読書メモ：流れの安定性理論

伊藤榮信

2016 年 6 月 11 日

//

【メモ】著者のお一人巽先生は我が師の大学での同級生であります．2015 年 7 月 4 日師の葬儀にて巽先生のお姿を拝見いたしました．京都にお住いの先生に前日の 3 日に知らせが入り駆けつけたとの事です．左肩から右へとバッグを掛けられてしっかりと歩く姿は 92 歳とは思えぬほどでした．やはり同級生と思われる方と再会されたようで話し込むかのように歩いて駅に向かい帰られました．

//□

第 2 章
線形安定性理論

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\mathrm{i}\alpha U\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\beta^2\right)\varphi-\mathrm{i}\alpha\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}y^2}\varphi-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\beta^2\right)^2\varphi=0, \quad (2.1.29)$$

2.2 初期値問題

境界値・初期値問題の解を求める．そのため関数 $\varphi(y,\tau)$ の Laplace 変換を $\Phi(y,\sigma)$ で表せば

$$\Phi(y,\sigma)=\int_0^\infty\varphi(y,\tau)\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau, \quad (2.2.1)$$

ただし，パラメター σ の実部，$\mathrm{Re}[\sigma]$ はある正数よりも大きい値をとるものとし，このとき積分 (2.2.1) は収束すると仮定する．

方程式 (2.1.29) の Laplace 変換を求めると

$$(U-c)(\Phi''-\beta^2\Phi)-U''\Phi-\frac{1}{\mathrm{i}\alpha R}(\Phi^{\mathrm{IV}}-2\beta^2\Phi''+\beta^4\Phi) \\ =\frac{1}{\mathrm{i}\alpha}(\varphi_0''-\beta^2\varphi_0), \quad (2.2.2)$$

ここで

$$c = \frac{\mathrm{i}\sigma}{\alpha}, \tag{2.2.3}$$

である．

//
【メモ】: 非同次項は以下の計算から現れる：(2.1.29) の先頭は

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathrm{i}\alpha U\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2\right)\varphi(y,\tau) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \mathrm{i}\alpha U\varphi\right), \tag{1}$$

であり，ここで問題となるのは $\partial\varphi/\partial\tau$ の Laplace 変換

$$\int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau$$

である．(2.2.1) より

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\infty \varphi(y,\tau)\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau = \Big[\varphi(y,\tau)\ \mathrm{e}^{-\sigma\tau}\Big]_0^\infty = -\varphi(y,0)$$

一方，同じ式は

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\infty \varphi(y,\tau)\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau - \sigma\int_0^\infty \varphi\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau$$

となるから，これらを等置することで

$$\int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau = -\varphi(y,0) + \sigma\int_0^\infty \varphi\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau$$

となるから，先頭の式 (6) の Laplace 変換へ用いると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2\right)\left(\int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau + \mathrm{i}\alpha U\int_0^\infty \varphi\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau\right)\\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2\right)\left(-\varphi(y,0) + \sigma\int_0^\infty \varphi\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau + \mathrm{i}\alpha U\int_0^\infty \varphi(y,\tau)\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\mathrm{d}\tau\right)\\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2\right)\Big[-\varphi(y,0) + \ \sigma\Phi(y,\sigma) + \mathrm{i}\alpha U\Phi(y,\sigma)\Big]\\
&= -(\varphi''(y,0) - \beta^2\varphi(y,0)) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2\right)\Big(\mathrm{i}\alpha U + \ \sigma\Big)\Phi(y,\sigma)
\end{aligned}$$

である．
//□

(2.2.2) に対応する同次方程式

$$(U-c)(\Phi'' - \beta^2\Phi) - U''\Phi - \frac{1}{\mathrm{i}\alpha R}(\Phi^{\mathrm{IV}} - 2\beta^2\Phi'' + \beta^4\Phi) = 0, \tag{2.2.4}$$

は Orr(1906-07) と Sommerfeld(1908) によって独立に導かれた方程式で Orr-Sommerfeld 方程式とよばれる．(2.2.4) 式の独立な 4 つの特解を $\Phi_k(k = 1,2,3,4)$ で表せば，Φ_k の Wronski 行列は

$$W = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \Phi_1' & \Phi_2' & \Phi_3' & \Phi_4' \\ \Phi_1'' & \Phi_2'' & \Phi_3'' & \Phi_4'' \\ \Phi_1''' & \Phi_2''' & \Phi_3''' & \Phi_4''' \end{vmatrix}, \tag{2.2.5}$$

で定義される．W はいうまでもなく定数である．

//

【メモ】: ここで「いうまでもなく」とあるが，Wronski 行列に不慣れの初心者からすると「いうまでもなく」という言葉にはピントこないものがある．定数変化法を使って，非同次方程式を解く場合 Wronski 行列が現れるが，例えば斉次常微分方程式 $L(y) = 0$ の独立な 2 つの特解を $u_1(x)$，$u_2(x)$ とした場合，非同次方程式 $L(y) = \rho$ の一般解を求めることを考える．その解を

$$y = A_1(x)u_1(x) + A_2(x)u_2(x)$$

とする．A_1, A_2 が定数ならば，u_1, u_2 は $L(y) = 0$ の解である．y を微分すると

$$y' = (A_1u_1' + A_2u_2') + (A_1'u_1 + A_2'u_2)$$

となるが，この右辺の第 2 項が

$$A_1'u_1 + A_2'u_2 = 0, \tag{2}$$

となる条件をおく．この条件を考慮したうえで，更に微分すると

$$y'' = (A_1u_1'' + A_2u_2'') + (A_1'u_1' + A_2'u_2')$$

となるから，これらを $L(y) = \rho$ の式に代入すると $L(u_1) = 0, L(u_2) = 0$ であるから

$$A_1'u_1' + A_2'u_2' = \rho, \tag{3}$$

である．(2) と (3) から，

$$A_1' = \frac{\rho(-u_2)}{W(u_1,u_2)}, \quad A_2' = \frac{\rho u_1}{W(u_1,u_2)}, \quad W(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \tag{4}$$

である．ここで仮定から Wronski 行列 $W(u_1,u_2) \neq 0$ である．よって，積分によりこれらの係数 A_1, A_2 を求めて，解を構成すると

$$y = c_1u_1 + c_2u_2 + u_1\int\frac{-\rho u_2}{W(u_1,u_2)}\mathrm{d}x + u_2\int\frac{\rho u_1}{W(u_1,u_2)}\mathrm{d}x, \tag{5}$$

が得られる．

一般にはこの Wronski 行列は定数では無い．しかし，常微分方程式が特別な場合には Wronski 行列は定数になる．どのような場合かというと，微分の階数が 2 離れた導関数からなる常微分方程式の場合である．例えば

$$y'' + A^2 y = 0$$

の場合，独立な解として $y_1 = \cos Ax$ と $y_2 = \sin Ax$ があり，この場合 $W(y_1, y_2) = A$ と定数になる．更に，P, Q を定数として

$$y^{\mathrm{IV}} + Py'' + Qy = 0$$

の特解を $y_1 = \cos Ax,\ \ y_2 = \cos Bx,\ \ y_3 = \sin Ax,\ \ y_4 = \sin Bx$ とすると $W(y_1, y_2, y_3, y_4) = 2A^3B^3 - AB^5 - A^5B$ と定数になる．

更に 6 階の常微分方程式で，その特解を $y_1 = \cos Ax,\ \ y_2 = \cos Bx, y_3 = \cos Cx,\ \ y_4 = \sin Ax,\ \ y_5 = \sin Bx, y_6 = \sin Cx$ とした場合には，数式処理ソフトと若干の手計算によると $W = -ABC(B-A)^2(B+A)^2(C-A)^2(C+A)^2(C-B)^2(C+B)^2$ とやはり定数となる (この計算結果は確認の必要がある！)．

したがって，斉次方程式 (2.2.4) は 4 階の常微分方程式で偶数階だけの導関数からなるので，この特解から作られた Wronski 行列は定数となる．

//□

行列式 (2.2.5) の Φ_k''' の余因子行列を W_k で表すと，非同次方程式 (2.2.2) の特解は

$$-\frac{R}{W}\sum_{k=1}^{4}\Phi_k(y)\int_{y_1}^{y}\varphi_0(y)\{W_k''(y) - \beta^2 W_k(y)\}\mathrm{d}y, \qquad (2.2.6)$$

で与えられる．

//

【メモ】: 先ず「Φ_k''' の余因子行列を W_k」とは，前の例で対応させると，(4) 式の W で u_1' の余因子の $-u_2$ であり，u_2' の余因子の u_1 に相当する．ここで議論しいる微分方程式は，具体的には (2.2.2) ではなく，全体に $-\mathrm{i}\alpha R$ をかけて

$$(\Phi^{\mathrm{IV}} - 2\beta^2\Phi'' + \beta^4\Phi) - \mathrm{i}\alpha R(U-c)(\Phi'' - \beta^2\Phi) - U''\Phi = -R(\varphi_0'' - \beta^2\varphi_0), \quad (6)$$

とした常微分方程式の解を指している．したがって，前記した (5) に相当する特解部分は

$$\Phi_k(y)\int_{y_1}^{y}\frac{-R\{\varphi_0''(y) - \beta^2\varphi_0(y)\}W_k(y)}{W}\mathrm{d}y, \qquad (7)$$

となる．ここで，前に記したように Wronski 行列 W が定数となるので積分の外に出せることと，被積分関数の第 1 項の φ_0'' に対しては部分積分を 2 度使用することで (2.2.6) 式を得ることができる．なお，部分積分では $y = y_1, y_2$ における境界条件 (??)：$\varphi_0(y_1) = \varphi_0(y_2) = \varphi_0'(y_1) = \varphi_0'(y_2) = 0$ を使った．
//□

ここで，$\Phi_k(y, \sigma)$ および $W_k(y, \sigma)$ の σ は簡単化のため省略した．したがって，(2.2.2) 式の一般解は

$$\Phi(y, \sigma) = \sum_{k=1}^{4} \left[C_k \Phi_k - \frac{R}{W} \sum_{k=1}^{4} \Phi_k(y) \int_{y_1}^{y} \varphi_0(y) \{ W_k''(y) - \beta^2 W_k(y) \} \mathrm{d}y \right], \tag{2.2.7}$$

で与えられる．C_k は積分定数であり，境界条件により定められる．

Φ に対する境界条件は (??) を Laplace 変換して

$$y = y_1,\ \ y_2 \ \ \text{において} \quad \Phi = \Phi' = 0, \tag{2.2.8}$$

と表され，(2.2.7) の解を (2.2.8) に代入すると，Φ_k に対する境界条件

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{4} C_k \Phi_k(y_1) = 0, \\ &\sum_{k=1}^{4} C_k \Phi_k'(y_1) = 0, \\ &\sum_{k=1}^{4} C_k \Phi_k(y_2) = \sum_{k=1}^{4} I_k \Phi_k(y_2), \\ &\sum_{k=1}^{4} C_k \Phi_k'(y_2) = \sum_{k=1}^{4} I_k \Phi_k'(y_2) \end{aligned} \right\}, \tag{2.2.9}$$

が得られる．ただし

$$I_k = \frac{R}{W} \sum_{k=1}^{4} \int_{y_1}^{y_2} \varphi_0(y) \{ W_k''(y) - \beta^2 W_k(y) \} \mathrm{d}y, \tag{2.2.10}$$

である．行列式

$$E = \begin{vmatrix} \Phi_1(y_1) & \Phi_2(y_1) & \Phi_3(y_1) & \Phi_4(y_1) \\ \Phi_1'(y_1) & \Phi_2'(y_1) & \Phi_3'(y_1) & \Phi_4'(y_1) \\ \Phi_1(y_2) & \Phi_2(y_2) & \Phi_3(y_2) & \Phi_4(y_2) \\ \Phi_1'(y_2) & \Phi_2'(y_2) & \Phi_3'(y_2) & \Phi_4'(y_2) \end{vmatrix}, \tag{2.2.11}$$

とするならば，未知定数 C_k は

$$C_k = \frac{E_k}{E}, \tag{2.2.12}$$

と求められる．ここで E_k は (2.2.11) 式の第 k 列を上から $0, 0, \sum_{k=1}^{4} I_k\Phi_k(y_2)$, $\sum_{k=1}^{4} I_k\Phi'_k(y_2)$ とした行列式である．
///
【メモ】: 未知数 C_k の 4 元連立方程式を解いただけである．(2.2.9) 式を連立方程式の形で書くと

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(y_1) & \Phi_2(y_1) & \Phi_3(y_1) & \Phi_4(y_1) \\ \Phi'_1(y_1) & \Phi'_2(y_1) & \Phi'_3(y_1) & \Phi'_4(y_1) \\ \Phi_1(y_2) & \Phi_2(y_2) & \Phi_3(y_2) & \Phi_4(y_2) \\ \Phi'_1(y_2) & \Phi'_2(y_2) & \Phi'_3(y_2) & \Phi'_4(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{k=1}^{4} I_k\Phi_k(y_2) \\ \sum_{k=1}^{4} I_k\Phi'_k(y_2) \end{pmatrix}$$

///□

よって (2.2.7)

$$\Phi(y,\sigma) = \sum_{k=1}^{4}\left[\frac{E_k}{E} - \frac{R}{W}\sum_{k=1}^{4}\int_{y_1}^{y}\varphi_0\{W''_k - \beta^2 W_k\}\mathrm{d}y\right]\Phi_k, \tag{2.2.13}$$

となる．Laplace 逆変換により，もとの境界値・初期値問題はの解は

$$\varphi(y,\tau) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma_c-\mathrm{i}\infty}^{\sigma_c+\mathrm{i}\infty}\Phi(y,\sigma)\mathrm{e}^{\sigma\tau}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma_c-\mathrm{i}\infty}^{\sigma_c+\mathrm{i}\infty}\sum_{k=1}^{4}\left[\frac{E_k}{E} - \frac{R}{W}\sum_{k=1}^{4}\int_{y_1}^{y}\varphi_0\{W''_k - \beta^2 W_k\}\mathrm{d}y\right]\Phi_k\mathrm{e}^{\sigma\tau}\mathrm{d}\sigma, \tag{2.2.14}$$

ここで σ_c は Laplace 変換の収束座標とよばれる実数である．

2.3 固有値問題

(2.2.13) で表される $\Phi(y,\sigma)$ に以下の 3 つの仮定を設ける．

(I) β と αR を与えたとき，$E = 0$ を満たす σ の根は離散的，かつ単根とする．それらの根を $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ としたとき

$$\mathrm{Re}[\sigma_1] > \mathrm{Re}[\sigma_2] > \cdots > \mathrm{Re}[\sigma_n]\cdots \tag{2.3.1}$$

とする．このような根 σ_n を σ の固有値といい，方程式

$$E = 0, \tag{2.3.2}$$

を固有値方程式という．

(II) $E = 0$ とする根 $\sigma_n, (n = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 以外には，変数 σ に関する特異点は無いとする．

以上の 2 つの仮定が成立するとき，(2.2.14) の複素積分の留数定理より

$$\lim_{\sigma\to\sigma_n}\left\{\frac{(\sigma-\sigma_n)}{E}\sum_{k=1}^{4}E_k\Phi(y,\sigma)\mathrm{e}^{\sigma\tau}\right\} = A_n\phi_n(y)\mathrm{e}^{\sigma_n\tau}, \tag{2.3.3}$$

となる．ただし，

$$A_n = \lim_{\sigma \to \sigma_n} \left\{ \frac{(\sigma - \sigma_n)}{E} \right\}, \tag{2.3.4}$$

$$\phi_n(y) = \left\{ \sum_{k=1}^{4} E_k \Phi(y, \sigma) \mathrm{e}^{\sigma\tau} \right\}_{\sigma=\sigma_n}, \tag{2.3.5}$$

である．

//

【メモ】: (2.2.14) は

$$\varphi(y, \tau) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int \sum_{k=1}^{4} \left[\frac{E_k}{E} - \frac{R}{W} \sum_{k=1}^{4} \int_{y_1}^{y} \varphi_0 \{ W_k'' - \beta^2 W_k \} \mathrm{d}y \right] \Phi_k \mathrm{e}^{\sigma\tau} \mathrm{d}\sigma$$

であるが，これにに留数定理を用いると

$$\varphi(y, \tau) \Big|_{\sigma_n} = \lim_{\sigma \to \sigma_n} (\sigma - \sigma_n) \sum_{k=1}^{4} \left[\frac{E_k}{E} - \frac{R}{W} \sum_{k=1}^{4} \int_{y_1}^{y} \varphi_0 \{ W_k'' - \beta^2 W_k \} \mathrm{d}y \right] \Phi_k \mathrm{e}^{\sigma\tau}$$

$$= \lim_{\sigma \to \sigma_n} \sum_{k=1}^{4} \left[\frac{(\sigma - \sigma_n)}{E} E_k - (\sigma - \sigma_n) \frac{R}{W} \sum_{k=1}^{4} \int_{y_1}^{y} \varphi_0 \{ W_k'' - \beta^2 W_k \} \mathrm{d}y \right] \Phi_k \mathrm{e}^{\sigma\tau}$$

となり，[ ] 内第 2 項は $\sigma \to \sigma_n$ でゼロとなるので，結局

$$\varphi(y, \tau) \Big|_{\sigma_n} = \lim_{\sigma \to \sigma_n} \left[\sum_{k=1}^{4} \frac{(\sigma - \sigma_n)}{E} E_k \Phi_k \mathrm{e}^{\sigma\tau} \right]$$

である．

//□

(2.3.5) の $\phi_n(y)$ はそれ自体で Orr-Sommerfeld 方程式 (2.2.4) の解であり，境界条件 (**??**)，同じことであるが (2.2.9) を満たしている．これを固有値 σ_n に対する固有関数という．

(III) Re$[-\sigma]$ からの積分への寄与はないとすると，(2.2.14) は

$$\varphi(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(y) \mathrm{e}^{\sigma_n \tau}, \tag{2.3.6}$$

また，初期値の形は

$$\varphi_0(y) = \varphi(y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(y), \tag{2.3.7}$$

解 (2.3.6) が時間とともに増大するか減衰するかは σ_n の実部の符号によって決まる．Re$[\sigma_n] > 0$ の場合，増幅率，Re$[\sigma_n] < 0$ の場合減衰率となる．また

$$\mathrm{Re}[\sigma_1] = 0, \tag{2.3.11}$$

のとき主流は中立安定という．

簡単のため，固有値 σ_1 だけを考えると，$\sigma_1 = -\mathrm{i}\alpha c_1$ であり，また 1 個の固有値だけなので $\sigma_1 = \sigma, c_1 = c, \phi_1 = \phi$ とすると，(2.3.6) から

$$\varphi(y,\tau) = \phi(y)\mathrm{e}^{\sigma\tau} = \phi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha c\tau}, \tag{2.3.12}$$

となり，これを (2.1.29) と境界条件 (**??**) に代入すると，Orr-Sommerfeld 方程式

$$(U-c)(\Phi'' - \beta^2\Phi) - U''\Phi = \frac{1}{\mathrm{i}\alpha R}(\Phi^{\mathrm{IV}} - 2\beta^2\Phi'' + \beta^4\Phi), \tag{2.3.13}$$

と境界条件

$$\phi(y_1) = \phi(y_2) = \phi'(y_1) = \phi'(y_2) = 0, \tag{2.3.14}$$

が得られる．したがって (2.3.13) 式の 4 つの特解を ϕ_k で表せば，固有値方程式

$$E = \begin{vmatrix} \phi_1(y_1) & \phi_2(y_1) & \phi_3(y_1) & \phi_4(y_1) \\ \phi_1'(y_1) & \phi_2'(y_1) & \phi_3'(y_1) & \phi_4'(y_1) \\ \phi_1(y_2) & \phi_2(y_2) & \phi_3(y_2) & \phi_4(y_2) \\ \phi_1'(y_2) & \phi_2'(y_2) & \phi_3'(y_2) & \phi_4'(y_2) \end{vmatrix} = 0, \tag{2.3.15}$$

となる．

固有値方程式 (2.3.15) は β および αR をパラメターとして，固有値 c に対する方程式

$$E(c,\beta,\alpha R) = 0, \tag{2.3.16}$$

これを c について解き，虚部を

$$\mathrm{Im}[c] = F(\beta,\alpha R), \tag{2.3.17}$$

と書くと

$$\mathrm{Im}[c] = F(\beta,\alpha R) = 0, \tag{2.3.18}$$

は中立安定の状態に対応する．

第 3 章
高 Reynolds 数における安定性

固体境界を伴う流れの臨界レイノルズ数は一般に大きい．一方，臨界状態における中立攪乱の波数 α はかなり小さい値である．しかしながら，積 αR は依然として大きい．よって $\alpha R \gg 1$ の場合の Orr-Sommerfeld 方程式を解く必要がある．この章では，その解法とその解により構成される固有値方程式について述べる．

3.1 αR の逆ベキ級数解

Orr-Sommerfeld 方程式

$$(U-c)(\phi''-\alpha^2\phi)-U''\phi=\frac{1}{\mathrm{i}\alpha R}(\phi^{\mathrm{IV}}-2\beta^2\phi''+\beta^4\phi), \tag{3.1.1}$$

$\alpha R \gg 1$ のとき

$$(U-c)(\phi''-\alpha^2\phi)-U''\phi=0, \tag{3.1.2}$$

は Rayleigh(1880) によってはじめて導入され Rayleigh 方程式とよばれている．この解を ϕ_0 とする．Rayleigh 方程式の解を求める具体的な方法は 3.5 節で行う．

Orr-Sommerfeld 方程式 (3.1.1) の解を上の ϕ_0 を第 1 近似として αR の逆ベキ級数

$$\phi(y)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha R)^{-n}\phi_n(y), \tag{3.1.4}$$

の形で展開する．しかしこの形の解はいくつかの問題を含んでいる．

3.1.1 境界層

第 1 の問題点は Orr-Sommerfeld 方程式 (3.1.1) が 4 階の方程式であるのに対して (3.1.2) は 2 階の方程式であるということである．境界条件を考えた場合 Orr-Sommerfeld 方程式の解は 4 個必要であるが，(3.1.2) の解は 2 個の独立な解しか与えないので，(3.1.4) の形の解だけでは独立な解が足りない．

3.1.2 内部摩擦層

同次方程式 (3.1.2) は $U(y)=c$ の根 $y=y_s$ において特異点をもつ．y_s が実数であると流れの中に特異点があることになり，その点で無限大の ϕ となり，微小攪乱の仮定と矛盾する．一方，y_s が実数でない場合にも，流れの中に有限の幅の特異領域が現れ，この領域で解は意味を持たない．以下の議論では変数 y は複素数として $U(y)$ は y の解析関数であるとする．

y_s が $U(y)=c$ の単純根であり，かつ $U''(y_s)\neq 0$ である場合を考える

と，$y=y_s$ は確定特異点である．このとき同次方程式 (3.1.2) の 2 個の特解 $\phi_{01}(y), \phi_{02}(y)$ は常微分方程式の級数解法で

$$\left.\begin{array}{l}\phi_{01}(y)=P_1(y-y_s),\\ \phi_{02}(y)=P_1(y-y_s)\log(y-y_s)+P_0(y-y_s)\end{array}\right\} \tag{3.1.6}$$

のように表される．ここで，

$$\left.\begin{array}{l}P_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n,\\ \\ P_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n\end{array}\right\} \tag{3.1.7}$$

で，a_n, b_n は定数である．

//

【メモ】: $U(y)-c$ を y_s の近傍で展開すると

$$U(y)-c=U'(y-y_s) \tag{8}$$

と書くことができる．ただし $U'=\mathrm{d}U/\mathrm{d}y(y=y_s)$ とする．これを同次方程式 (3.1.2) へ代入し整理すると

$$\phi''-\frac{U''+\beta^2U'(y-y_s)}{U'(y-y_s)}\phi=0 \tag{9}$$

となるので，$y=y_s$ は確定特異点となる．$y-y_s\equiv x$ とし (9) 式を

$$\phi''-\frac{A}{x}\phi=0 \tag{10}$$

と書きなおしておく．この常微分方程式の級数解

$$\phi=c_0x^{\lambda}+c_1x^{\lambda+1}+c_2x^{\lambda+2}+c_3x^{\lambda+3}+ \tag{11}$$

を考える．よって

$$\phi''=c_0\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}+c_1(\lambda+1)\lambda x^{\lambda-1}+c_2(\lambda+2)(\lambda+1)x^{\lambda}+ \tag{12}$$

が得られるから，これらを (10) へ代入し x のべきで整理し，その係数を記すと

$$\left.\begin{array}{l}x^{\lambda-2}:(\lambda-1)\lambda c_0=0, (\text{決定方程式})\\ x^{\lambda-1}:\lambda(\lambda+1)c_1-Ac_0=0,\\ x^{\lambda}\quad:(\lambda+1)(\lambda+2)c_2-Ac_1=0,\\ x^{\lambda+1}:(\lambda+2)(\lambda+3)c_3-Ac_2=0,\\ x^{\lambda+2}:(\lambda+3)(\lambda+4)c_4-Ac_3=0\end{array}\right\} \tag{13}$$

となる．第 1 番目の式から $c_0\neq0$ となるためには $\lambda=0,1$ である．

$\lambda=0$ の場合を考える．

ところが (13) 式の 2 番目の式から，$c_0 = 0$ となり $c_1 \neq 0$ となる．それ以降の式からは

$$c_2 = \frac{A}{2}c_1, \quad c_3 = \frac{A}{6}c_2, \quad c_4 = \frac{A}{12}c_3, \quad \cdots$$

よって，$\lambda = 0$ の場合の解の 1 つ ϕ_0 は

$$\phi_0 = c_1 x + \frac{A}{2}c_1 x^2 + \frac{A^2}{2\cdot 6}c_1 x^3 + \frac{A^3}{2\cdot 6\cdot 12}c_1 x^4 + \cdots \tag{14}$$

ここで $c_1 \neq 0$ とする．次に

$\lambda = 1$ の場合を考える．

$$c_1 = \frac{A}{2}c_0, \quad c_2 = \frac{A}{6}c_0, \quad c_3 = \frac{A}{12}c_0, \quad \cdots$$

であり，これにより解は

$$\phi_1 = c_0 x + \frac{A}{2}c_0 x^2 + \frac{A^2}{2\cdot 6}c_0 x^3 + \frac{A^3}{2\cdot 6\cdot 12}c_0 x^4 + \cdots \tag{15}$$

であり，(14) と (15) から ϕ_0 と ϕ_1 は独立な解とならない．このように決定方程式の解の差（：$\lambda_1 - \lambda_0$）が整数となる場合には注意を要するようである．このような場合の解の求め方には Frobenius 方法があるが，ここでは発見法的な解の求め方を議論してみる（共立全書「常微分方程式」稲葉三男著昭和 48 年）．

$x > 0$ で定義されたオイラー型の微分方程式

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a_0 x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + b_0 y = 0, \tag{16}$$

の解法を考える．点 $x = 0$ は確定特異点で，その決定方程式は

$$\lambda^2 + (a_0 - 1)\lambda + b_0 = 0, \tag{17}$$

であり，これの解 λ_1, λ_2 が異なる場合には独立な解として $(x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2})$ が得られる．なお，x^{λ_i} とは (11) の形の解を表す．

しかし，$\lambda_1 = \lambda_2$ の場合には 2 つの独立な解が得られない．ところで定数係数線形常微分方程式の場合,「特性方程式」（決定方程式ではない）が重解もつ場合，1 つの解は $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ であり，もう 1 つの解は $x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ であった．今，(16) で，変数変換 $x = \mathrm{e}^t \quad (-\infty < t < \infty)$ を行うと

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + (a_0 - 1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + b_0 y = 0, \tag{18}$$

なる定数係数線形常微分方程式を得る．よって，これの特性方程式は (17) であるから，重解をもつ場合の (18) の解は $(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, t\mathrm{e}^{\lambda_1 t})$ である．よって逆変換により $t = \log x$ が得られ，(16) の独立な解は $(x^{\lambda_1}, x^{\lambda_1}\log x)$ である．

もう少し一般化するために常微分方程式 (16) を

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + xa(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + b(x)y = 0, \quad (x > 0) \tag{19}$$

とする．ただし，$a(x)$ と $b(x)$ は

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

であり $x=0$ で解析的であるとする．よって $x=0$ は確定特異点である．決定方程式の解 λ_1, λ_2 で (i)$\lambda_1 = \lambda_2$ と $\lambda_1 - \lambda_2 = m$ の場合を考えてみる．

(i)　$\lambda_1 = \lambda_2$ の場合

(11) 式で表される (19) 式の解を，和の記号を使った形で書き

$$\phi_1(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{20}$$

とする．これを (19) 式に代入し，c_n を決定しておく．次に前の例にならって

$$\phi_2(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n x^n + c(\log x)\phi_1(x) \tag{21}$$

とおき，これを常微分方程式 (19) に代入し，c'_n を決定すればよい．

(20) 式の 1 階，2 階の導関数を具体的に求め，それらを (19) に代入すると，決定方程式として

$$[\lambda_1^2 + \lambda_1(a_0 - 1) + b_0]c'_0 + c[(2\lambda_1 + a_0 - 1)c_0] = 0 \tag{22}$$

が得られる．λ_1 は (17) 式の重解であるから c'_0 と c の係数は共に 0 である．よって，c'_0 と c は任意となり $c'_0 = 1, c = 1$ とすることができる．また $c'_n (n \geq 1)$ は

$$[(\lambda_1 + n)(\lambda_1 + n - 1) + (\lambda_1 + n)a_0 + b_0]c'_n + [(\lambda_1 + n - 1)a_1 + b_1]c'_{n-1}$$
$$+ \cdots + [\lambda_1 a_n + b_n]c'_0 + c\left[\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}c_i + \{2(\lambda_1 + n) - 1\}c_n\right] = 0, \tag{23}$$

から逐次決定される．よってもう 1 つの解として $c'_0 = 1, c = 1$ とした (21) が得られる．

(ii)　$\lambda_1 - \lambda_2 = m$ の場合

1 つは解 (20) 式であり，もう 1 つの解は (21) の右辺の第 1 項の λ_1 のかわりに $\lambda_2 = \lambda_1 - m$ とした

$$\phi_2(x) = x^{\lambda_1 - m} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n x^n + c(\log x)\phi_1(x) \tag{24}$$

で定義されるとする．$x^{\lambda_1 - m + n}$，$(n = 0, 1, \cdots, m-1)$ の冪の項の係数には，対数部分，すなわち係数 c の x の冪に対する項が欠けている．したがって，$n = 1, \cdots, m-1$ のときは

$$[(\lambda_1 - m + n)(\lambda_1 - m + n - 1) + (\lambda_1 - m + n)a_0 + b_0]c'_n] + [(\lambda_1 - m$$

$$+n-1)a_1+b_1]c'_{n-1}+\cdots+[(\lambda_1-m)a_n+b_n]c'_0=0, \tag{25}$$

であり，$n=0$ のときは

$$[(\lambda_1-m)^2+(\lambda_1-m)(a_0-1)+b_0]c'_0=0, \tag{26}$$

であり，$\lambda_1-m=\lambda_2$ であるから，c の係数は決定方程式となっており，ゼロであるから，c'_0 は任意の値としてよい．よって $c'_0=1$ とする．これから (24) 式から $c'_1,c'_2,\cdots,c'_{m-1}$ を順次決定できる．次に x^{λ_1} の係数を比較する．

$$\{\lambda_1^2+\lambda_1(a_0-1)+b_0\}c'_m+\{(\lambda_1-1)a_1+b_1\}c'_{m-1}+\cdots$$

$$+\{(\lambda_1-m)a_m+b_m\}c'_0+c(a_0+2\lambda_1-1)c_0=0, \tag{27}$$

であり，c'_0 の係数は 0 で，$c_0=1, a_0+2\lambda_1-1\neq 0$ であるから，この式から定数 c を決めることができる．$c'_m=0$ としてもよい．最後に $n=m+1,m+2,\cdots$ とすると (23) 式と同様の

$$[(\lambda_1-m+n)(\lambda_1-m+n-1)+(\lambda_1-m+n)a_0+b_0]c'_n$$

$$+[(\lambda_1-m+n-1)a_1+b_1]c'_{n-1}+\cdots+[(\lambda_1-m)a_n+b_n]c'_0$$

$$+c\left[\sum_{i=0}^{n-m}a_{n-m-i}c_i+\{2(\lambda_1+n-m)-1\}c_{n-m}\right]=0, \tag{28}$$

から，c'_n，$(n=m+1,m+2,\cdots)$ を順次決めることができる．よって，もう 1 つの解 $\phi_2(x)$ が決定される．

以上で，境界層解 (3.1.6) 式がどのように決定されたかが分かる．

//□

因みに，Schlichting の Boundary-Layer Theory におけるこの部分（第 16 章第 5 節）の議論を簡単に記しておく．

//

【メモ】:

b-5 節　Orr-Sommerfeld 方程式の一般的な性質

略：

$U(y)-c=0$ となる点 $(y=y_K$ とする$)$ で，もし $U''\neq 0$ とすると (3.1.2) 式から ϕ'' が発散する．この点で $U(y)-c=U'_K(y-y_K)$ と近似することができるので，ϕ'' は

$$\frac{U''_K}{U'_K}\frac{1}{y-y_K}$$

という発散傾向を示す（ただし，分子は ϕ ではなく 1 となっている）．その結果

$$\phi'\sim\frac{U''_K}{U'_K}\ln(y-y_K), \tag{16.18}$$

中略

c-2 節　中立安定性曲線算出に対する Tolimiens の方法

略：

摩擦無し方程式 (3.1.2) の 2 つの解 ϕ_1, ϕ_2 を $(y-y_K)$ の冪の形で求めることができ

$$\left.\begin{aligned}\phi_1 &= (y-y_K)P_1,\\ \phi_2 &= P_2 + \frac{U''_K}{U'_K}(y-y_K)P_1\ln(y-y_K)\end{aligned}\right\} \tag{16.20}$$

が得られる．P_1, P_2 は $(y-y_K)$ の冪級数である．

以上 Boundary-Layer Theory

この (16.20) 式の解の導出に対する言及は無い．ϕ_2 は恐らく (16.18) 式を積分したものであるということであろう．

//□

3.3 境界層解

2 つの境界面 $y = y_k, (k = 1, 2)$ に沿う境界層の中で成り立つ解を求める．小パラメター ϵ を用いて

$$y - y_k = \epsilon\eta, \tag{3.3.1}$$

として，変数を拡大する．$U(y)$ と $U''(y)$ を $y = y_k$ の近傍で Taylor 展開すると

$$\left.\begin{aligned}U(y) &= U_k + U'_k\epsilon\eta + O(\epsilon^2),\\ U''(y) &= U''_k + O(\epsilon)\end{aligned}\right\}, \tag{3.3.2}$$

と書ける．ここで $U_k = U(y_k), U'_k = U'(y_k), U''_k = U''(y_k)$ とする．

(3.3.1) と (3.3.2) を用いると Orr-Sommerfeld 方程式 (3.1.1) は

$$(U_k - c + \epsilon U'_k\eta)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\eta^2} + O(\epsilon^2) = \frac{1}{\mathrm{i}\alpha R\epsilon^2}\left[\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}\eta^4} + O(\epsilon^2)\right], \tag{3.3.3}$$

と書ける．ここで，右辺の粘性項が左辺と同程度になるためには

$$\epsilon = (\alpha R)^{-1/2}, \tag{3.3.4}$$

と選べばよい．このとき (3.3.3) 式は

$$\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}\eta^4} - \mathrm{i}(U_k - c)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\eta^2} = \mathrm{i}\epsilon U'_k\eta\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\eta^2} + O(\epsilon^2), \tag{3.3.5}$$

となる．

(3.3.5) 式で $\epsilon = 0$ とおいた方程式は定数係数の 4 階微分方程式であるから，その特解は

$$1, \quad \eta, \quad \exp[\pm\sqrt{\mathrm{i}(U_k - c)}\eta]$$

で与えられ，これらを (3.3.5) 式右辺に代入すると，(3.3.5) 式の 4 つの特解

$$\varphi_1(\eta) = 1 + O(\epsilon^2), \tag{3.3.6}$$

$$\varphi_2(\eta) = \eta + O(\epsilon^2), \tag{3.3.7}$$

$$\varphi_3(\eta) = \exp[-\sqrt{\mathrm{i}(U_k - c)}\eta] \left\{1 - \frac{5U_k'\epsilon}{4(U_k - c)}\left[\eta + \frac{1}{5}\sqrt{\mathrm{i}(U_k - c)}\eta^2\right] + O(\epsilon^2)\right\}, \tag{3.3.8}$$

$$\varphi_4(\eta) = \exp[\sqrt{\mathrm{i}(U_k - c)}\eta] \left\{1 - \frac{5U_k'\epsilon}{4(U_k - c)}\left[\eta - \frac{1}{5}\sqrt{\mathrm{i}(U_k - c)}\eta^2\right] + O(\epsilon^2)\right\}, \tag{3.3.9}$$

である．ただし $\mathrm{Re}[\sqrt{\mathrm{i}(U_k - c)}] > 0$ となるように偏角を選んでおく．

//

【メモ】: (3.3.9) 式の導出

この本の不親切な点であるが，φ_3, φ_4 の場合，例えば φ_4 は次のように ϵ で展開されている：

$$\varphi_4 = \varphi_{40} + \epsilon\varphi_{41} + \epsilon^2\varphi_{42} + \cdots, \tag{29}$$

ここで $\varphi_{40} = \exp[\sqrt{\mathrm{i}(U_k - c)}\eta]$ である．

したがって，ここでは φ_{41} を求めることになるが簡単の為，次の記号を用いる．

$$A \equiv \sqrt{\mathrm{i}(U_k - c)}, \qquad B \equiv -(U_k - c)U_k', \qquad \psi(\eta) \equiv \varphi_{41}''(\eta)$$

これを用いて (3.3.5) 式を書き換えると

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\eta^2} - A^2\psi = B\mathrm{e}^{A\eta}\eta, \tag{30}$$

となる．ここで $D \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}\eta$ とすると

$$(D + A)(D - A)\psi = B\mathrm{e}^{A\eta}\eta, \tag{31}$$

と書けるから，定数係数非同次常微分方程式の解法により

$$\psi = \frac{B}{(D + A)(D - A)}\mathrm{e}^{A\eta}\eta, \tag{32}$$

を得る．以下，計算の途中式を記すと

$$\psi = B\mathrm{e}^{A\eta}\frac{1}{(D + 2A)D}\eta = B\mathrm{e}^{A\eta}\frac{1}{(D + 2A)}\frac{1}{2}\eta^2 = \frac{B}{4A}\mathrm{e}^{A\eta}\frac{1}{(1 + \frac{D}{2A})}\eta^2,$$

$$= \frac{B}{4A}\mathrm{e}^{A\eta}\left(1 - \frac{D}{2A}\right)\eta^2 = \frac{B}{4A}\mathrm{e}^{A\eta}\left(\eta^2 - \frac{1}{A}\eta\right)$$

であるから，

$$\varphi_{41}''(\eta) = \frac{B}{4A}\mathrm{e}^{A\eta}\left(\eta^2 - \frac{1}{A}\eta\right), \tag{33}$$

が得られる．よって，η について積分すれば

$$\varphi'_{41}(\eta) = \frac{B}{4A}\left[\frac{1}{A}\mathrm{e}^{A\eta}\eta^2 - \frac{3}{A^2}\mathrm{e}^{A\eta}\eta + C_0\right], \tag{34}$$

が得られる．ここで C_0 は積分定数で上記のいくつかの部分積分で最終的に現れる積分で

$$C_0 = \frac{3}{A^2}\int_0^{-\infty}\mathrm{e}^{A\eta}\mathrm{d}\eta = -\frac{3}{A^3}$$

と表される．さらに積分すると

$$\varphi_{41}(\eta) = \frac{B}{4A}\left[\frac{1}{A^2}\mathrm{e}^{A\eta}\eta^2 - \frac{5}{A^3}\mathrm{e}^{A\eta}\eta\right] + C'_0\eta + C_1, \tag{35}$$

ここで $C'_0 = BC_0/(4A)$ であり，C_1 は部分積分の最後に現れる積分定数で C_0 と同様な積分である．これら C'_0 と C_1 の項は $\psi = \varphi''$ ではゼロとなるので無視できる．これを考慮して (36) を (3.3.9) 式と同じ形になるように整理すると

$$\varphi_{41}(\eta) = -\frac{5B}{4A^4}\mathrm{e}^{A\eta}\left[\eta - \frac{1}{5}A\eta^2\right], \tag{36}$$

となるのでを (3.3.9) 式が得られる．
//□

以上の 4 つの解で φ_1 と φ_2 は粘性項を考慮しなくても得られる解である．一方，φ_3 と φ_4 は境界層に特有の解であり，これらを境界層解とよぶ．

3.4 特異点近傍における解

$$\begin{pmatrix} H^{(1)}_{\frac{1}{3}} \\ H^{(2)}_{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}\left[\frac{2}{3}(\mathrm{i}\eta)^{\frac{3}{2}}\right] \sim \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2}(\mathrm{i}\eta)^{-3/4}\exp\left[(\pm)\mathrm{i}\left\{\frac{2}{3}(\mathrm{i}\eta)^{3/2} - \frac{5\pi}{12}\right\}\right], \tag{3.4.11}$$

である．ただし，η は

$$-\frac{7\pi}{6} < \arg\eta < \frac{\pi}{6}, \tag{3.4.12}$$

の範囲になければならない．
//
【メモ】: この関数が $\eta \to \infty$ で発散しないようにするには，この指数関数の指数部が常にマイナスでなければならない．$\eta = |\eta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ とすると

$$\begin{aligned}(\pm)\mathrm{i}\frac{2}{3}(\mathrm{i}\eta)^{3/2} &= (\pm)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}|\eta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{3/2} = \pm\frac{2}{3}|\eta|^{3/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\theta}{2}\right)} \\ &= \pm\frac{2}{3}|\eta|^{3/2}\mathrm{e}^{(3\theta/2+5\pi/4)\mathrm{i}}\end{aligned} \tag{37}$$

となるから，Euler の式より，この式の実部は

$$\pm\frac{2}{3}|\eta|^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\theta+\frac{5\pi}{4}\right), \tag{38}$$

となる．よって係数がマイナスの場合には cos が正

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\theta+\frac{5\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$$

であり，これを解くと

$$-\frac{7\pi}{6}<\theta<-\frac{\pi}{2}, \tag{39}$$

であり，係数がプラスの場合には cos が負

$$\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\theta+\frac{5\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$$

であり

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{6}, \tag{40}$$

これらからプラス，マイナスのどちらかであるから，(39) と (40) の和集合となる．

//□

3.5 Rayleigh 方程式の解

Rayleigh 方程式

$$(U-c)(\phi''-\alpha^2\phi)-U''\phi=0, \tag{3.5.1}$$

に対するいくつかの主要な解法を議論する．

3.5.1 α^2 展開

(3.5.1) の解 $\phi(y)$ を α^2 の冪級数

$$\phi(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}\phi_n(y), \tag{3.5.2}$$

の形に展開する．よって

$$\left.\begin{aligned}&(U-c)\phi_0''-U''\phi_0=0,\\ &(U-c)\phi_n''-U''\phi_n=(U-c)\phi_{n-1},\qquad n=1,2,3,\cdots\end{aligned}\right\}, \tag{3.5.4}$$

という微分方程式が得られる．(3.5.4) の解は

$$\left.\begin{aligned}&\phi_0(y)=A(U-c)+B(U-c)\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{(U-c)^2},\\ &\phi_n(y)=(U-c)\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{(U-c)^2}\int_{y_0}^{y}(U-c)\phi_{n-1}\mathrm{d}y,\\ &\quad n=1,2,3,\cdots\end{aligned}\right\}, \tag{3.5.5}$$

となる．ここで A, B は定数である．

//

【メモ】:

(i)　$A(U-c)$ は明らかに第 1 の微分方程式の解である．1 つの解が分かっている場合の線形常微分方程式の解法，定数変化法を用いる．すなわち

$$\phi_0(y) = A(U-c)u(y) \tag{41}$$

として $u(y)$ を求める．

$$\phi_0'' = Au''(U-c) + 2AU'u' + AU''u$$

であるから，これを第 1 の微分方程式に代入し整理すると

$$Au''(U-c)^2 + 2A(U-c)U'u' = 0 \tag{42}$$

を得る．$u'(y) = v(y)$ とすると

$$v'(U-c) + 2U'v = 0 \Longrightarrow \frac{v'}{v} = -\frac{2U'}{U-c}$$

を得るから，

$$v = \frac{1}{(U-c)^2} \Longrightarrow u = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{(U-c)^2}\mathrm{d}y$$

となり (41) へ代入すれば ϕ_0 が得られる．

(ii)　前記同様に 1 つの解 $A(U-c)$ が分かっている場合とする．よって (i) と同様なので微分方程式の左辺は (43) と同じである．ここでも $\phi_n = A(U-c)u$ とすると，(3.5.4) の第 2 の常微分方程式は

$$Au''(U-c)^2 + 2A(U-c)U'u' = (U-c)\phi_{n-1} \tag{43}$$

となり，やはり $u' = v$ とすると

$$v' + \frac{2U'}{U-c}v = \frac{\phi_{n-1}}{A(U-c)}$$

という形に直すことができる．

$$M \equiv \frac{2U'}{U-c}, \quad N \equiv \frac{\phi_{n-1}}{A(U-c)}$$

を導入し，常微分方程式定数変化法の公式を用いると

$$v(y) = \mathrm{e}^{-\int M\mathrm{d}y}\left[\int \left\{N\mathrm{e}^{\int M\mathrm{d}y}\right\}\mathrm{d}y + C_0\right] \tag{44}$$

が得られる．

$$\mathrm{e}^{-\int M\mathrm{d}y} = \frac{1}{(U-c)^2}, \quad \mathrm{e}^{\int M\mathrm{d}y} = (U-c)^2$$

であるから，これを (44) へ戻すと

$$u' = v = \frac{1}{(U-c)^2}\left[\int \frac{\phi_{n-1}}{A(U-c)}(U-c)^2\mathrm{d}y + C_0\right]$$
$$= \frac{1}{A(U-c)^2}\left[\int (U-c)\phi_{n-1}\mathrm{d}y + C_0\right]$$

となり，更に積分すると

$$u = \int \frac{1}{A(U-c)^2}\left[\int (U-c)\phi_{n-1}\mathrm{d}y + C_0\right]\mathrm{d}y$$

が導かれる．C_0 は ϕ_0 の解の中に含まれているので，$C_0 = 0$ とすると

$$\phi_n = A(U-c)u = (U-c)\int^y \frac{1}{(U-c)^2}\left[\int^y (U-c)\phi_{n-1}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}y$$

が得られ，これは (3.5.5) の第 2 の結果である．

///□

積分路には Rayleigh 方程式の特異点 y_s を含んでいない．この解（すなわち関数）が一様収束することを数学的帰納法により証明する．

（証明） y と y_0 を結ぶ 1 つの積分路 Γ を y_s を避けて複素 y 平面上にとり，Γ に沿って y_0 から測った曲線の長さを ℓ とする．M, K, k を

$$M = \max_{y\in\Gamma}|\phi_0|, \quad K = \max_{y\in\Gamma}|U-c|, \quad k = \min_{y\in\Gamma}|U-c|, \tag{3.5.6}$$

で定義する．まず，ある n の値に対して

$$|\phi_n(y)| < \frac{M}{(2n)!}\left(\frac{K\ell}{k}\right)^{2n}, \tag{3.5.7}$$

が成立すると仮定すると，(3.5.5) を用いて

$$|\phi_{n+1}(y)| = \left|(U-c)\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{(U-c)^2}\int_{y_0}^{y}(U-c)\phi_n\mathrm{d}y\right|$$
$$< \frac{M}{(2n)!}\left(\frac{K}{k}\right)^{2n+2}\int_0^\ell \mathrm{d}\ell\int_0^\ell \ell^{2n}\mathrm{d}\ell$$
$$= \frac{M}{\{2(n+1)\}!}\left(\frac{K\ell}{k}\right)^{2(n+1)}, \tag{3.5.8}$$

となり，(3.5.7) が $n+1$ のときも成立する．一方，$n=0$ に対しては，仮定により $|\phi_0| < M$ であり (3.5.7) が成立する．よって数学的帰納法により (3.5.7) は全ての n に対して成立する．

$\phi_n(y)$ に対するこの評価を用いると (3.5.2) から

$$|\phi(y)| \le \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}|\phi_n(y)| < M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{(2n)!}\left(\frac{K\ell}{k}\right)^{2n}$$

$$= M\cosh\left(\frac{K\ell}{k}\right), \tag{3.5.9}$$

したがって，有限な $\alpha K\ell/k$ に対して $\phi(y)$ は優級数が収束するため，一様収束する．(証明終り)

//
【メモ】: 関数 $\phi(y)$ が積分路 y にわたり一様収束するということを証明している．それが $y \in \Gamma$ という表現に現れている．

次にまず (3.5.7) の形について触れておく．$n = 1$ のとき (3.5.5) の解から（ただし，本文中の積分の書き方は誤解を招きやすいので，メモに記した方を使う）

$$\phi_1 = (U-c)\int_{y_0}^{y}\left[\frac{1}{(U-c)^2}\int_{y_0}^{y}(U-c)\phi_0 \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}y$$

$$= K\int_0^{\ell}\left[\frac{1}{k^2}\int_0^{\ell}KM\mathrm{d}\ell\right]\mathrm{d}\ell = M\left(\frac{K}{k}\right)^2\int_0^{\ell}\left[\int_0^{\ell}1\mathrm{d}\ell\right]\mathrm{d}\ell$$

$$= M\left(\frac{K}{k}\right)^2\int_0^{\ell}\ell\mathrm{d}\ell = \frac{M}{2}\left(\frac{K\ell}{k}\right)^2$$

であり，ϕ_2 は

$$\phi_2 = (U-c)\int_{y_0}^{y}\left[\frac{1}{(U-c)^2}\int_{y_0}^{y}(U-c)\phi_1 \mathrm{d}y\right]\mathrm{d}y$$

$$= K\int_0^{\ell}\left[\frac{1}{k^2}\int_0^{\ell}K\frac{M}{2}\left(\frac{K\ell}{k}\right)^2\mathrm{d}\ell\right]\mathrm{d}\ell = \frac{M}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^4\int_0^{\ell}\left[\int_0^{\ell}\ell^2\mathrm{d}\ell\right]\mathrm{d}\ell$$

$$= \frac{M}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^4\int_0^{\ell}\frac{\ell^3}{3}\mathrm{d}\ell = \frac{M}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{K\ell}{k}\right)^4 = \frac{M}{(2\cdot 2)!}\left(\frac{K\ell}{k}\right)^4$$

となり，一般の n に対しては (3.5.7) の形が得られる．

これと同じ議論で，(3.5.8) 式における ℓ に関する積分の表記は

$$\int_0^{\ell}\mathrm{d}\ell\int_0^{\ell}\ell^{2n}\mathrm{d}\ell \Longrightarrow \int_0^{\ell}\left(\int_0^{\ell}\ell^{2n}\mathrm{d}\ell\right)\mathrm{d}\ell = \frac{\ell^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)}$$

としている．
//□

3.10.3 平板境界層

平板近傍での近似解（Blasius の解ではない）

$$\left.\begin{aligned}\overline{u}_1 &= \frac{U_0}{2}\left(k\eta - \frac{k^2\eta^2}{4!} + \frac{11k^3\eta^7}{7!} - \frac{375k^4\eta^{10}}{10!} + \cdots\right),\\ \overline{u}_2 &= \frac{U_0}{2\sqrt{R_\ell}}\left(\frac{k\eta^2}{2} - \frac{4k^2\eta^5}{5!} + \frac{77k^3\eta^8}{8!} - \frac{3750k^4\eta^{11}}{11!} + \cdots\right)\end{aligned}\right\}, \tag{3.10.10}$$

//
【メモ】: 日野と巽では η の定義が異なり $\eta_{\text{日}}/2 = \eta_{\text{巽}}$ である．以下でだけ $\eta = \eta_{\text{日}}$ で書くと，壁面近傍で

$$f(\eta) = A_0 + A_1\eta + \frac{A_2}{2!}\eta^2 + \cdots$$

と展開したとき，境界条件と境界層方程式などから $A_0 = A_1 = A_3 = A_4 = 0$ が得られる（日野幹雄著「流体力学」p.136）．これらをまとめ解を構成すると

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\alpha^{n+1} C_n}{(3n+2)!}\eta^{3n+2}$$

となる．ここで $\alpha = A_2$ である．これを η で微分して得られた速度 $\overline{u}_1$ が (3.10.10) である．
//□

$$R_\ell = \frac{\ell U_0}{\nu}, \tag{3.10.11}$$

は前縁からの距離 ℓ を代表長さとするレイノルズ数

$$\eta = \frac{\sqrt{R_\ell}}{2\ell} x_2, \tag{3.10.12}$$

は相似変数で，k は (3.10.10) と数値解との比較で決まる定数で，$k = 1.3284$ と求められている．

排除厚さ δ

$$\delta = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) \mathrm{d}x_2, \tag{3.10.13}$$

平板の境界層に対しては

$$\delta = 1.73 \frac{\ell}{\sqrt{R_\ell}}, \tag{3.10.14}$$

$$\left.\begin{aligned} & x = \frac{x_1}{\delta}, \quad y = \frac{x_2}{\delta} = 1.16\eta, \\ & U(y) = \frac{1}{U_0}\overline{u}_1(\eta), \end{aligned}\right\} \tag{3.10.15}$$

//
【メモ】: (3.10.12) と (3.10.14) より

$$y = \frac{x_2}{\delta} = \eta \frac{2\ell}{\sqrt{R_\ell}} \frac{\sqrt{R_\ell}}{1.73\ell} = \frac{2}{1.73}\eta \approx 1.156\eta$$

//□

局所的なレイノルズ数を

$$R = \frac{\delta U_0}{\nu} = 1.73\sqrt{R_\ell}, \tag{3.10.16}$$

で定義すると，境界層の無次元速度は

$$U(y) = 0.574y - 0.0210y^4 + 0.947 \times 10^{-4} y^7 - \cdots\,, \tag{3.10.17}$$

//
【メモ】: (3.10.10) の第 1 項に (3.10.15) の y を使うと

$$\frac{\overline{u}_1}{U_0} = \frac{1}{2}k\eta = \frac{1}{2}1.32824\frac{y}{1.156} \approx 0.574y$$

//□