$$

となる．ここで $M_z^\dagger = M_z$ を使った．$\langle\mathrm{i}\alpha M_z\psi, H\psi\rangle = -\mathrm{i}\alpha\langle\psi, M_z H\psi\rangle$ に注意.

/////////////////////////終り///////////////////////////////////

**49 ページ**

//////////////////////////始まり//////////////////////////////////

$z$ 軸方向の外場によるポテンシャルを $V$ とすると，$M_z$ の値が保存するとは

$$[H + V, M_z] = 0,$$

となることが言えればよい．

ただし，$H$ を $z$ 軸方向の磁場とし $V = \beta\mathbf{H}\cdot\mathbf{M} = \beta H M_z$ の形とする．(3.33) 式

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2mc}\mathbf{H}\cdot\mathbf{M} = \frac{e\hbar}{2mc}H M_z,$$

からこの形を仮定した．外力が加わったので新たなハミルトニアンが $H' = H + V$ となったとする．このとき $H$ の保存で行ったことと同じ計算をする．よって

$$\langle\psi', (H+V)\psi'\rangle = \langle(1+\mathrm{i}\alpha M_z)\psi, (H+V)(1+\mathrm{i}\alpha M_z)\psi\rangle$$

$$= \langle\psi + \mathrm{i}\alpha M_z\psi, H\psi + V\psi + \mathrm{i}\alpha HM_z\psi + \mathrm{i}\alpha VM_z\psi\rangle$$

$$= \langle\psi, (H+V)\psi\rangle + \langle\mathrm{i}\alpha M_z\psi, H\psi\rangle + \langle\mathrm{i}\alpha M_z\psi, V\psi\rangle + \langle\psi, \mathrm{i}\alpha HM_z\psi\rangle + \langle\psi, \mathrm{i}\alpha VM_z\psi\rangle$$

ここで $\alpha^2$ の項を無視した．

$$= \langle\psi, (H+V)\psi\rangle - \mathrm{i}\alpha\langle\psi, M_zH\psi\rangle - \mathrm{i}\alpha\langle\psi, M_zV\psi\rangle + \mathrm{i}\alpha\langle\psi, HM_z\psi\rangle + \mathrm{i}\alpha\langle\psi, VM_z\psi\rangle$$

$$= \langle\psi, (H+V)\psi\rangle + \mathrm{i}\alpha\langle\psi, [H, M_z]\psi\rangle + \mathrm{i}\alpha\langle\psi, [V, M_z]\psi\rangle$$

さて，$[H, M_z] = 0$ であり，また $[V, M_z]$ は $V = \beta HM_z$ であるから

$$[V, M_z] = VM_z - M_zV = \beta HM_zM_z - M_z\beta HM_z$$

$$= \beta(HM_z - M_zH)M_z = \beta[H, M_z]M_z = 0$$

となるので，最終的に

$$[H+V, M_z] = 0, \longrightarrow \langle\psi', (H+V)\psi'\rangle = \langle\psi, (H+V)\psi\rangle$$

となる．よって $z$ 軸方向の磁場がある場合でも $M_z$ の値は保存される．
////////////////////////////////終り//////////////////////////////////////

# 第 4 章　Lorentz 変換，時空の反転，素粒子のパリティ

## § 4.2 エネルギー・運動量の保存則

[問題 4.2]

高エネルギー陽子が静止している陽子（たとえば水素泡箱中の陽子）に衝突して新しく $\pi^0$ 中間子を作るとき，それに必要な陽子の最小運動エネルギー (臨界値) を求めよ．陽子の静止質量エネルギー $Mc^2 = 938\mathrm{MeV}$，$\pi^0$ 粒子の静止質量エネルギー $mc^2 = 135\mathrm{MeV}$ として計算せよ．

[解]　衝突前の入射陽子のエネルギー運動量を $E_1, \mathbf{p}_1$，また静止している陽子のそれを $E_2, \mathbf{p}_2$ とする．($E_2 = Mc^2$,　$\mathbf{p}_2 = 0$)．$E_1, E_2$ は全エネルギーでそれぞれの陽子の運動エネルギー $K_1, K_2$ は全エネルギーから $Mc^2$ を引けばよい．つまり，$K_1 = E_1 - Mc^2$．

エネルギーの保存則だけで運動量保存を考えなければ入射陽子の運動エネルギー $K_1$ がそのまま $\pi^0$ 中間子の質量 $m$ に転化すればよいから $K_1 > mc^2$ であればよい．実際には運動量保存則のために衝突後の粒子（2 個の陽子と $\pi^0$ 中間子）の運動量の総和は衝突前の運動量 $\mathbf{p}_1$ に等しく，入射粒子の運動エネルギーの一部は衝突後の粒子の運動エネルギーに使われ，その残りが質量に転化すればよい．

適当な Lorentz 変換を行って $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{0}$ となる座標系に移ると (この系での量には ' をつけることにする)，衝突前後の運動量は共にゼロで，この座標系では衝突前の粒子の全エネルギーをすべて質量に変換できる．元の系（つまり $E_2 = Mc^2$,　$\mathbf{p}_2 = 0$ となる系）を実験室系，$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{0}$ となる系を重心系とよぶ．重心系では $|\mathbf{p}'_1| = |\mathbf{p}'_2|$，したがって $K'_1 = K'_2$ であるから，$mc^2$ の静止質量を生み出す最小の $K'_1 (= K'_2)$ は $K'_1 = mc^2/2$ である．この $K'_1$ の値を元の実験室系に戻せば $\pi^0$ 中間子をつくるための臨界エネルギーが得られる．この変換を行うには次のようにする．

重心系では，2 つの陽子の 4 元ベクトルは

$$p'_{1\mu} = (E'_1/c,\ \ \mathbf{p}'_1), \quad p'_{2\mu} = (E'_1/c,\ \ -\mathbf{p}'_1)$$

と書ける (衝突前)．これらの内積は (テキストとは異なる表記を使っている)

$$p'_{1\mu} p'_{2\mu} = \frac{E_1'^2}{c^2} + \mathbf{p}'^2_1 = \frac{2E_1'^2}{c^2} - M^2c^2$$

となる．ここで，4 元ベクトル $a$ と $b$ の内積 $ab$ は $ab = a_\mu b_\nu g^{\mu\nu}$,　$g^{\mu\mu} = (1, -1, -1, -1)$ で表される．また，

$$p'_{1\mu} p'_{1\mu} = \frac{E_1'^2}{c^2} - \mathbf{p}'^2_1 = M^2c^2$$

を使った．一方，実験室系では

$$p_{1\mu} = (E_1/c, \mathbf{p}_1), \quad p_{2\mu} = (Mc, \mathbf{0}),$$

で，この内積は

$$p_{1\mu}p_{2\mu} = ME_1.$$

内積は Lorentz 変換で不変であるから，すなわち $p_{1\mu}p_{2\mu} = p'_{1\mu}p'_{2\mu}$ であるから

$$ME_1 = \frac{2E_1'^2}{c^2} - M^2c^2 \longrightarrow E_1 = \frac{2E_1'^2}{Mc^2} - Mc^2$$

これを運動エネルギーで書くと $E = K + Mc^2$ より

$$K_1 + Mc^2 = \frac{2(K_1' + Mc^2)^2}{Mc^2} - Mc^2 = \frac{2(K_1'^2 + 2Mc^2K_1' + M^2c^4)}{Mc^2} - Mc^2$$

$$= 4K_1' + \frac{2K_1'^2}{Mc^2} + Mc^2$$

よって

$$K_1 = 4K_1' + \frac{2K_1'^2}{Mc^2}$$

となる．よって，衝突前の重心系で考察した，$K_1' = mc^2/2$ を代入すると

$$臨界値 = 2mc^2 + \frac{(mc^2)^2}{2Mc^2} = 2 \times 135 + \frac{135^2}{2 \times 938} = 270 + 9.7 = 280\mathrm{MeV}$$

[問題 **4.3**]
荷電粒子が屈折率 $n$ の物質中をつき抜けるとき，その粒子の速度 $v$ が $v > c/n$ であれば光を放出することを示せ．この光を Cerenkov 放射という．
[解]
屈折率 $n$ の物質中での光の運動量 $\mathbf{q}$，エネルギー $\omega$ との関係は $\omega = cq/n$ であることが知られている.（屈折率 1 の真空中では，この関係式は質量ゼロの自由粒子のエネルギー運動量の関係式 $\omega = cq$ となる.）荷電粒子のエネルギー・運動量を $E_1, \mathbf{p}_1$，光を出した後のそれを $E_2, \mathbf{p}_2$ とすると，エネルギーと運動量の保存則は

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 + \omega = E_2 + \frac{c}{n}q, \\ p_1 &= q\cos\theta + p_2\cos\varphi, \\ 0 &= q\sin\theta + p_2\sin\varphi \end{aligned} \tag{4.26}$$

$q$ が $p_1, p_2$ とくらべて小さいので上の第 3 式より $|\varphi| < 1$，したがって最後の 2 式は

図 1: Cerenkov 放射

$$p_1 \approx q\cos\theta + p_2, \quad 0 = q\sin\theta + p_2\varphi$$

となる．よって，(4.26) の第 1，第 2 式は

$$E_1 = E_2 + \frac{c}{n}q, \quad p_1 = q\cos\theta + p_2.$$

となる．この第 1 式より

$$q = (E_1 - E_2)\frac{n}{c}$$

であるので，これを第 2 式へ代入し

$$p_1 - p_2 = (E_1 - E_2)\frac{n}{c}\cos\theta \longrightarrow \frac{p_1 - p_2}{E_1 - E_2} = \frac{n}{c}\cos\theta \tag{1}$$

が得られる．ここで $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ を使うと，左辺は

$$\frac{p_1 - p_2}{E_1 - E_2} = \frac{p_1 - p_2}{c(\sqrt{p_1^2 + m_1^2c^2} - \sqrt{p_2^2 + m_2^2c^2})} = \frac{(p_1 - p_2)(\sqrt{p_1^2 + m_1^2c^2} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2c^2})}{c(p_1^2 + m_1^2c^2 - p_2^2 - m_2^2c^2)}$$

と有理化した．この放射の前後で荷電粒子の質量に対して $m_1 \approx m_2$ を仮定することできるであろう．よって分母の質量項は相殺し

$$= \frac{(p_1 - p_2)(E_1 + E_2)/c}{c(p_1^2 - p_2^2)} = \frac{E_1 + E_2}{c^2(p_1 + p_2)} \approx \frac{E_2}{c^2p_2} \tag{2}$$

となる．ここで $E_1 \approx E_2$，$p_1 \approx p_2$ とした．よって，(1) に戻り

$$\frac{E_2}{c^2p_2} = \frac{n}{c}\cos\theta \longrightarrow \frac{1}{v} = \frac{n}{c}\cos\theta$$

が得られる．ここで特殊相対論での関係式 $v = pc^2/E$ を考慮して $v \approx p_2c^2/E_2 \approx p_1c^2/E_1$ を使った．従って

$$v\cos\theta = \frac{c}{n} \longrightarrow v \geq \frac{c}{n}$$

となる．なぜなら $|\cos\theta| \leq 1$ からである．Cerenkov 放射は

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{c}{vn}\right)$$

の方向に発せられる．また $\varphi \approx -q\sin\theta/p_2$ で $p_2 \gg q$ であるから粒子の方向は放射前後でほとんど変化しない．

$n = 1$ の場合，すなわち真空中では $v \geq c$ となり，特殊相対性理論に反するので Cerenkov 放射は発生しない．

# 第 6 章　Bose 粒子

## § 6.1 電磁場の Maxwell 方程式

Lorentz 変換の場合，同方向への速度 $v_1, v_2$ の変換を続けて行うと，最期に得られる速度の初めの系に対する値 $v$ は

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \tag{6.15}$$

となり，単に $v_1$ と $v_2$ を加えた速度にはならない．そこで，次の量を導入する．

$$\omega = \log \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \tag{6.16}$$

(6.15) で与えられる $v$ に対して

$$\frac{1 - v/c}{1 + v/c} = \frac{c - v}{c + v} = \frac{c - \dfrac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}}{c + \dfrac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}} = \frac{1 - \dfrac{v_1/c + v_2/c}{1 + v_1 v_2/c^2}}{1 + \dfrac{v_1/c + v_2/c}{1 + v_1 v_2/c^2}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2} - \dfrac{v_1}{c} - \dfrac{v_2}{c}}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2} + \dfrac{v_1}{c} + \dfrac{v_2}{c}} = \frac{1 - v_1/c}{1 + v_1/c} \cdot \frac{1 - v_2/c}{1 + v_2/c}$$

が得られる．ここで，両辺の対数をとると，$\omega = \omega_1 + \omega_2$ となる．微小速度変換 $\Delta v$ の場合には

$$\Delta\omega = -2 \frac{\Delta v}{c}, \tag{6.17}$$

である．

$$\Delta\omega = \log\left(1 - \frac{\Delta v}{c}\right) - \log\left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right) \approx \left(1 - \frac{\Delta v}{c}\right) - \left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right)$$

を使った．

　次にスピンに対応する Lorentz 変換の演算子 $N$ を求める．座標 $x_\mu$ の波動関数 $\psi(x_\mu) = \psi(x, y, z, t)$ に対し微小速度の Lorentz 変換を行う．例えば $z$ 軸方向への速度 $\Delta v$ の Lorentz 変換に対し，すなわち

$$\psi(x_\mu) \to \psi'(x'_\mu)$$

なる変換に対し，微小速度であることを考慮して

$$z' = \frac{z + \Delta v t}{\sqrt{1 - \Delta v^2/c^2}} \approx z + \Delta v t, \quad t' = \frac{t + \dfrac{\Delta v}{c^2} z}{\sqrt{1 - \Delta v^2/c^2}} \approx t + \frac{\Delta v}{c^2} z$$

を使用すると

$$\psi'(x'_\mu) = \psi'(x, y, z + \Delta v t, t + \frac{\Delta v}{c^2} z) \approx \psi(x, y, z, t) + \frac{\Delta v}{c} \left\{ ct \frac{\partial \psi}{\partial z} + z \frac{\partial \psi}{\partial ct} \right\}$$

$$= \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\Delta v}{c}N_z\right)\psi(x_\mu) = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\Delta\omega}{2}N_z\right)\psi(x_\mu).$$

ここで

$$N = \mathrm{i}\hbar\left\{ct\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + \mathbf{r}\frac{\partial}{\partial ct}\right\}, \tag{6.18}$$

である．

無限小 Lorentz 変換を続けて行うと

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\Delta\omega}{2}N_x\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\frac{\omega}{n}N_x\right)^n = \exp\left(\frac{\mathrm{i}\omega}{2\hbar}N_x\right)$$

となる．

$N$ と軌道角運動量 $\mathbf{M}$ の間の交換関係は例えば，

$$[N_x, M_y] = \left[\mathrm{i}\hbar\left(ct\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial ct}\right), -\mathrm{i}\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \hbar^2\left\{\left(ct\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial ct}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(ct\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial ct}\right)\right\}$$

$$= \hbar^2\left\{ct\frac{\partial}{\partial x}z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial ct}z\frac{\partial}{\partial x} - ct\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial}{\partial ct}x\frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

$$-\hbar^2\left\{z\frac{\partial}{\partial x}ct\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}ct\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial ct} - x\frac{\partial}{\partial z}x\frac{\partial}{\partial ct}\right\}$$

ここで

$$ct\frac{\partial}{\partial x}z\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial x}ct\frac{\partial}{\partial x} = ctz\frac{\partial^2}{\partial x^2} - zct\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0,$$

同様に

$$-x\frac{\partial}{\partial ct}x\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial z}x\frac{\partial}{\partial ct} = 0,$$

であるが，一方

$$x\frac{\partial}{\partial ct}z\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial ct} = xz\frac{\partial^2}{\partial(ct)\partial x} - z\left(\frac{\partial}{\partial ct} + zx\frac{\partial^2}{\partial x\partial(ct)}\right) = -z\frac{\partial}{\partial ct}$$

$$-ct\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial z}ct\frac{\partial}{\partial x} = -ct\frac{\partial}{\partial z} - ctx\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + xct\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} = -ct\frac{\partial}{\partial z}$$

となる．これらを交換関係式の中に代入すると

$$[N_x, M_y] = -\hbar^2\left(ct\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial ct}\right) = \mathrm{i}\hbar N_z$$

が得られる．

§ **6.3** 電磁場の量子化

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})\mathrm{d}\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{h}\omega(a^\dagger(\mathbf{k},h)a(\mathbf{k},h)+a(\mathbf{k},h)a^\dagger(\mathbf{k},h)), \qquad (6.52)
\end{aligned}
$$

となる．

//////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////

**(6.52)** 式の導出

全てを書くと見難いので積分記号・係数などは適宜外して書く．

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}^*(\mathbf{k},\omega,h)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{q},\omega',h') \\
&\Rightarrow -\mathrm{i}^2\left(a\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}-a^\dagger\boldsymbol{\epsilon}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right)\cdot\left(a^\dagger\boldsymbol{\epsilon}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega' t)}-a\boldsymbol{\epsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega' t)}\right) \\
&= a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{q})(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\{(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}-(\omega-\omega')t\}}-a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{q})(\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{(\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}-(\omega+\omega')t\}} \\
&\quad -a(\mathbf{k})a(\mathbf{q})(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\{(\mathbf{k}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}-(\omega+\omega')t\}}+a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{q})(\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}-(\omega-\omega')t\}}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ の変数 $\mathbf{k},\mathbf{q}$ は省略した．これの空間積分で (**??**) 式を考慮すると

$$
\begin{aligned}
&= a(\mathbf{k},h)a^\dagger(\mathbf{k},h')\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},h)\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k},h')-a^\dagger(\mathbf{k},h)a^\dagger(-\mathbf{k},h')\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k},h)\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*(-\mathbf{k},h')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t} \\
&\quad -a(\mathbf{k},h)a(-\mathbf{k},h')\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},h)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k},h')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}+a^\dagger(\mathbf{k},h)a(\mathbf{k},h')\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k},h)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},h')
\end{aligned}
$$

となる．ここで光子に関する式 $(m=0)$

$$
k_\mu k_\mu = \omega^2-\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=0, \quad q_\mu q_\mu = {\omega'}^2-\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}=0,
$$

で $\mathbf{q}=\pm\mathbf{k}$ より $\omega=\omega'$ となることを使用した．さらに (**??**) を考慮すると

$$
\begin{aligned}
&= a(\mathbf{k},h)a^\dagger(\mathbf{k},h)-a^\dagger(\mathbf{k},h)a^\dagger(-\mathbf{k},h')\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k},h)\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*(-\mathbf{k},h')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t} \\
&\quad -a(\mathbf{k},h)a(-\mathbf{k},h')\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},h)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k},h')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}+a^\dagger(\mathbf{k},h)a(\mathbf{k},h)
\end{aligned}
$$

を得る．上の式で先頭項と末尾の項のヘリシティ$h,h'$ は既に，両方とも $h$ になっていることに注意．以上が $\mathbf{E}^2$ の計算である．

次に $\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}$ であるが，電場の場合とほぼ同じである．ここで記号を簡略化するために

$$
\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},h)=\mathbf{b}(\mathbf{k},h)=\mathbf{b}(\mathbf{k}), \quad \hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k},h)=\mathbf{b}^*(\mathbf{k},h)=\mathbf{b}^*(\mathbf{k})
$$

とするならば，(**??**) は

$$
\mathbf{H}=-\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{h}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left\{a^\dagger(\mathbf{k},h)\mathbf{b}(\mathbf{k},h)^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}-a(\mathbf{k},h)\mathbf{b}(\mathbf{k},h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right\},
$$

となり，電場の場合と同じ形になる．よって，結果は

$$\mathbf{H}^2 = \mathbf{H}^*(\mathbf{k},\omega,h)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{q},\omega',h')$$

$$\Rightarrow a(\mathbf{k},h)a^\dagger(\mathbf{k},h) - a^\dagger(\mathbf{k},h)a^\dagger(-\mathbf{k},h')\mathbf{b}^*(\mathbf{k},h)\cdot\mathbf{b}^*(-\mathbf{k},h')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}$$

$$-a(\mathbf{k},h)a(-\mathbf{k},h')\mathbf{b}(\mathbf{k},h)\cdot\mathbf{b}(-\mathbf{k},h')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t} + a^\dagger(\mathbf{k},h)a(\mathbf{k},h)$$

最終結果では $aa$ 項と $a^\dagger a^\dagger$ の項が無い．これが消える理由は以下の理由からである．電場と磁場からの寄与をまとめると，例えば $aa$ の場合

$$\{\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},h)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k},h') + \mathbf{b}(\mathbf{k},h)\cdot\mathbf{b}(-\mathbf{k},h')\}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}$$

が係数となる．略記 $\mathbf{b}$ を元に戻してこの式を書くと

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},h)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k},h') + (\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},h))\cdot(-\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k},h'))$$

$$= \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},h)\cdot\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k},h') - (\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},h))\cdot(\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k},h')) = 0$$

となり，$aa$ 項と $a^\dagger a^\dagger$ の項は消える．よって (6.52) 式が得られる．　□

///////////////////////////終り///////////////////////////

# 第 7 章　Fermi 粒子

## 7.1　スピン 1/2 粒子の Dirac 方程式

一般に 2 行 1 列のスピノル $u$ を別のスピノル $u'$ に移す演算子は 2 行 2 列の行列で書ける．この行列は 4 個の要素をもち，それを $a, b, c, d$ とすれば

$$a\mathbf{I} + b\sigma_x + c\sigma_y + d\sigma_z$$

の形で表せる．$\mathbf{N}$ をこの形で書き，条件 (7.6) を満たす $\mathbf{N}$ は

$$\mathbf{N} = \mp \mathrm{i}\mathbf{S} = \mp \mathrm{i}\hbar\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \tag{7.7}$$

であり，2 つの解 $\mathbf{N} = \mp \mathrm{i}\mathbf{S}$ が存在する．

この $\mathbf{N}$ を用いると，スピノル $u$ は $\mathbf{n}$ 方向への「速度 $v$ の Lorentz 変換」に対し

$$u \to u' = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{2\hbar}N_{\mathbf{n}}\right)u = \exp\left(\pm\frac{\omega}{4}\sigma_{\mathbf{n}}\right)u,$$

のように変換する．$N_{\mathbf{n}}, \sigma_{\mathbf{n}}$ は $\mathbf{N}, \boldsymbol{\sigma}$ の $\mathbf{n}$ 方向成分である．上の式の正符号で変換するスピノルを $u$，負の符号で変換するスピノルを $v$ と書く．

$$\begin{aligned} &u \to \exp\Big(\frac{\omega}{4}\sigma_{\mathbf{n}}\Big)u, \quad u^\dagger \to u^\dagger \exp\Big(\frac{\omega}{4}\sigma_{\mathbf{n}}\Big), \\ &v \to \exp\Big(-\frac{\omega}{4}\sigma_{\mathbf{n}}\Big)v, \quad v^\dagger \to v^\dagger \exp\Big(-\frac{\omega}{4}\sigma_{\mathbf{n}}\Big), \end{aligned} \tag{7.8}$$

$u, v$ は空間回転に対しては (7.3)，(7.4) で変換するが，Lorentz 変換に対する変換性が異なる．

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\omega}{2}\sigma_{\mathbf{n}}\right) &= 1 + \frac{\omega}{2}\sigma_{\mathbf{n}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\sigma_{\mathbf{n}}^2 + \cdots \\ &= \left\{1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \cdots\right\} + \sigma_{\mathbf{n}}\left\{\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^3 + \cdots\right\} \\ &= \cosh\frac{\omega}{2} + \sigma_{\mathbf{n}}\sinh\frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} \cosh\frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\omega/2} + \mathrm{e}^{-\omega/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\log\frac{1-v/c}{1+v/c}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\log\frac{1-v/c}{1+v/c}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} + \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}$$

$$\sinh\frac{\omega}{2} = \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

を用いると，たとえば $z$ 方向（$\sigma_{\mathbf{n}} = \sigma_z$）の速度の Lorentz 変換に対し

$$(u^\dagger u)' = u^\dagger \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_{\mathbf{n}}\right)\exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_{\mathbf{n}}\right)u = u^\dagger \exp\left(\frac{\omega}{2}\sigma_z\right)u = u^\dagger\left(\cosh\frac{\omega}{2} + \sigma_{\mathbf{n}}\sinh\frac{\omega}{2}\right)u$$

$$= u^\dagger \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \sigma_z \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) u = \frac{u^\dagger u - \dfrac{v}{c} u^\dagger \sigma_z u}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

更に

$$(u^\dagger \sigma_z u)' = u^\dagger \mathrm{exp}\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) \sigma_z \mathrm{exp}\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) u = u^\dagger \left(\cosh\frac{\omega}{4} + \sigma_z \sinh\frac{\omega}{4}\right) \sigma_z \mathrm{exp}\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) u$$

$$= u^\dagger \left(\sigma_z \cosh\frac{\omega}{4} + \sigma_z^2 \sinh\frac{\omega}{4}\right) \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) u, \quad (\sigma_z \text{を左にかける})$$

$$= u^\dagger \sigma_z \left(\cosh\frac{\omega}{4} + \sigma_z \sinh\frac{\omega}{4}\right) \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) u, \quad (\sigma_z \text{を括弧の前に出す})$$

$$= u^\dagger \sigma_z \mathrm{exp}\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) u = u^\dagger \sigma_z \mathrm{exp}\left(\frac{\omega}{2}\sigma_z\right) u = \frac{u^\dagger \sigma_z u - \dfrac{v}{c} u^\dagger u}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

を得る．最後の式，最右辺の分子には $\sigma_z^2 = 1$ を使った．

次に

$$(u^\dagger \sigma_x u)' = u^\dagger \mathrm{exp}\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) \sigma_x \mathrm{exp}\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) u$$

$$= u^\dagger \left(\sigma_x \cosh\frac{\omega}{4} + \sigma_z \sigma_x \sinh\frac{\omega}{4}\right) \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) u$$

$$= u^\dagger \sigma_x \left(\cosh\frac{\omega}{4} - \sigma_z \sinh\frac{\omega}{4}\right) \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) u, \quad (\sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z)$$

$$= u^\dagger \sigma_x \mathrm{exp}\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) \exp\left(\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) u = u^\dagger \sigma_x u$$

最後に

$$(u^\dagger \sigma_y u)' = u^\dagger \sigma_y u$$

となるが，ここでも $\sigma_z \sigma_y = -\sigma_y \sigma_z$ を使った．以上より，$u^\dagger \boldsymbol{\sigma} u, u^\dagger u$ は速度の」Lorentz 変換に対して $\mathbf{r}, ct$ のように変換する．すなわち 4 次元ベクトルである．

再度繰り返すと，$(u^\dagger \boldsymbol{\sigma} u, u^\dagger u)$ は速度の Lorentz 変換に対して，座標の Lorentz 変換のように変換される．要は $(u^\dagger \boldsymbol{\sigma} u, u^\dagger u)$ が Lorentz 座標変換と同じように変換するので $(u^\dagger \boldsymbol{\sigma} u, u^\dagger u)$ は 4 元ベクトルであるということを言いたいのである．同様に，$v^\dagger \boldsymbol{\sigma} v, v^\dagger v$ は $-\mathbf{r}, ct$ のように変換する．これは空間反転した世界での 4 次元ベクトルと同じ変換である．

**[問題 7.2]** $v^\dagger \boldsymbol{\sigma} v, v^\dagger v$ は速度の Lorentz 変換に対し $-\mathbf{r}, ct$ のように変換することを示せ．

**[解]** $v^\dagger v$ はほぼあきらか．

$$(v^\dagger v)' = v^\dagger \mathrm{exp}\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_{\mathbf{n}}\right) \exp\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_z\right) v = v^\dagger \mathrm{exp}\left(-\frac{\omega}{2}\sigma_z\right) v = v^\dagger \left(\cosh\frac{\omega}{2} - \sigma_z \sinh\frac{\omega}{2}\right) v$$

$$= v^\dagger \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \sigma_z \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) v = \frac{v^\dagger v - \dfrac{v}{c}(-v^\dagger \sigma_z v)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

次に，$v^\dagger\sigma_z v$

$$(v^\dagger\sigma_z v)' = v^\dagger \mathrm{exp}\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)\sigma_z \mathrm{exp}\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)v = v^\dagger\left(\cosh\frac{\omega}{4} - \sigma_z\sinh\frac{\omega}{4}\right)\sigma_z\mathrm{exp}\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)v$$

$$= v^\dagger\left(\sigma_z\cosh\frac{\omega}{4} - \sigma_z^2\sinh\frac{\omega}{4}\right)\exp\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)v,$$

$$= v^\dagger\sigma_z\left(\cosh\frac{\omega}{4} - \sigma_z\sinh\frac{\omega}{4}\right)\exp\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)v,$$

$$= v^\dagger\sigma_z\mathrm{exp}\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)\exp\left(-\frac{\omega}{4}\sigma_z\right)v = v^\dagger\sigma_z\mathrm{exp}\left(-\frac{\omega}{2}\sigma_z\right)v$$

$$= v^\dagger\sigma_z\left(\cosh\frac{\omega}{2} - \sigma_z\sinh\frac{\omega}{2}\right)v$$

$$= v^\dagger\sigma_z\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \sigma_z\frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)v = \frac{v^\dagger\sigma_z v + \frac{v}{c}v^\dagger v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

となるので，全体にマイナスをかけて

$$(-v^\dagger\sigma_z v)' = \frac{(-v^\dagger\sigma_z v) - \frac{v}{c}v^\dagger v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

また，$(-v^\dagger\sigma_x v)' = -v^\dagger\sigma_z v$ も前と同様に示せる．よって $(v^\dagger\boldsymbol{\sigma}v, v^\dagger v)$ は速度の Lorentz 変換に対して座標 $(-\mathbf{r}, ct)$ の Lorentz 座標変換のように変換される． □

以上をまとめると

////////////////////////////////////////////////////////////

$u^\dagger\boldsymbol{\sigma}u$ と $u^\dagger u$ という量に「速度の Lorentz 変換」を加えて得られた結果をまとめて $((u^\dagger\boldsymbol{\sigma}u)', (u^\dagger u)')$ とすると，これは 4 元ベクトルの Lorentz「座標」変換と同じように変換されている．したがってこの複雑な意味を持つ $(u^\dagger\boldsymbol{\sigma}u, u^\dagger u)$ を 4 元ベクトルと考えることができる．

////////////////////////////////////////////////////////////

## § 7.3 Fermi 粒子の量子化

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_h\sum_{\mathbf{p}}\left\{a(\mathbf{p},h)u(\mathbf{p},h)\mathrm{exp}\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)\right.$$

$$\left. b^\dagger(\mathbf{p},h)v(-\mathbf{p},h)\mathrm{exp}[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)]\right\} \tag{7.53}$$

とする．$u(\mathbf{p},h), v(\mathbf{p},h)$ はそれぞれ正負エネルギーの Dirac 方程式 (7.42) の解である ($v(-\mathbf{p},h), -t$ としているのは，時間反転を反転させ反粒子をイメージしている)．

同様に点 $x$ で $\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger\gamma_0$ を量子化すると

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}(x) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}\sum_h\sum_{\mathbf{p}}\left\{a^\dagger(\mathbf{p},h)\overline{u}(\mathbf{p},h)\mathrm{exp}[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)]\right.$$

$$b(\mathbf{p},h)\overline{v}(-\mathbf{p},h)\exp\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)\Big\} \tag{7.54}$$

となる．

(7.53)，(7.54) 式で $h$ につての和は $h=\pm 1$，$\mathbf{p}$ についての和は

$$(p_x,p_y,p_z)=\frac{2\pi\hbar}{L}(n_x,n_y,n_z), \quad n_x,n_y,n_z=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{7.55}$$

とする．

次に，自由なスピン 1/2 粒子の場のエネルギーを求めよう．1 個の粒子のエネルギー密度は (7.33) で与えられるから，次式を全空間で積分する．

$$H=\int \overline{\boldsymbol{\psi}}(x)(c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}+mc^2)\boldsymbol{\psi}(x)\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{7.56}$$

(7.53)，(7.54) 式を代入し，(**??**)，(**??**) 式および

$$\frac{1}{L^3}\int \exp\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{r}=\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$$

を使うと

$$H=\sum_h\sum_{\mathbf{p}}E\left\{a^\dagger(\mathbf{p},h)a(\mathbf{p},h)-b(\mathbf{p},h)b^\dagger(\mathbf{p},h)\right\},\quad E=\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}>0 \tag{7.57}$$

になる．

////////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////

**(7.57) 式の導出**

和の記号や係数を随時省略し，また $\alpha=\mathrm{i}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)/\hbar$，$\alpha'=\mathrm{i}(\mathbf{p'}\cdot\mathbf{r}-Et)/\hbar$ と略記する．被積分関数は

$$(a^\dagger\overline{u}\mathrm{e}^{-\alpha}+b\overline{v}\mathrm{e}^{\alpha})[c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}+mc^2](au\mathrm{e}^{\alpha'}+b^\dagger v\mathrm{e}^{-\alpha'}) \tag{3}$$

であるが，これを $c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}$ と $mc^2$ の 2 つに分けて計算する：

$$(a^\dagger\overline{u}\mathrm{e}^{-\alpha}+b\overline{v}\mathrm{e}^{\alpha})c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}(au\mathrm{e}^{\alpha'}+b^\dagger v\mathrm{e}^{-\alpha'})=a^\dagger a\overline{u}(c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p})u\mathrm{e}^{-(\alpha-\alpha')}$$

$$+ba\overline{v}(c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p})u\mathrm{e}^{(\alpha+\alpha')}+a^\dagger b^\dagger\overline{u}(c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p})v\mathrm{e}^{-(\alpha+\alpha')}+bb^\dagger\overline{v}(c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p})v\mathrm{e}^{(\alpha-\alpha')} \tag{4}$$

となるが，空間積分で $\mathbf{p}-\mathbf{p}'=0$ のときのみゼロでなくなること

$$\frac{1}{L^3}\int \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}\right\}\mathrm{d}\mathbf{r}=\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$$

を使うと，(4) の真ん中の項 2 つが消え，

$$(4)=a^\dagger a\overline{u}(\mathbf{p},h)c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}u(\mathbf{p},h)+bb^\dagger\overline{v}(-\mathbf{p},h)c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}v(-\mathbf{p},h) \tag{5}$$

まったく同様に，$mc^2$ の部分は

$$mc^2\{a^\dagger a\overline{u}(\mathbf{p},h)u(\mathbf{p},h)+bb^\dagger\overline{v}(-\mathbf{p},h)v(-\mathbf{p},h)\} \tag{6}$$

となる．

次に，(5) 式の $\overline{u}(\mathbf{p},h)(c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p})u(\mathbf{p},h)$ は次のように計算される：

$$u=\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix},\quad \xi=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},\quad \eta=\begin{pmatrix}u_3\\ u_4\end{pmatrix},$$

とする．なお，記号は (**??**) を使っている．よって，

$$\overline{u}(\mathbf{p},h)(c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p})u(\mathbf{p},h)=u^\dagger\gamma_0(c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p})u=(\xi^*,\eta^*)\gamma_0(c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$=(\xi^*,-\eta^*)\begin{pmatrix}0 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\\ -c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\xi^*,-\eta^*)\begin{pmatrix}c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\ \eta\\ -c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\ \xi\end{pmatrix}$$

$$=\xi^*(c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\eta+\eta^*(c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\xi=(u_1^*,u_2^*)c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\begin{pmatrix}u_3\\ u_4\end{pmatrix}+(u_3^*,u_4^*)c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\tag{7}$$

ここで Dirac 方程式 (**??**) より

$$\begin{pmatrix}u_3\\ u_4\end{pmatrix}=\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+mc^2}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},\quad (u_3^*,u_4^*)=\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+mc^2}(u_1^*,u_2^*)$$

であるから，これらを (7) 式へ代入すると

$$\frac{c^2}{|E|+mc^2}(u_1^*,u_2^*)\{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2\}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2c^2}{|E|+mc^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2(u_1^*,u_2^*)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\frac{2c^2}{|E|+mc^2}|\mathbf{p}|^2N^2=\frac{c^2|\mathbf{p}|^2}{|E|}\tag{8}$$

となる．ここで $E>0$ の場合の解，(**??**) を使っており，$u_1=N\times 1, u_2=N\times 0$ であるので $u_1^*u_1+u_2^*u_2=N^2$ となることに注意．もちろん $N$ は (**??**) で定義されている．

さて $c^2|\mathbf{p}|^2=|E|^2-m^2c^4$ であるから，これを (8) へ代入すると，最終的に (5) 式の先頭項は

$$a^\dagger a\overline{u}(\mathbf{p},h)c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}u(\mathbf{p},h)=a^\dagger a\frac{|E|^2-m^2c^4}{|E|}\tag{9}$$

となる．

次に，(5) 式の $bb^\dagger\overline{v}(-\mathbf{p},h)c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}v(-\mathbf{p},h)$ について．この項はすでに明らか

なように，$a^\dagger a\overline{u}(\mathbf{p},h)c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}u(\mathbf{p},h)$ と同じように計算でき，(7) 式までは同じであるの：

$$v(-\mathbf{p},h)=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix},\quad \xi'=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix},\quad \eta'=\begin{pmatrix} v_3\\ v_4\end{pmatrix},$$

とする．よって $\overline{v}(-\mathbf{p},h)c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}v(-\mathbf{p},h)$ は

$$\overline{v}(-\mathbf{p},h)c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}v(-\mathbf{p},h)=(v_1^*,v_2^*)c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\begin{pmatrix} v_3\\ v_4\end{pmatrix}+(v_3^*,v_4^*)c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix} \tag{10}$$

次に Dirac 方程式の使用であるが，ここでは $v(-\mathbf{p},h)$ であるので，方程式で $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ とする必要がある．よって

$$\begin{pmatrix} v_3\\ v_4\end{pmatrix}=\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathbf{p})}{|E|+mc^2}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix},\quad (v_3^*,v_4^*)=\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\mathbf{p})}{|E|+mc^2}(v_1^*,v_2^*) \tag{11}$$

となり，これを (10) に代入し，$(u_3^*,u_4^*)$ 等を消去すると，符合はマイナスとなるが

$$\overline{v}(-\mathbf{p},h)c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}v(-\mathbf{p},h)=-\frac{c^2|\mathbf{p}|^2}{|E|} \tag{12}$$

が導かれる．よって

$$bb^\dagger\overline{v}(-\mathbf{p},h)c\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}v(-\mathbf{p},h)=-b^\dagger b\frac{|E|^2-m^2c^4}{|E|}. \tag{13}$$

さて (6) 式 $mc^2$ の項に移る．計算するまでも無くテキストでの結果，(**??**) を使えば

$$mc^2\frac{mc^2}{|E|}\{a^\dagger a-bb^\dagger\} \tag{14}$$

こうして，(7.56) の計算は (9)，(13)，(14) を加えることによって，(7.57)

$$H=\sum_h\sum_{\mathbf{p}}E\left\{a^\dagger(\mathbf{p},h)a(\mathbf{p},h)-b(\mathbf{p},h)b^\dagger(\mathbf{p},h)\right\},\quad E=|E|>0$$

が得られる． □

////////////////////////////終り/////////////////////////////////

# 第 8 章　荷電粒子と電磁場の相互作用

## § 8.3　電子と電磁場の相互作用

[遅い電子の運動]

運動エネルギー，$e|A_0|, e|\mathbf{A}|$ が電子の静止質量にくらべて小さい場合の電子の運動を考える．これは電子が遅い運動をしており，かつ電磁場のエネルギーが電子の静止質量にくらべて小さい場合に相当する．(**??**) の左から

$$(E+eA_0)\mathbf{I}+c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)+mc^2\beta$$

をかけると

$$\left\{(E+eA_0)\mathbf{I}+c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)+mc^2\beta\right\}\left\{(E+eA_0)\mathbf{I}-c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)-mc^2\beta\right\}\boldsymbol{\psi}$$

$$=\left[(E+eA_0)^2\mathbf{I}-c^2\left\langle\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right\rangle^2-m^2c^4\mathbf{I}-c\left\{(E+eA_0)\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)(E+eA_0)\right\}\right]\psi=0.$$

さらに任意の 3 次元ベクトル $\mathbf{K},\mathbf{L}$ に対し $\boldsymbol{\alpha}$ の交換関係を用いると

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{K})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{L})=(\mathbf{K}\cdot\mathbf{L})+\mathrm{i}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{K}\times\mathbf{L}) \tag{8.12}$$

が得られる．これを用いると

$$\left\langle\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right\rangle^2\mathbf{I}=\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\mathbf{I}+\mathrm{i}\left\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\times\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right\}$$
$$=\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\mathbf{I}+\frac{e\hbar}{c}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{H}) \tag{8.13}$$

となる．念のため $\mathbf{I}$ をつけた．$\boldsymbol{\alpha}$ は 4 × 4 行列である．ここで

$$\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\times\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)=\frac{e}{c}(\mathbf{p}\times\mathbf{A}+\mathbf{A}\times\mathbf{p})=-\mathrm{i}\frac{e\hbar}{c}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\times\mathbf{A}+\mathbf{A}\times\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)$$
$$=-\mathrm{i}\frac{e\hbar}{c}\mathrm{rot}\mathbf{A}=-\mathrm{i}\frac{e\hbar}{c}\mathbf{H}$$

を用いた．また（以下，途中計算も記す）

$$(E+eA_0)\left\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right\}-\left\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right\}(E+eA_0)$$
$$=\boldsymbol{\alpha}\cdot\left\{(E+eA_0)\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)-\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)(E+eA_0)\right\}$$
$$=\boldsymbol{\alpha}\cdot\left\{(E\mathbf{p}-\mathbf{p}E)+e(A_0\mathbf{p}-\mathbf{p}A_0)+\frac{e}{c}(E\mathbf{A}-\mathbf{A}E)+\frac{e^2}{c}(A_0\mathbf{A}-\mathbf{A}A_0)\right\}$$
$$=\boldsymbol{\alpha}\cdot\left\{e(A_0\mathbf{p}-\mathbf{p}A_0)+\frac{e}{c}(E\mathbf{A}-\mathbf{A}E)\right\}=-\mathrm{i}e\hbar\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E} \tag{8.14}$$

となる．つまり，$(E\mathbf{p}-\mathbf{p}E)=0$ と $(A_0\mathbf{A}-\mathbf{A}A_0)=0$ となることである．(4.19) 式より $[H,\mathbf{p}]=0$ であるから，定常とすると $H=E$ で前者が成立す

る．また問題 [6.9] で $[A_\mu, A_\nu] = \delta_{\mu\nu}$ とあるから，後者も 0 となるのか．
　次に残った項であるが，

$$\mathbf{p} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}, \quad E = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

より

$$\mathrm{i}e\hbar\boldsymbol{\alpha}\cdot\left\{\left(-A_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}A_0\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \mathbf{A}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\} = \mathrm{i}e\hbar\boldsymbol{\alpha}\cdot\left\{\frac{\partial A_0}{\partial\mathbf{r}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right\}$$

ここで，例えば

$$\left(-A_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}A_0\right)\psi = -A_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\psi + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(A_0\psi) = \frac{\partial A_0}{\partial\mathbf{r}}\psi$$

である．

[水素原子のスペクトル]
水素原子は陽子の作る電場 (Coulomb 場) により，電子が陽子の周りのに結び付けられた状態と考えられる．陽子は重く静止していると考えられるから

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad A_0 = \frac{e}{4\pi r}, \tag{8.24}$$

である．したがって，(8.15) により

$$\mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial A_0}{\partial\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{e}{4\pi r^2}, \tag{8.25}$$

が得られる．これを (8.21) に代入すると

$$\left\{W + eA_0 + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2mc^2}(W+eA_0)^2 - \frac{e\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r\hbar}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell})\right)\right\}\boldsymbol{\psi} = 0, \tag{8.26}$$

ただし，$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ は電子の軌道角運動量である．
///////////////////////////始まり///////////////////////////////////////
以上では

$$\frac{\mathrm{i}e\hbar}{4m^2c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{p}) = -\frac{\mathrm{i}e\hbar}{4m^2c^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}r}\cdot\mathbf{p} = -\frac{\mathrm{i}e\hbar}{4m^2c^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}r}\cdot(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}) = -\frac{e\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$$

となる．ここで

$$\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} = \frac{r}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$$

である．また

$$-\frac{e\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{p}) = -\frac{e\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(-\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}r}\times\mathbf{p}) = \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}r}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$$

$$= \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\ell}$$

などを使った．
////////////////////////////終り/////////////////////////////////////

§ 8.4 荷電粒子と物質との相互作用

【荷電粒子の制動放射】

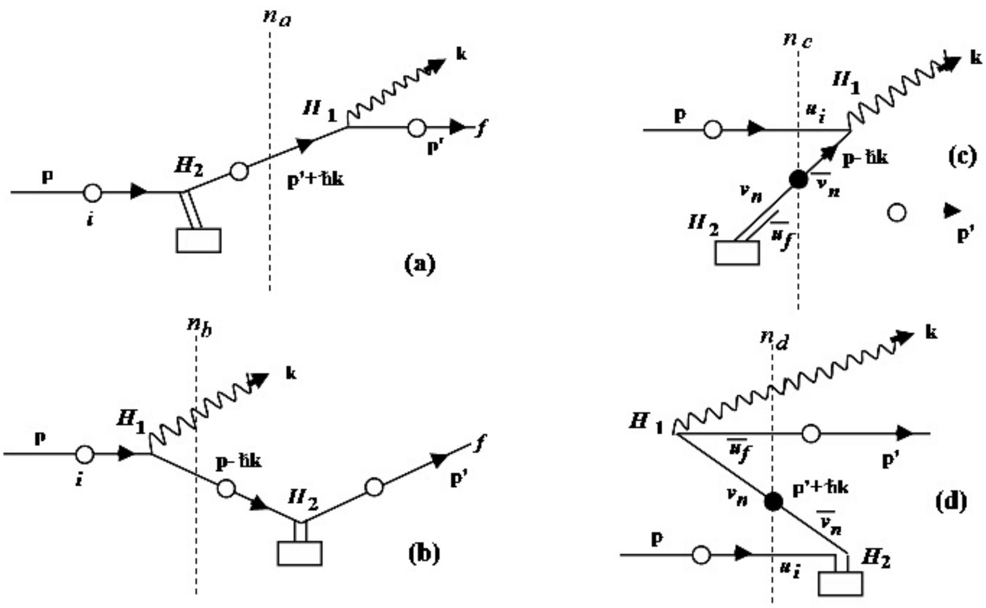


図 2: 制動放射, ○電子，●陽電子，□原子核

これら中間状態と遷移の様子は図 2(a)-(d) に示す．(a) 図ではまず入射した電子が Rutherford 散乱をうけ ($H_2$)，次に $H_1$ により光子を放出する．(b) 図では，その順序が逆になっている．(c) 図は $H_2$ により核の Coulomb 場で電子対が生成され，その陽電子が入射電子と対消滅して光になる ($H_1$)．(d) 図では $H_1$ により $f$ 状態の光子・電子の他に陽電子が作られ，次に $H_2$ により，この陽電子が入射電子と対消滅する．

$E, E_n$ は $i$(または $f$) 状態のエネルギーと，$n$ 状態でのエネルギーで，中間状態ではエネルギーの保存則は要求されないから，$E_n$ は $E$ と異なる．

核は非常に重いので衝突中運動量はもらうがエネルギーはほとんど受けと

らないとすると，

$$E - E_n = \begin{cases} c\hbar k + E(\mathbf{p}') - E(\mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k}) & \cdots \mathrm{a}), \\ -c\hbar k + E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}) & \cdots \mathrm{b}), \\ c\hbar k - E(\mathbf{p}) - E(-\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}) & \cdots \mathrm{c}), \\ -c\hbar k - E(\mathbf{p}') - E(-\mathbf{p}' - \hbar\mathbf{k}) \cdots \mathrm{d}), \end{cases} \tag{8.84}$$

光子 $(\mathbf{k}, \lambda)$ を放出する $H_1$ の遷移行列は $A_\mu, , \boldsymbol{\psi}, \overline{\boldsymbol{\psi}}$ に対する展開 (6.43), (7.53), (7.54) を使って求められる．

$$\begin{aligned} \langle f|H_1|n\rangle &= c\sqrt{\frac{c\hbar}{2k}} L^{-3/2} \overline{u}(\mathbf{p}', h') \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k}, h_n) \cdots \mathrm{a}), \\ \langle n|H_1|i\rangle &= c\sqrt{\frac{c\hbar}{2k}} L^{-3/2} \overline{u}(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}, h_n) \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{p}, h) \quad \cdots \mathrm{b}), \\ \langle f|H_1|n\rangle &= c\sqrt{\frac{c\hbar}{2k}} L^{-3/2} \overline{v}(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}, h_n) \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{p}, h) \quad \cdots \mathrm{c}), \\ \langle n|H_1|i\rangle &= c\sqrt{\frac{c\hbar}{2k}} L^{-3/2} \overline{u}(\mathbf{p}', h') \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) \boldsymbol{\gamma} v(\mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k}, h_n) \cdots \mathrm{d}) \end{aligned} \tag{8.85}$$

である．同様に $H_2$ による部分は

$$\begin{aligned} \langle n|H_2|i\rangle &= -\frac{\hbar^2 z e^2}{q^2} \frac{1}{L^3} \overline{u}(\mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k}, h_n) \gamma_0 u(\mathbf{p}, h) \quad \cdots \mathrm{a}) \\ \langle f|H_2|n\rangle &= -\frac{\hbar^2 z e^2}{q^2} \frac{1}{L^3} \overline{u}(\mathbf{p}', h') \gamma_0 u(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}, h_n) \quad \cdots \mathrm{b}) \\ \langle n|H_2|i\rangle &= -\frac{\hbar^2 z e^2}{q^2} \frac{1}{L^3} \overline{u}(\mathbf{p}', h') \gamma_0 v(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}, h_n) \quad \cdots \mathrm{c}) \\ \langle f|H_2|n\rangle &= -\frac{\hbar^2 z e^2}{q^2} \frac{1}{L^3} \overline{v}(\mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k}, h_n) \gamma_0 u(\mathbf{p}, h) \quad \cdots \mathrm{d}) \end{aligned} \tag{8.86}$$

である．$\mathbf{q}$ は Rutherford 散乱のときの運動量変化で

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k} - \mathbf{p}. \tag{8.87}$$

電子 $(\mathbf{p}, h)$ の消滅の演算子を $a_i$，電子 $(\mathbf{p}', h')$ の生成演算子を $a_f^\dagger$，$n$ 状態に存在するもう 1 つの電子 (または陽電子) の生成・消滅演算子を $a_n^\dagger, a_n$(または $b_n^\dagger, b_n$) で記すと，(a)〜(d) の遷移で，これら演算子の積の順序は

$$a_f^\dagger a_n a_n^\dagger a_i, \qquad (\mathrm{a}), (\mathrm{b})$$

$$b_n a_i a_f^\dagger b_n^\dagger, \qquad (\mathrm{c}), (\mathrm{d})$$

である (a)〜(d) の要素の波動関数部分を抜き出して書くと,

$$
\begin{aligned}
H_1H_2 &: \overline{u} \;\; u \;\; \overline{u} \;\; u \qquad \cdots \text{a)} \\
H_2H_1 &: \overline{u} \;\; u \;\; \overline{u} \;\; u \qquad \cdots \text{b)} \\
H_1H_2 &: \overline{v} \;\; u \;\; \overline{u} \;\; v \qquad \cdots \text{c)} \\
H_2H_1 &: \overline{v} \;\; u \;\; \overline{u} \;\; v \qquad \cdots \text{d)}
\end{aligned}
$$

となる．(7.53), (7.54) によれば，$\overline{u}$ には $a^\dagger$ が付き，$u$ には $a$，$\overline{v}$ には $b$，$v$ には $b^\dagger$ が付くので上記のような演算子の並びになる．なお，(c),(d) の陽電子を含む場合の並び順は時間が逆転しているため，図 2 より判断する.. これらは交換関係を用いて書き直すと

$$
a_f^\dagger a_i a_n a_n^\dagger, \qquad \cdots \text{(a)}, \text{(b)}, \qquad -a_f^\dagger a_i b_n b_n^\dagger \qquad \cdots \text{(c)}, \text{(d)}
$$

となり，$i \to f$ 遷移に対して (a),(b) と (c),(d) では符合が異なる．

////////////////////////////始まり/////////////////////////////////////

(7.57) の交換関係式を使い例えば $[\{a_n^\dagger, a_i\} = 0$, 何故なら $\mathbf{p}_n \neq \mathbf{p}_i$. よって，$a_n^\dagger a_i = -a_i a_n^\dagger$. などを考慮すると

$$
a_f^\dagger a_n \underbrace{a_n^\dagger a_i} = -a_f^\dagger \underbrace{a_n a_i} a_n^\dagger = -a_f^\dagger(-a_i a_n)a_n^\dagger = a_f^\dagger a_i a_n a_n^\dagger
$$

であり，(c) については $b_n a_i = -a_i b_n$，$a_i a_f^\dagger = -a_f^\dagger a_i$ 等より

$$
b_n a_i a_f^\dagger b_n^\dagger = -a_i b_n a_f^\dagger b_n^\dagger = a_i a_f^\dagger b_n b_n^\dagger = -a_f^\dagger a_i b_n b_n^\dagger.
$$

////////////////////////////終り/////////////////////////////////////

終状態の状態密度 $\rho$ は

$$
\rho \mathrm{d}E = \frac{L^6}{(2\pi\hbar)^6}\mathrm{d}\mathbf{p}'\mathrm{d}(\hbar\mathbf{k}) = \frac{L^6}{(2\pi)^6}\frac{p'E'\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega' k^2\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega_k}{\hbar^3 c^2}
$$

となる．ここで $\mathrm{d}\Omega'$ と $\mathrm{d}\Omega_k$ は $\mathbf{p}', \mathbf{k}$ 方向の立体角である．

//////////////////////////////始まり/////////////////////////////////////

**上の式の導出**

(2.45) 式などを考えると上の式は

$$
\rho \mathrm{d}\mathbf{p}'\mathrm{d}E = \rho \underbrace{p'^2\mathrm{d}p'\mathrm{d}\Omega'}\mathrm{d}E = \rho p'(p'\mathrm{d}p')\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}E = \rho p'\frac{E'}{c^2}\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}E \tag{15}
$$

の誤記ではないか．なお，ここでエネルギーの式 $E'^2 - p'^2c^2 = m^2c^4$ を微分して得られる

$$
E'\mathrm{d}E' = c^2 p'\mathrm{d}p'
$$

を使用した．つぎに $\mathrm{d}E$ 部分は $E \propto c\hbar k$ を考慮し，$\rho$ の測度をつけ

$$
\rho \mathrm{d}\mathbf{p}'\mathrm{d}E = \frac{L^6}{(2\pi\hbar)^6}p'\frac{E'}{c^2}\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega' c\mathrm{d}(\hbar\mathbf{k}) = \frac{L^6}{(2\pi\hbar)^6}p'\frac{E'}{c^2}\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega' c\hbar^3 k^2\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega_k
$$

$$= \frac{L^6}{(2\pi)^6}\frac{p'E'\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega' ck^2\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega_k}{\hbar^3c^2} \tag{16}$$

とする．テキストと異なるのは分子に $c$ が 1 つ残る．$\mathrm{d}(\hbar\mathbf{k})$ での変数は $\hbar\mathbf{k} = \hbar k_x\hbar k_y\hbar k_z = \hbar^3 k_xk_yk_z$ と考えた．また，テキストには「$E = E' + c\hbar k$ なので，$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E'$ である」，とあるが $\mathrm{d}E = \mathrm{d}E' + c\hbar\mathrm{d}k$ ではないか？理解できない．ひとまず $\mathrm{d}E' \approx \mathrm{d}E$ として

$$\rho\mathrm{d}\mathbf{p}' = \frac{L^6}{(2\pi)^6}\frac{p'E'\mathrm{d}\Omega' ck^2\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega_k}{\hbar^3c^2} \tag{8.88}$$

とする．

制動放射の断面積は $w(8.82)$ に $L^3/V = L^3E/(pc^2)$ をかけて得られる．こうあるが $V$ の説明がない．p.29 に書かれた $v$，すなわち粒子の入射速度と考え，p.29 にも書かれているように

$$\frac{L^3}{v} = \frac{L^3}{V} = L^3\frac{m}{p} = \frac{L^3mc^2}{pc^2} = \frac{L^3E}{pc^2} \tag{17}$$

という変形をして $w(\textbf{??})$ にかける．

次に，各波動関数の係数の積を計算すると

$$e^2\frac{c\hbar}{2k}\frac{1}{L^3}\frac{\hbar^4z^2e^4}{q^4}\frac{1}{L^6} \tag{18}$$

が得られる．よって，(16)，(17)，(18)，の積を考えると

$$\frac{L^6}{(2\pi)^6}\frac{p'E'\mathrm{d}\Omega' ck^2\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega_k}{\hbar^3c^2} \times \frac{L^3E}{pc^2} \times e^2\frac{c\hbar}{2k}\frac{1}{L^3}\frac{\hbar^4z^2e^4}{q^4}\frac{1}{L^6}$$
$$= \frac{\hbar^2}{(2\pi)^6}\frac{z^2e^4}{q^4}e^2\frac{1}{c^3}\frac{p'E'E\mathrm{d}\Omega' k\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega_k}{2p} \equiv T$$

が得られる．最終的な結果を得るには $w(8.82)$ に記されているように $2\pi/\hbar$ をかける必要があるので，エネルギーの部分を外した係数は

$$\frac{2\pi}{\hbar}T = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{\hbar^2}{(2\pi)^6}\frac{z^2e^4}{q^4}e^2\frac{1}{c^3}\frac{p'E'E\mathrm{d}\Omega' k\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega_k}{2p}$$
$$= \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)\frac{\hbar^2}{(2\pi)^4}\frac{z^2e^4}{q^4}\frac{p'E'E\mathrm{d}\Omega' k\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega_k}{pc^2} \tag{19}$$

となり，これは以下 (8.89) 式の散乱断面積の係数である．したがって，(16) 式では分子に $c$ が 1 つ必要である．この部分，テキストでは省略が多いし，誤記が 2 箇所ある． □

//////////////////////////////終り////////////////////////////////////

**(a) 電子の速度の遅い場合** (非相対論的場合)

電子の速度 $V \ll c$ の場合の $\mathrm{d}\sigma$ を計算する．この近似では $p, p' \ll mc$ でエネルギー保存則は

$$c\hbar k = \frac{1}{2m}(p^2 - {p'}^2)$$

となる．$\hbar k \ll p, p'$，$\mathbf{q} \approx \mathbf{p} - \mathbf{p}'$，$E \approx E' \approx mc^2$ である．

$$\overline{u}_+ \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{p}, h) \sim \frac{(\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \mathbf{p})}{mc}, \quad \overline{u}(\mathbf{p}', h') \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} u_+ \sim \frac{(\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \mathbf{p}')}{mc} \tag{20}$$

////////////////////////////始まり//////////////////////////

**上の式 (20) の導出**

つまり

$$\overline{u}_+ \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{p}, h) \sim \frac{(\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \mathbf{p})}{mc}$$

の導出を行う．問題 7.6 を参照する．

$$\overline{u}_+ \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{p}, h) = \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \underbrace{\overline{u}_+ \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{p}, h)}$$

の後ろの部分を変形していく．

$$\overline{u}_+ \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{p}, h) = u^\dagger \gamma_0 \gamma_0 \boldsymbol{\alpha} u(\mathbf{p}, h) = u^\dagger \boldsymbol{\alpha} u(\mathbf{p}, h)$$

である．問題 7.6 の解答にあるように

$$u^\dagger \boldsymbol{\alpha} u(\mathbf{p}, h) = (u_1^*, u_2^*) \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} + (u_3^*, u_4^*) \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

となり，また Dirac 方程式より

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + mc^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (u_3^*, u_4^*) = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + mc^2} (u_1^*, u_2^*)$$

であるから，これらを上の式に代入すると

$$u^\dagger \boldsymbol{\alpha} u(\mathbf{p}, h) = \frac{c}{|E| + mc^2} \Big( (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \boldsymbol{\sigma} + \ \boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \Big) (u_1^*, u_2^*) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{c}{|E| + mc^2} 2\mathbf{p} N^2$$

が得られる．ここで $u$ として (**??**)

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z/(|E| + mc^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

を使った．規格化定数 $N$ を入れると

$$u^\dagger \boldsymbol{\alpha} u(\mathbf{p}, h) = \frac{c}{|E| + mc^2} 2\mathbf{p} \frac{|E| + mc^2}{2|E|} = \frac{c\mathbf{p}}{|E|}$$

が得られる．よって，

$$\overline{u}_+\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{\gamma}u(\mathbf{p},h)=\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\overline{u}_+\boldsymbol{\gamma}u(\mathbf{p},h)=\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\frac{c\mathbf{p}}{|E|}=\frac{c\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\mathbf{p}}{mc^2}=\frac{\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\mathbf{p}}{mc}$$

が導かれる．したがって，この場合は上の式最左辺と最右辺は $\sim$ では無く，イコールで結ばれる．もう一方も同様に導出され，また同様にイコールの関係式である．

////////////////////////終り////////////////////////////////

**p.191 下部**

中間状態が $u_-(=v)$ である陽電子発生を媒介とする制動放射 ((c),(d)) の遷移行列要素 $T$ は $V\ll c$ の場合，(a),(b) と比べて $\hbar k/(mc)$ の程度小さいので省略できる．つまり式 (8.89) の絶対値記号内分母のエネルギーで，中間状態が陽電子の場合，分母は $E-(c\hbar k-E')\approx 2E\approx 2mc^2$，$E+E_n\approx 2mc^2$ となる．よって，電子の場合の分母は $c\hbar k$ であるから，その比は $c\hbar k/(2mc^2)\sim\hbar k/(mc)$ 程度分母は大きくなるので，陽電子の場合の振幅は考えなくてよい．$\mathrm{d}\sigma$ は上の近似式を代入することで

$$\mathrm{d}\sigma\approx\frac{z^2\alpha^3}{\pi^2}\frac{p'\hbar^2}{kpq^4}(\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\mathbf{q})^2\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}\Omega_k\mathrm{d}k \tag{21}$$

となる．

//////////////////////////////////始まり//////////////////////////////

上記の近似式 (21) を (8.89) 式の絶対値記号内へ代入する：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma&=\frac{\alpha z^2e^4\hbar^2}{(2\pi)^4c^2}\frac{kp'E'E}{pq^4}\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}\Omega_k\mathrm{d}k\left|\frac{\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\mathbf{p}}{-mc(c\hbar k)}+\frac{\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\mathbf{p}'}{mc(c\hbar k)}\right|^2\\&=\frac{\alpha z^2e^4\hbar^2}{(2\pi)^4c^2}\frac{kp'E'E}{pq^4}\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}\Omega_k\mathrm{d}k\frac{1}{(mc^2)^2\hbar^2k^2}\left|\ \boldsymbol{\epsilon}^*\cdot(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\right|^2\end{aligned}$$

ここで $E\approx E'\approx mc^2$ とすると

$$=\frac{\alpha z^2}{\pi^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)^2\frac{p'\hbar^2}{kpq^4}\left|\ \boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\mathbf{q}\right|^2\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}\Omega_k\mathrm{d}k$$

///////////////////////////////終り//////////////////////////////

光の偏りの 2 方向につき和をとると

$$\sum_{\lambda=1,2}\left|\ (\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\mathbf{q})\right|^2=q^2-\frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}$$

である．

///////////////////////////////始まり////////////////////////////////////

この計算方法は p.102 にある．$\mathbf{q}$ と $\mathbf{k}$ との成す角を $\theta$ とする．なお，これらは全て 3 次元ベクトルである．もちろん，$\boldsymbol{\epsilon}^*$ も 3 次元ベクトルであるが，$\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \mathbf{k} = 0$ である．6-6 図より

$$\sum_\lambda |(\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \mathbf{q})|^2 = |(\boldsymbol{\epsilon}_1^* \cdot \mathbf{q})|^2 + |(\boldsymbol{\epsilon}_2^* \cdot \mathbf{q})|^2 = |(\boldsymbol{\epsilon}_1^* \cdot \mathbf{q})|^2 = q^2 \sin^2\theta$$

一方，$\mathbf{q} \cdot \mathbf{k} = qk\cos\theta$ であるので $\cos\theta = \mathbf{q}\cdot\mathbf{k}/(qk)$ である．よって

$$\sum_\lambda |(\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \mathbf{q})|^2 = q^2(1-\cos^2\theta) = q^2 - \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}$$

///////////////////////////終り//////////////////////////////////////////
よって

$$\mathrm{d}\sigma \approx \frac{z^2\alpha^3}{\pi^2}\frac{p'\hbar^2}{kpq^4}\left(q^2 - \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}\right)\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}\Omega_k\mathrm{d}k$$

光子は電子の運動量変化方向 $\mathbf{q}$ には放射されず，それとは垂直な方向に放出される．$\mathbf{q}$ と $\mathbf{k}$ との成す角を $\theta$ とすると，その強度分布は $\sin^2\theta$ に比例する．散乱面積を $\mathrm{d}\Omega, \mathrm{d}\Omega'$ で積分すると，エネルギー $c\hbar k$ の光子を放出する全断面積が得られる．

$$\int \mathrm{d}\Omega_k \left(q^2 - \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}\right) = \frac{8\pi}{3}q^2$$

である．
///////////////////////////始まり/////////////////////////////////////////
簡単な積分であるが

$$\int \mathrm{d}\Omega_k \left(q^2 - \frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}\right) = 2\pi\int_0^\pi q^2\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\pi q^2 - q^2\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi q^2 - \frac{4\pi}{3}q^2 = \frac{8\pi}{3}q^2$$

///////////////////////////終り//////////////////////////////////////////

$$\int \frac{1}{q^2}\mathrm{d}\Omega' = 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\cos\Theta}{p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\Theta} = \frac{2\pi}{pp'}\log\frac{p+p'}{p-p'}$$

である．$\Theta$ は $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ の間の角度である．
///////////////////////////始まり/////////////////////////////////////////
これも簡単な積分であるが，念のため．$\cos\Theta = t$，$2pp' = \alpha$，$p^2 + p'^2 = \beta$ とすると，与式は

$$2\pi\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{-\alpha t + \beta} = -\frac{2\pi}{\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t - \beta/\alpha} = -\frac{2\pi}{\alpha}\Big\{\log|1-\beta/\alpha| - \log|-1-\beta/\alpha|\Big\}$$

$$= \frac{2\pi}{\alpha}\Big\{\log|1+\beta/\alpha| - \log|1-\beta/\alpha|\Big\} = \frac{2\pi}{\alpha}\log\frac{1+\beta/\alpha}{|1-\beta/\alpha|}$$

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

上記の積分から

$$\sigma(k)\mathrm{d}k = \frac{16}{3}\bar{\phi}\left(\frac{mc}{p}\right)^2\frac{\mathrm{d}k}{k}\log\frac{p+p'}{p-p'}, \tag{8.90}$$

となる．
///////////////////////////始まり////////////////////////////////////////
念のため計算．

$$\sigma(k)\mathrm{d}k = \frac{z^2\alpha^3}{\pi^2}\frac{p'\hbar^2}{kp}\frac{8\pi}{3}\mathrm{d}k\frac{2\pi}{pp'}\log\frac{p+p'}{p-p'} = \frac{16}{3}\left(\frac{z^2\alpha^3\hbar^2}{p^2}\right)\frac{\mathrm{d}k}{k}\log\frac{p+p'}{p-p'}$$

$$= \frac{16}{3}\alpha z^2\left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)\frac{\hbar^2}{p^2}\frac{\mathrm{d}k}{k}\log\frac{p+p'}{p-p'} = \frac{16}{3}\alpha z^2\left(\frac{e^2}{4\pi mc^2}\right)m^2c^2\frac{1}{p^2}\frac{\mathrm{d}k}{k}\log\frac{p+p'}{p-p'}$$

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

**(b)** 相対論的な場合 $(V \approx c, E \gg mc^2)$
この場合は $E \approx cp \gg mc^2, E' \approx cp' \gg mc^2$ であるから，$mc/p, mc/p'$ につき展開すると，簡単な計算から

$$[E-(c\hbar k+E(\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}))][E-(c\hbar k-E(\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}))]$$
$$= -2c\hbar k(E-cp\cos\theta) \approx -4c^2\hbar kp\left\{\sin^2\frac{\theta}{2}+\left(\frac{mc}{2p}\right)^2\right\} \tag{22}$$

である．
///////////////////////////始まり////////////////////////////////////////
**(22)** の導出
とりあえず，この式の導出のみ行っておく．$E(\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}) = E'$ と略記して計算を進める．

$$[E-(c\hbar k+E')][E-(c\hbar k-E')] = E^2-E(c\hbar k+E')-E(c\hbar k-E')+(c^2\hbar^2k^2-E'^2)$$
$$= E^2-2Ec\hbar k+c^2\hbar^2k^2-E'^2$$

となるが，ここで $E'^2$ は

$$E'^2 = m^2c^4+c^2(\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k})^2 = m^2c^4+c^2p^2+c^2\hbar^2k^2-2c^2p\hbar k\cos\theta$$
$$= E^2+c^2\hbar^2k^2-2c^2p\hbar k\cos\theta.$$

これを上の $E'^2$ へ代入し計算すると

$$[E-(c\hbar k+E')][E-(c\hbar k-E')] = -2Ec\hbar k+2c^2p\hbar k\cos\theta = -2c\hbar k(E-cp\cos\theta)$$

が得られる．更に，$mc/p \ll 1$ を考慮して

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} = cp\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{p^2}} \approx cp\left(1 + \frac{m^2c^2}{2p^2}\right)$$

と展開し，上記式の $E$ へ代入すると

$$-2c\hbar k(E - cp\cos\theta) \approx -2c^2pk\hbar\left(1 - \cos\theta + \frac{m^2c^2}{2p^2}\right) = -2c^2pk\hbar\left(2\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{m^2c^2}{2p^2}\right)$$

より導出される． □

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

## § 8.5 光と物質との相互作用

**p.200**

**(c) Compton 散乱**

光子のエネルギーがさらに大きくなり，原子中の電子の束縛エネルギーが無視できるようになると，光子と電子の衝突は光子と自由な電子との衝突と考えることができる．自由電子はエネルギー運動量保存則から光子を吸収することはできないので，起こりうる過程は電子による光子の散乱である．これを Compton 散乱という．

振動数 $\nu$，波数ベクトル $\mathbf{k}$ の光子が静止している電子に衝突して $\theta$ 方向に散乱されたとき，散乱後の振動数，振動数 $\nu'$，波数ベクトル $\mathbf{k}'$，反跳をうけた電子の運動量を $\mathbf{p}'$ としよう．

エネルギー，運動量の保存則

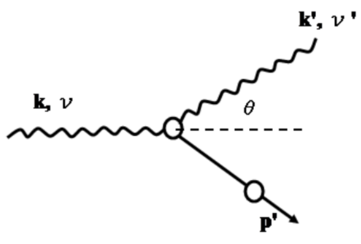


図 3: 電子による Compton 散乱

$$\begin{aligned} &mc^2 + \hbar\nu = \hbar\nu' + \sqrt{c^2{p'}^2 + m^2c^4}, \\ &\hbar\mathbf{k} = \hbar\mathbf{k}' + \mathbf{p}', \end{aligned} \tag{8.124}$$

ただし，$\nu = ck$，$\nu' = ck'$ である．この方程式を解くと

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + (\hbar\nu/mc^2)(1 - \cos\theta)}, \tag{8.125}$$

となる．

//////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////

**(8.125) の導出**

$c\mathbf{p}' = \hbar c\mathbf{k} - \hbar c\mathbf{k}'$ として，2 乗すると

$$c^2{p'}^2 = \hbar^2\nu^2 + \hbar^2{\nu'}^2 - 2\hbar^2\nu\nu'\cos\theta \tag{23}$$

また，エネルギーの式を $mc^2 + \hbar\nu - \hbar\nu' = \sqrt{c^2{p'}^2 + m^2c^4}$ として 2 乗すると

$$m^2c^4 + \hbar^2\nu^2 + \hbar^2{\nu'}^2 + 2mc^2\hbar\nu - 2\hbar^2\nu\nu' - 2mc^2\hbar\nu' = c^2{p'}^2 + m^2c^4$$

$$\hbar^2\nu^2 + \hbar^2{\nu'}^2 + 2mc^2\hbar\nu - 2\hbar^2\nu\nu' - 2mc^2\hbar\nu' = c^2{p'}^2$$

の $c^2{p'}^2$ に (23) を代入し，$\nu'$ について解くと (8.125) が得られる．

////////////////////////////終り/////////////////////////////////////////

# 第 9 章　素粒子間の相互作用と S-行列

## § 9.1　S-行列

$S$ を逐次近似 (摂動論) で求めてみよう．(??)，(??) を書き直せば，$U$ の方程式は

$$U(t,t_0)=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}H'(t')U(t',t_0)\mathrm{d}t', \tag{9.9}$$

である．

///////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////
これは高校数学であるが次のように導かれる．(9.4) 式の差分化：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{U(t,t_0)-U(t_0,t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{U(t,t_0)-1}{\Delta t}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H(t)U(t,t_0).$$

//////////////////////////////終り/////////////////////////////////////////
右辺の $U$ に第 0 近似の 1 を代入すれば第 1 近似の $U$ が求まる．逐次代入することにより

$$S=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}H'(t')\mathrm{d}t'-\frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{t_1}\mathrm{d}t_2H'(t_1)H'(t_2)+\cdots, \tag{9.10}$$

が得られる．

///////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////
実際に行ってみる．

$$U(t_1,t_0)=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1}H(t_2)U(t_2,t_0)\mathrm{d}t_2$$

$$U=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{\infty}H(t_1)U(t_1,t_0)\mathrm{d}t_1=1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{\infty}H(t_1)\left(1-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1}H(t_2)\mathrm{d}t_2\right)\mathrm{d}t_1$$

など．

//////////////////////////////終り/////////////////////////////////////////

この式の右辺第 2 項の行列を計算すると

$$\langle n|S^{(1)}|m\rangle=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_n-E_m)t/\hbar}\langle n|H'|m\rangle=-\mathrm{i}2\pi\delta(E_n-E_m)\langle n|H'|m\rangle, \tag{9.11}$$

となる．

///////////////////////////始まり//////////////////////////////////////////
ここで，以下の公式と変数変換 $t/\hbar=\omega$ が行った：

$$\delta(E_n-E_m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_n-E_m)\omega}\mathrm{d}\omega$$

////////////////////////////終り////////////////////////////////////////

$H'$ がある変換 $\mathcal{T}$ を行っても変らないとき，すなわち $[\mathcal{T},H']=0$ ならば $\mathcal{T}U(t,t_0)$ および $U(t,t_0)\mathcal{T}$ は同一の式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial A(t,t_0)}{\partial t}=H'(t)A(t,t_0) \tag{24}$$

を満たす．ここで $A$ は $\mathcal{T}U$ もしくは $U\mathcal{T}$ であり，$U(t,t_0)$ は (9.4) 式に従う．
//////////////////////////始まり////////////////////////////////////////
**(24) 式の確認**
証明らしきもの記す．もし $A=\mathcal{T}U(t,t_0)$ とすると，上の式にこれを代入して

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial(\mathcal{T}U)}{\partial t}=H'(t)\mathcal{T}U\longrightarrow\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t}U+\mathrm{i}\hbar\mathcal{T}\frac{\partial U}{\partial t}=H'(t)\mathcal{T}U=\mathcal{T}H'U$$

なお，$\mathcal{T}H'=H'\mathcal{T}$ を使った．次に，最右辺を，この式の左辺に移項し $\mathcal{T}$ でまとめると

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t}U+\mathcal{T}\left\{\mathrm{i}\hbar\frac{\partial U}{\partial t}-H'U\right\}=0\quad\therefore\ \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t}U=0\longrightarrow\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t}=0$$

ここで (9.4) 式を使った．逆に，$\partial\mathcal{T}/\partial t=0$ であるので

$$\mathrm{i}\hbar U\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t}=0\to\mathrm{i}\hbar U\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t}+\underbrace{\left\{\mathrm{i}\hbar\frac{\partial U}{\partial t}-H'U\right\}}_{0}\mathcal{T}=0$$

これをまとめると

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial(U\mathcal{T})}{\partial t}=H'(U\mathcal{T})$$

が示せた． □
////////////////////////////終り////////////////////////////////////////