Feynman 講義
重力の理論

R. P. Feynman, F. B.Morinigo, W. G.Wagner
和田純夫訳
備忘録作成　伊藤榮信 (2017)

1995 年

備忘録作成後の感想（「あとがき」が先頭に来てしまいました）:

ブライアン・ハットフィールドによる付録 B での一部を引用すると

重力を研究するのに最初に（ファインマンによれば）「気紛れで感傷的な」微分幾何を学ぶ必要がなくなることである.（その代わりに場の量子論「さえ」学べばよい.）重力の量子化を最終目標としているとき，幾何学的解釈は邪魔であるとファインマンは考えた．場の理論的な観点からは，量子幾何とかトポロジー揺らぎとか時空の泡などの物理的意味を最初から定義する必要は無く，量子化した後で幾何学的意味を探せばよい.

とある．すなわち，ファインマンはこの講義で幾何学に頼らないで一般相対性理論を導こうとしているものと考えた.

またブレスキルとキップ S. ソーンによる本書の「序」には 3 章から 6 章でファインマンは独自にアインシュタインの一般相対性理論に一致する理論を導いている，と記されていることから，とりあえずこの 3 章から 6 章までを読んでみようと考えた.

確かに，6 章では幾何学に基づく方法ではなく，変分すればアインシュタイン方程式が得られるところの不変なラグランジアンを導こうとしている．かなり代数的であるがしっくりこない.

もう一度気を取り戻し，更に 8 章まで読み進めるとファインマンは，ほんの少し幾何学の考え（曲率）を取り入れて再度アインシュタイン方程式を導出する試みを行っている．曲がった空間での曲率テンソルが ····

そんなこんなと色々あるが，水星の近日点移動の計算は一般的に行われている方法とはかなり異なり（たぶん），ファインマンは人と同じことをやるのが嫌いなのだなということを感じさせる計算であった.

そして何と言っても，10 章においてファインマンは（別の章と 10 章までの間に）アインシュタインに最大限の敬意，現代風に言うならば respect，を払ったうえで，アインシュタイン方程式 $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \lambda^2 T_{\mu\nu}$ の美しい左辺と醜い右辺について触れている．そして謙虚にも，この右辺の「形を推測することを学ばなければならない」としている.

以下は,「序」の要約であるが，原著邦訳版「序」のほぼ 5 分の 1 を記したにすぎない.

序

1962 年から 1963 年にかけて（ほぼ 1 年）ファインマンによりカリフォルニア工科大学で行われた講義を，モリニーゴとワーグナーが講義録として作成したものにファインマンが目を通した.

ワーグナーが数学的部分を，モリニーゴが語りの部分を担当しそれをファインマンがチェックし，さまざまな修正と追加がなされた.

この講義は全体で 27 回であり二人はすべての講義録を作成したが，この本ではほぼ最初の 17 回の講義だけが記されている．ファインマンは最初の 11 回分しかチェックしていない.

この講義録を出版した主な 3 つの理由:

I. 第 3 章から第 6 章にかけて提示されたアプローチでは物質のエネルギー運動量テンソルに結合した質量の無いスピン 2 の場（重力子）の理論が構築され，この理論を自己無撞着にしようとすると必然的にアインシュタインの一般相対性理論に一致することが示される（このノートが物理学者の中で有名になったのは，この内容のためである）.

II. このノートは物理の基礎やその他の話題について，多くの魅力的で啓発的な余談や挿話を含んでいる.

III. このノートは歴史的価値がある．ファインマンは講義をしていたころの数年間，重力の基本的な問題について深く考えていた．その当時のファインマンの洞察と見解を記録しておくことは有用である．32 年後の今もその先見の明を感じさせるものもあり，また一方では素朴過ぎたり間違っているものもある．見解が急速に展開していったものもある．これは特に第 14 章について言える.

この講義を完全に理解するには，読者は理論物理の高レベルの教育を受けている必要がある．ファインマンは出席者が，作用からファインマン則を導き，その規則を使ってツリーダイアグラムを計算する方法を知っているという程度には，場の量子論になじんでいると仮定した.

1995 年 5 月カルテク

ジョン　プレスキル
キップ　S. ソーン

第 1 章

1.1　重力への場のアプローチ

我々の教育的アプローチは，場という考え方に慣れた素粒子物理学者に適している．彼らにとって，すべてが一つの大方程式に含まれている数十個のから，宇宙が構成されていると考えるのは難しいことではない．そう考えれば重力現象は，それまで考えられていなかったそのような場を一つ増やすだけのことに過ぎないことになる．

1.2　重力現象の特徴

第 1 に重力という，この引力は逆二乗則に従うということである．

第 2 の驚くべきことは，その弱さである．電気力と重力の大きさの比は

$$F_{電気}/F_{重力} = 4.17 \times 10^{42}$$

1.3　重力の量子効果

重力の量子論の一つの結論は，この力が，通常，重力子と呼ばれる仮想粒子の交換によって媒介されることである．したがって，光子が観測できるように，ある状況では重力子が観測されるだろうと期待するかもしれない．

重力子を観測できる望みはまったくなさそうである．

1.4　マクロな物体を量子化する際の哲学的問題について

1.5　他の場の結果としての重力

重力というこの新しい現象に対処するには，2 つの方向がありうる．それは

1. 重力は新しい場である．

2．重力は既に知っているが，正しく計算していなかった何かの結果である．

重力はニュートリノなど，すでに知られている仮想粒子の交換から生じないだろうかと考える人もいるだろう．ニュートリノは一応正しい性質を持つ．中性であり，質量もなくその相互作用は $1/r$ のように振る舞い，その相互作用は非常に弱い．

次章ではこの重力ニュートリノ理論を検討し，なぜそれが失敗するかを見る．その後で，新しい場としての重力理論の構築を始めることにする．

第2章

2.1　統計力学の公理

2.2　机上の理論の問題点

2.3　１ニュートリノの交換

2.4　２ニュートリノの交換

第3章

3.1 重力のスピン

第一に，重力が長距離力であるということは自動的に，相互作用のエネルギーが距離に $1/r$ のように依存することを意味する．場の理論には，それしか可能性は無い．

場は，重力子と呼ぶ粒子の交換によって担われる．

$1/r^2$ に比例する力を導くためには，その質量はゼロでなければならない．

場の理論を書き下す前に考えるべきことは，重力子のスピンは何かという問題である．もしスピンが 1/2 もしくは半整数だったら，前章の 2.3 節で説明した困難に陥る．つまり 1 粒子交換と何も起こらないプロセスとの間の干渉がありえない．

したがって，重力子のスピンは整数 $0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ のうちのどれかである．距離依存性は質量のみによって決まるので，これらの整数のどれであっても $1/r$ に比例する相互作用が求まる．

スピンによる違いを見るには，重力子の効果のスピンによる微妙な違いを見なければならない．

スピンが大きくなるほど結果を得る労力が増すので小さい方から順番に考えていく．

スピン 1 の理論は，実質的に電気力学と同じである，2 つのスピン 1 の場の存在を禁じる理由は無いが，重力子はその 1 つではありえない．

なぜなら，スピン 1 の場合は同種粒子は引き付けあい，異種粒子は反発するからである．奇数スピンの理論では常にこれが成り立つ．逆に偶数スピンは常に引力を生み出すので，我々はスピン 0，2 を選び，それで失敗したら 4 を考える．

スピン 0 の重力理論は束縛エネルギーの重力に対する振る舞いに基づき否定される[1]．

---

[1]伊藤注：この部分は B．ハットフィールドによる付録 B を参考とする．

3.2 典型的な理論である電気力学での振幅と偏極

我々のプログラムは結局，すでに知られている他の場の理論との類推に基づきスピン 2 の理論を構築することである．

電気力学との類推により正しい理論を推量していくことにしよう．

場の理論では，場はスカラー，ベクトル，テンソルのポテンシャル関数で表される：

スピン 0　X　スカラー・ポテンシャル
スピン 1　A_μ　ベクトル・ポテンシャル
スピン 2　$h_{\mu\nu}$　テンソル・ポテンシャル

電磁気の発生源はベクトルカレントであり，ベクトルポテンシャルとは

$$A_\mu = -\frac{1}{k^2} j_\mu \tag{3.2.1}$$

という関係にある[2]．電磁気での振幅は図のダイアグラムで表されるよう

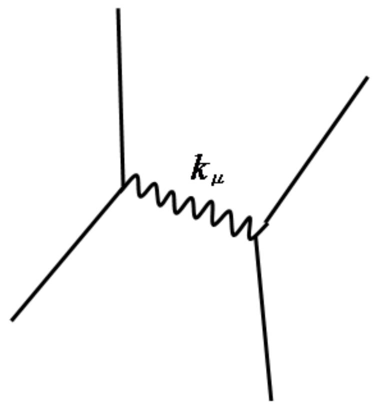

図 3.1:

なカレントとカレントをつなぐ伝播関数を使って計算する．電磁気の実質

[2]伊藤注：ソース項 j_μ をもつベクトルポテンシャル A_μ が満たす方程式（Maxwell 方程式）

$$\Box A_\mu = j_\mu$$

で，$A_\mu \propto \exp(\mathrm{i}k \cdot x)$ とした場合．

はカレントと場の具体的な相互作用 $A_\mu j^\mu$ の中に含まれている[3]．これは2つのカレントの間の相互作用

$$-j_\mu \frac{1}{k^2} j^\mu \tag{3.2.2}$$

を与える[4]．座標軸を適当に選択すると，ベクトル k_μ は

$$k_\mu = (\omega, \kappa, 0, 0) \tag{3.2.3}$$

と表される．成分の順番は $4, 3, 2, 1$ としているので

$$\begin{aligned} x^\mu &= (t, z, y, x), \\ A_\mu &= (A_4, A_3, A_2, A_1) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

である．交換される粒子の運動量が k_μ の場合には，カレント・カレント間の相互作用は

$$-j'_\mu \frac{1}{k^2} j^\mu = -\frac{1}{\omega^2 - \kappa^2}(j'_4 j_4 - j'_3 j_3 - j'_2 j_2 - j'_1 j_1) \tag{3.2.5}$$

となる[5]．

カレントの4次元発散がゼロであるという電荷の保存則は，運動量空間では単に

$$k_\mu j^\mu = 0 \tag{3.2.6}$$

となる[6]．

これと (3.2.3) より

$$\omega j^4 - \kappa j^3 = 0, \text{もしくは}\ j^3 = \frac{\omega}{\kappa} j^4 \tag{3.2.7}$$

これを (3.2.5) に代入すると

$$-j'_\mu \frac{1}{k^2} j^\mu = \frac{1}{\kappa^2} j'_4 j_4 + \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2}(j'_2 j_2 + j'_1 j_1) \tag{3.2.8}$$

２つの項の意味：

カレントの第4成分は単に電荷密度である．静的な電荷の場合，ゼロでな

---

[3] 伊藤注：例えばエイチスン＆ヘイ著藤井訳「ゲージ理論入門 I」(2.33) 式

[4] 伊藤注：付録 B にも記されているように正確な記述は

$$-j_\mu \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} j^\nu$$

である．

[5] 伊藤注：上の注により $\eta_{\mu\nu}$ があるので上付きの添え字が下へ移行して $j'_i j_i$ となる．

[6] 伊藤注：平面波のカレント $j^\mu \propto \exp(\mathrm{i}k \cdot x)$ を仮定しているので，発散 $\partial_\mu j^\mu = 0$ の実行より得られる．

い成分はこれだけである．第 1 項は振動数[7]に依存しない．これの逆フーリエ変換をとると，瞬間的に作用するクーロンポテンシャルとなる：

$$(\mathrm{F.T.})^{-1}\left[\frac{1}{\kappa^2}j'_4 j_4\right]=\frac{e^2}{4\pi r}\delta(t-t') \tag{3.2.9}$$

速度が遅い極限ではこれが常に主要項となる．この項は同時刻での作用を表すが，(3.2.8) 式の 2 つの項への分離が共変的ではないからに過ぎない．相互作用全体は共変な量であり，第 2 項が瞬間的に作用するクーロンポテンシャルに対する補正を表す．

2 つのカレントの間の相互作用には常に仮想光子が関与する．$\omega=\pm\kappa$ にある相互作用振幅の極を調べることで，実粒子について知ることができる．観測される光子が厳密に $\omega=\pm\kappa$ となることはありえない．

物理的には，太陽や月からくる光子を知っており，その ω と κ の違いは極めて小さい．数百万光年の遠方にある銀河からくる光子を観測した場合，極以外の物理的効果がないほど極に近いと考えてよい（$\omega=\kappa$）．

$\omega=\kappa$ の極の留数は 2 つの項の和であり，それぞれが 2 つの因子の積である．j'_1 や j_1 と相互作用する光子，j'_2 や j_2 と相互作用する光子の二つがある．通常の言い方をすれば，2 種類の偏極（偏光）がある．

円偏光は，面偏光した光子の 1 次結合に他ならず，和 $(j'_1 j_1+j'_2 j_2)$ の別の分け方

$$(j'_1 j_1+j'_2 j_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(j_1+\mathrm{i}j_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(j'_1+\mathrm{i}j'_2)^*+\frac{1}{\sqrt{2}}(j_1-\mathrm{i}j_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(j'_1-\mathrm{i}j'_2)^* \tag{3.2.10}$$

に対応する．

3.3 重力子交換の振幅

瞬間的な非相対論的項に特別な注意を払わなければならない．重力に対する現在の実験的観測で明らかになっているのは，この項だけだからである．

運動量空間でのダランベルシャンは k^2 であると仮定する．(3.2.1) 式の類推から，場のテンソルはその発生源のテンソルと

$$h_{\mu\nu}=\frac{1}{k^2}T_{\mu\nu} \tag{3.3.1}$$

という関係であるとする．電気力学とカレントとの類推から，相互作用のエネルギーは発生源テンソルにより

$$h'_{\mu\nu}T^{\mu\nu}=T'_{\mu\nu}\frac{1}{k^2}T^{\mu\nu} \tag{3.3.2}$$

[7]伊藤注：ω

と表されるとする．重力の特徴を再現できるようにテンソル $\boldsymbol{T}$ の具体的な性質を定める必要がある．

低速度の極限でニュートンの万有引力の法則，つまり相互作用のエネルギー

$$-\frac{T'_{44}T_{44}}{\kappa^2} \tag{3.3.3}$$

が得られる．

さらに，(3.2.2) 式を展開すると[8]

$$T'_{\mu\nu}\frac{1}{k^2}T^{\mu\nu} = \frac{1}{\omega^2-\kappa^2}\Big[T'_{44}T_{44} - 2T'_{43}T_{43} - 2T'_{42}T_{42} - 2T'_{41}T_{41} + 2T'_{23}T_{23}$$
$$+ 2T'_{31}T_{31} + 2T'_{21}T_{21} + T'_{33}T_{33} + T'_{22}T_{22} + T'_{11}T_{11}\Big] \tag{3.3.4}$$

電荷の保存則 (3.2.6) 式と同様にエネルギー保存則の運動量空間表現は

$$k^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{3.3.5}$$

となる．k_1, k_2 がゼロとなる座標系では

$$T_{3\nu} = -\frac{\omega}{\kappa}T_{4\nu} \tag{3.3.6}$$

となる．この関係式を (3.2.4) 式に使うと，瞬間項は

$$-\frac{1}{\kappa^2}\left[T'_{44}T_{44}\left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right) - 2T'_{41}T_{41} - 2T'_{42}T_{42}\right] \tag{3.3.7}$$

で[9]，遅延項は

$$\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}\Big[T'_{22}T_{22} + T'_{11}T_{11} + 2T'_{21}T_{21}\Big] \tag{3.3.8}$$

---

[8]伊藤注：$\eta^{\mu\nu}$ を Minkowsky 空間の計量テンソルとする．

$$T'_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T'_{\mu\nu}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}T_{\alpha\beta}，\ \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1, \eta^{44} = 1，\text{その他は } 0$$

[9]伊藤注：簡単な計算だが

$$T_{33} = -\frac{\omega}{\kappa}T_{43}，\ T_{34} = -\frac{\omega}{\kappa}T_{44}，\ T_{32} = -\frac{\omega}{\kappa}T_{42}，\ T_{31} = -\frac{\omega}{\kappa}T_{41}$$

などを使って，

$$T'_{33}T_{33} + T'_{44}T_{44} - 2T'_{43}T_{43} = \frac{\omega^4}{\kappa^4}T'_{44}T_{44} + T'_{44}T_{44} - \frac{\omega^2}{\kappa^2}T'_{44}T_{44} = \left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right)^2 T'_{44}T_{44}$$

また，

$$2T'_{23}T_{23} - 2T'_{42}T_{42} = -2\left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right)T'_{42}T_{42}，\ 2T'_{31}T_{31} - 2T'_{41}T_{41} = -2\left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right)T'_{41}T_{41}$$

となる．

　スピン 0 の部分を取り除くには[10]振幅に

$$\alpha T'^{\nu}_{\ \nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu}_{\mu} \tag{3.3.9}$$

を加えなければならない．遅延項では，この追加により

$$\alpha\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}(T'_{11}+T'_{22})(T_{11}+T_{22})$$

が加わる[11]．遅延項内の独立な項を 2 つにする適切な α の値は $-1/2$ であり，このとき遅延項は

$$\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}\left[\frac{1}{2}(T'_{11}-T'_{22})(T_{11}-T_{22})+2T'_{12}T_{21}\right] \tag{3.3.10}$$

となる．2 つの偏極は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{11}-T_{22}), \quad \sqrt{2}T_{21} \tag{3.3.11}$$

であるが，対称な形で書くと

$$\sqrt{2}T_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{12}+T_{21}) \tag{3.3.11a}$$

となる．したがって重力子の平面波解は

$$h_{\mu\nu}=e_{\mu\nu}\exp(\mathrm{i}k_\sigma x^\sigma) \tag{3.3.12}$$

となり，偏極テンソルのゼロでない成分は

$$e_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ e_{22}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ e_{12}=e_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.3.13}$$

相互作用全体

$$T'_{\mu\nu}\frac{1}{k^2}T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}T'^{\nu}_{\ \nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu}_{\mu}$$

は

$$T'^{\sigma\tau}P_{\sigma\tau,\mu\nu}T^{\mu\nu}$$

と書くこともできる．ここで重力子の伝播関数 $P_{\sigma\tau,\mu\nu}$ は

$$\frac{1}{2}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\tau}+\eta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\tau}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\tau})\frac{1}{k^2}$$

[10]伊藤注：この理由は付録 B のハットフィールドの解説を参考にした．

[11]伊藤注：この追加のすべては後の (3.4.2) 式で行うが，実際は

$$(T'_{11}+T'_{22}+T'_{33}+T'_{44})(T_{11}+T_{22}+T_{33}+T_{44})$$

であるが，これはその一部で T_{44}, T_{33} 等は以前と同様瞬間項の方にまとめられる．

である．簡単のため通常は伝播関数を $1/k^2$ とし，発生源から放出された仮想重力子の相互作用を，振幅

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\sigma}_{\sigma}\right)$$

で表し，吸収の結合を $h_{\mu\nu}T'^{\mu\nu}$ とする[12]．

3.4 振幅内の項の物理的解釈

前半略

スピン 1 の理論との類推からスピン 2 の理論を求めた．光子の平面波が伝播関数の極によって表され，重力子の伝播関数も $\omega = \pm\kappa$ に極をもつので，重力子の平面波の存在を仮定した．

後で検討するが，今のところ完全に無視されている問題がいくつかある．電磁気の発生源は保存し，重力の発生源であるエネルギーも保存する．しかしこの 2 つの保存は性質が異なる．光子は電荷をもたないが，重力子は $\hbar\omega$ というエネルギーをもっており，これ自体が重力子の発生源になる．これを重力場の非線形性と呼ぶ．

重力については，重力場ではなく，振幅のみを扱い，場の方程式の議論については避けてきた．

場の方程式がなくとも，相互作用の形だけを考えることによって議論できる物理的結果がいくつかある．$\alpha = -1/2$ の場合の振幅の完全な式を書くと

$$\begin{aligned}
&2\left[T'_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T'^{\nu}_{\ \nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu}_{\mu}\right] \\
&= -\frac{1}{\kappa^2}\left[T'_{44}T_{44}\left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right) + T_{44}(T'_{11}+T'_{22})\right. \\
&\qquad \left. + T'_{44}(T_{11}+T_{22}) - 4T'_{41}T_{41} - 4T'_{42}T_{42}\right] \\
&\quad -\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}\left[(T'_{11}-T'_{22})(T_{11}-T_{22}) + 4T'_{12}T_{21}\right]
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

を得る[13]．

[12] 伊藤注：電磁場の場合の，$A_\mu j'^\mu$ に相当．

[13] 伊藤注：既に同様の計算を行っているので，計算の一部のみ記す．

$$\begin{aligned}
T'^{\nu}_{\ \nu}T^{\mu}_{\mu} &= (T'_{44}-T'_{33}-T'_{22}-T'_{11})(T_{44}-T_{33}-T_{22}-T_{11}) = (T'_{44}-T'_{33})(T_{44}-T_{33}) \\
&\quad +(T'_{44}-T'_{33})(T_{22}+T_{11}) + (T_{44}-T_{33})(T'_{22}+T'_{11}) + (T'_{22}+T'_{11})(T_{22}+T_{11}) \\
&= \left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right)^2 T'_{44}T_{44} + \left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right)T'_{44}(T_{22}+T_{11}) + \left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right)T_{44}(T'_{22}+T'_{11})
\end{aligned}$$

$+(T'_{22}+T'_{11})(T_{22}+T_{11})$ となり，これに 1/2 をかけたものを (3.3.7)，(3.3.8) 式から引けばよい．

この式から得られる物理的事実：
$T'_{\mu\nu}$ が太陽のような静的重力源とし，T'_{44} のみが生き残るとする[14]．太陽と高速粒子との間の重力を考える．粒子は光速 c に近い速度 v で運動しておりエネルギー運動量テンソルの成分は $T_{11}=(v^2/c^2)T_{44}$ を満たしているとすると，(3.4.2) の相互作用のエネルギーは T'_{44} だけの場合より $1+(v^2/c^2)$ だけ大きくなり，光子の場合 2 倍になる．星の光が太陽の近くを通るときの光の屈折はニュートン理論の場合のほぼ 2 倍である．

3.5 重力場のラグランジアン

まず，電気力学での作用は

$$S_E=-\int \mathrm{d}\tau\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}\right)+j^\mu A_\mu\right] \tag{3.5.1}$$

であり，このラグランジアンから場の方程式 $A_\mu=-(1/k^2)j_\mu$ を得る．

重力の場合，上の第 2 項に対応する項を見出すのは簡単で，$-\lambda h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ とすればよい．$h_{\mu\nu}$ の導関数を含む項の推定は自明ではない．添字の数も，その縮約の方法もあまりに多い．ラグランジアンの一般形を書くにはあらゆる形の導関数の項を記し，各項の前に任意の係数をつける．

$$a\left(\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)+b\left(\frac{\partial h^{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)+c\left(\frac{\partial h^\mu_\mu}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial h^\sigma_\nu}{\partial x^\sigma}\right)+\cdots \tag{3.5.2}$$

(3.5.1) を A_μ で変分すると

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}A_\mu-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu=j_\mu \tag{3.5.3}$$

を得る．記号法について，上記の式を

$$A_{\mu,\nu}{}^{;\nu}-A_{\nu,\mu}{}^{;\nu}=j_\mu \tag{3.5.4}$$

と書く．電荷の保存則より

$$A_{\mu,\nu}{}^{;\nu\mu}-A_{\nu,\mu}{}^{;\nu\mu}=0 \tag{3.5.5}$$

を得る[15]．

重力場の場合

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0 \tag{3.5.6}$$

となるように係数 $a,b,c,\cdots$ を調整する．

[14]伊藤注：他の $T'_{11}=T'_{12}=T'_{22}=\cdots=0$

[15]伊藤注：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(A_{\mu,\nu}{}^{;\nu}-A_{\nu,\mu}{}^{;\nu}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\mu}j_\mu=j_\mu{}^{,\mu}=0 \quad \text{であり，}\quad \frac{\partial}{\partial x_\mu}B^\nu=B^{\nu,\mu},\quad \frac{\partial}{\partial x^\mu}B^\nu=B^\nu{}_{,\mu}$$

という記号法になる．

3.6 重力場の方程式

場のテンソル $h_{\mu\nu}$ の導関数の積の可能な形をみつける．テンソルの添字と微分演算の添字が異なるものは

1. $h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\nu,\sigma}$
2. $h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\sigma,\nu}$

の 2 つがある．テンソルの添字と微分演算の添字が同じもの 3 つある：

3. $h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma}$
4. $h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}$
5. $h^{\nu}{}_{\nu,\mu}h_{\sigma}^{\sigma,\mu}$

しかし，2 は 3 から部分積分により求まるので省略してよい．

//

伊藤注：$h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma} \to h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\sigma,\nu}$ の同等性検証

$$\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \longrightarrow \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial h^{\mu\sigma}}{\partial x_{\nu}}$$

$$\int \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\mathrm{d}x^{\nu} = h^{\mu\nu}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int h^{\mu\nu}\frac{\partial^2 h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\nu}}\mathrm{d}x^{\nu} = -\int h^{\mu\nu}\frac{\partial^2 h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\nu}}\mathrm{d}x^{\nu}$$

（$\partial h^{\sigma}_{\mu}/\partial x^{\nu}(\pm\infty) = 0$ とした．）上の積分で被積分関数どうしを比べると

$$\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}} = -h^{\mu\nu}\frac{\partial^2 h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\nu}}$$

再度，部分積分を行う：

$$\int \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\mathrm{d}x^{\sigma} = \int -h^{\mu\nu}\frac{\partial^2 h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\nu}}\mathrm{d}x^{\sigma} = \left[-h^{\mu\nu}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right]^{\infty} + \int \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\mathrm{d}x^{\sigma}$$

上の積分の最初と最後の被積分関数より

$$\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

（：微分演算の交換）$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$ を上の式の右辺に用いると

$$\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta})}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial h^{\sigma}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \eta^{\nu\beta}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial(\eta^{\mu\alpha}h^{\sigma}_{\mu})}{\partial x^{\nu}}$$

$$= \eta^{\nu\beta}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial h^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\left(\eta^{\nu\beta}\frac{\partial h^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\nu}}\right) = \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial h^{\alpha\sigma}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial h^{\mu\sigma}}{\partial x_{\nu}}$$

最右辺で $\alpha \to \mu$，$\beta \to \nu$ と置き換えた．また，途中 $\eta^{\nu\beta}\partial/\partial x^{\nu} = \partial/\partial x_{\beta}$ を使った[16]．この式の最左辺と最右辺より，$h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma} = h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\sigma,\nu}$

[16]伊藤注：このように $\partial/\partial x^{\alpha}$ は $\partial/\partial x^{\alpha} = v_{\alpha}$ のように共変ベクトルとして扱われ，一方 $\partial/\partial x_{\alpha} = v^{\alpha}$ すなわち反変ベクトルとして扱われる．

//
こうして，次のような作用

$$S = \int \mathrm{d}\tau \Big[ah^{\mu\nu,\sigma}h_{\mu\nu,\sigma} + bh^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma} + ch^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}$$

$$+dh^{\nu}{}_{\nu,\mu}h_{\sigma}{}^{\sigma,\mu} + \lambda T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\Big] \tag{3.6.1}$$

を仮定する[17]．場の導関数を発生源テンソル $T^{\mu\nu}$ と結びつける微分方程式を得るため $h^{\mu\nu}$ で変分をとると

$$a2h_{\mu\nu,\sigma}{}^{;\sigma} + b(h_{\mu\sigma,\nu}{}^{;\sigma} + h_{\nu\sigma,\mu}{}^{;\sigma}) + c(h^{\sigma}_{\sigma,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha})$$

$$+d2\eta_{\mu\nu}h^{\sigma}_{\sigma,\beta}{}^{;\beta} = -\lambda T_{\mu\nu} \tag{3.6.2}$$

を得る．
//
伊藤注：変分計算 a から順に d まで：$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^4$

a//////////

$$\delta(h^{\mu\nu,\sigma}h_{\mu\nu,\sigma}) = \delta\left(\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right) = \frac{\partial(\delta h^{\mu\nu})}{\partial x_\sigma}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial(\delta h_{\mu\nu})}{\partial x^\sigma}$$

部分積分前半：

$$\delta h^{\mu\nu}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\bigg| - \int \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x_\sigma}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\sigma = -\int h_{\mu\nu,\sigma}{}^{;\sigma}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\sigma$$

ただし，積分は $\mathrm{d}x^\sigma$ で行った．
部分積分後半：

$$\delta h_{\mu\nu}\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\bigg| - \int \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x_\sigma}\delta h_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\sigma = -\int \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x_\sigma}\delta h_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\sigma$$

$$= -\int \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x_\sigma}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\sigma$$

よって

$$a\delta(h^{\mu\nu,\sigma}h_{\mu\nu,\sigma}) = -\int 2a\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x_\sigma}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\sigma = -\int 2ah_{\mu\nu,\sigma}{}^{;\sigma}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\sigma$$

b//////////

$$\delta(h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma}) = \delta\left(\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial h^\sigma_\mu}{\partial x^\sigma}\right) = \frac{\partial(\delta h^{\mu\nu})}{\partial x^\nu}\frac{\partial h^\sigma_\mu}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial(\delta h^\sigma_\mu)}{\partial x^\sigma}$$

[17]伊藤注：λ の前の符号は+であるが，(3.6.2) など以下の式との整合性をとるためにはマイナスである．実際，(4.1.4) ではマイナスになっている．

部分積分前半：

$$\delta h^{\mu\nu}\frac{\partial h^\sigma_\mu}{\partial x^\sigma}\bigg| - \int \frac{\partial^2 h^\sigma_\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu = -\int \frac{\partial^2(\eta^{\sigma\beta}h_{\beta\mu})}{\partial x^\sigma \partial x^\nu}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu$$

$$= -\int \eta^{\sigma\beta}\frac{\partial^2 h_{\beta\mu}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu = -\int \frac{\partial^2 h_{\beta\mu}}{\partial x_\beta \partial x^\nu}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu$$

最後の項で $\beta \to \sigma$ として

$$= -\int \frac{\partial^2 h_{\sigma\mu}}{\partial x_\sigma \partial x^\nu}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu = -\int h_{\mu\sigma,\nu}{}^{;\sigma}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu$$

部分積分後半：

$$\delta h^\sigma_\mu\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\bigg| - \int \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}\delta h^\sigma_\mu\mathrm{d}x^\sigma = -\int \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}\delta h^\sigma_\mu\mathrm{d}x^\sigma$$

$$= -\int \eta^{\nu\beta}\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}(\delta\eta^{\mu\alpha}h^\sigma_\mu)\mathrm{d}x^\sigma = -\int \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta \partial x^\sigma}\delta h^{\alpha\sigma}\mathrm{d}x^\sigma$$

$\alpha \to \nu,\ \ \sigma \to \mu,\ \ \beta \to \sigma$ として

$$= -\int \frac{\partial^2 h_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma \partial x^\mu}\delta h^{\nu\mu}\mathrm{d}x^\mu = -\int h_{\nu\sigma,\mu}{}^{;\sigma}\delta h^{\nu\mu}\mathrm{d}x^\mu$$

よって

$$b\delta(h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^\sigma{}_{\mu,\sigma}) = b\left(-\int h_{\mu\sigma,\nu}{}^{;\sigma}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu - \int h_{\nu\sigma,\mu}{}^{;\sigma}\delta h^{\nu\mu}\mathrm{d}x^\mu\right)$$

c//////////

$$\delta(h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^\sigma{}_{\sigma,\mu}) = \delta\left(\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial h^\sigma_\sigma}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial(\delta h^{\mu\nu})}{\partial x^\nu}\frac{\partial h^\sigma_\sigma}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\frac{\partial(\delta h^\sigma_\sigma)}{\partial x^\mu}$$

部分積分前半：

$$\delta h^{\mu\nu}\frac{\partial h^\sigma_\sigma}{\partial x^\mu}\bigg| - \int \frac{\partial^2 h^\sigma_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu = -\int \frac{\partial^2 h^\sigma_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\delta h^{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu$$

部分積分後半：

$$\delta h^\sigma_\sigma\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\bigg| - \int \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\delta h^\sigma_\sigma\mathrm{d}x^\mu = -\int \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\delta\eta_{\sigma\beta}h^{\sigma\beta}\mathrm{d}x^\nu$$

$$= -\int \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \delta h^{\sigma\beta} \mathrm{d}x^\nu = -\int \eta_{\mu\nu} \frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \delta h^{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu$$

最後の積分で $\sigma \to \mu$, $\beta \to \nu$, $\mu \to \alpha$, $\nu \to \beta$ とした．よって

$$c\delta(h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^\sigma{}_{\sigma,\mu}) = c\left(-\int \frac{\partial^2 h^\sigma_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \delta h^{\mu\nu} \mathrm{d}x^\nu - \int \eta_{\mu\nu} \frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \delta h^{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu\right)$$

$$= c\left(-\int h^\sigma_{\sigma,\mu\nu} \mathrm{d}x^\nu - \int \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha} \mathrm{d}x^\mu\right)$$

d//////////

$$\delta(h^\nu{}_{\nu,\mu} h_\sigma{}^{\sigma,\mu}) = \delta\left(\frac{\partial h^\nu_\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial h_\sigma{}^\sigma}{\partial x_\mu}\right) = \frac{\partial(\delta h^\nu_\nu)}{\partial x^\mu} \frac{\partial h_\sigma{}^\sigma}{\partial x_\mu} + \frac{\partial h^\nu_\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial(\delta h_\sigma{}^\sigma)}{\partial x_\mu}$$

上の式の 2 項は同じ形である．よって片方だけの部分積分を行う：

$$\delta h^\nu_\nu \frac{\partial h_\sigma{}^\sigma}{\partial x_\mu}\Bigg| - \int \frac{\partial^2 h_\sigma{}^\sigma}{\partial x_\mu \partial x^\mu} \delta h^\nu_\nu \mathrm{d}x^\mu = -\int \frac{\partial^2 h_\sigma{}^\sigma}{\partial x_\beta \partial x^\beta} \delta(\eta_{\nu\mu} h^{\mu\nu}) \mathrm{d}x^\beta$$

$$= -\int \eta_{\nu\mu} \frac{\partial^2 h_\sigma{}^\sigma}{\partial x_\beta \partial x^\beta} \delta h^{\mu\nu} \mathrm{d}x^\beta = -\int \eta_{\nu\mu} h_{\sigma,\beta}^{\sigma,\beta} \delta h^{\mu\nu} \mathrm{d}x^\beta$$

よって

$$d\delta(h^\nu{}_{\nu,\mu} h_\sigma{}^{\sigma,\mu}) = -d\int 2\eta_{\nu\mu} h_{\sigma,\beta}^{\sigma,\beta} \delta h^{\mu\nu} \mathrm{d}x^\beta$$

///
(3.5.6) の条件を (3.6.2) に適用すると（∵$T_{\mu\nu;}{}^\nu = 0$）

$$2ah_{\mu\nu,\sigma}{}^{;\sigma\nu} + b(h_{\mu\sigma,\nu}{}^{;\sigma\nu} + h_{\nu\sigma,\mu}{}^{;\sigma\nu}) + c(h^\sigma{}_{\sigma,\mu\nu}{}^{;\nu} + h^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha\mu}) + 2dh^\sigma{}_{\sigma,\beta\mu}{}^{;\beta} = 0, \tag{3.6.3}$$

同じ項をまとめると

$$\begin{aligned} &h_{\mu\nu,\sigma}{}^{;\sigma\nu}(2a+b) = 0, \\ &h_{\nu\sigma,\mu}{}^{;\sigma\nu}(b+c) = 0, \\ &h^\sigma{}_{\sigma,\mu\nu}{}^{;\nu}(c+2d) = 0 \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

を得る[18]．ここで $a = 1/2$ と選択すると

$$a = \frac{1}{2},\quad b = -1,\quad c = 1,\quad d = -\frac{1}{2}, \tag{3.6.5}$$

となる．おそらくこれが重力場の正しいラグランジアンだろう．

[18]伊藤注：1 番目と 3 番目は $h_{\mu\nu,\sigma}{}^{;\sigma\nu} = h_{\mu\sigma,\nu}{}^{;\sigma\nu}$, $h^\sigma{}_{\sigma,\mu\nu}{}^{;\nu} = h^\sigma{}_{\sigma,\beta\mu}{}^{;\beta}$ で 2 番目は

$$h_{\nu\sigma,\mu}{}^{;\sigma\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 h_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu \partial x_\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2(\eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\sigma}h^{\alpha\beta})}{\partial x^\mu \partial x_\sigma} = \left(\eta_{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\left(\eta_{\beta\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\right)\frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^3 h^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha \partial x^\mu} = h^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha\mu}$$

3.7　記号の定義

以下テンソルの取り扱いがますます面倒になる．そのために単純化のためのトリックを取り入れる．

任意の 2 次のテンソルに対する「バー」演算を

$$\overline{X}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}X^{\sigma}_{\sigma}, \tag{3.7.1}$$

と定義する．$\boldsymbol{h}$ のような対称テンソルの場合，より簡単になり

$$\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma}, \tag{3.7.2a}$$

$$\overline{\overline{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}, \tag{3.7.2b}$$

となる[19]．

添字のないテンソルはそのトレース表し，以下の関係式

$$\begin{aligned} h &= \mathrm{Tr}(\boldsymbol{h}) = h^{\sigma}{}_{\sigma}, \\ \overline{h^{\sigma}{}_{\sigma}} &= -h^{\sigma}{}_{\sigma}, \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

が成り立つ[20]．

これらの記号法を使うと (3.6.5) を適用した (3.6.2) 式は

$$h_{\mu\nu,\sigma}{}^{,\sigma} - 2\overline{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{,\sigma} = -\lambda\overline{T}_{\mu\nu}, \tag{3.7.4}$$

となる．

///

伊藤注：導出の試み：(3.6.2) 式の左辺にバーをつける．

$$\overline{h}_{\mu\nu,\sigma}{}^{,\sigma} - \overline{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{,\sigma} - \overline{h}_{\nu\sigma,\mu}{}^{,\sigma} + \overline{h}^{\sigma}_{\sigma,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha} - \eta_{\mu\nu}\overline{h}^{\sigma}_{\sigma,\beta}{}^{,\beta}$$

$$= (h_{\mu\nu,\sigma}{}^{,\sigma} \underbrace{-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\rho}{}_{\rho,\sigma}{}^{,\sigma}}_{(a)}) - (h_{\mu\sigma,\nu}{}^{,\sigma} \underbrace{- \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}h^{\rho}{}_{\rho,\nu}{}^{,\sigma}}_{(d)}) - (h_{\nu\sigma,\mu}{}^{,\sigma} \underbrace{- \frac{1}{2}\eta_{\nu\sigma}h^{\rho}{}_{\rho,\mu}{}^{,\sigma}}_{(e)})$$

---

[19] 伊藤注：2 重バー演算について．

$$\overline{\overline{h}}_{\mu\nu} = \overline{h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma}} = \overline{h_{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\overline{h^{\sigma}{}_{\sigma}} = \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(-h^{\sigma}{}_{\sigma}) = h_{\mu\nu}$$

ここで，次に記されている結果 $\overline{h^{\sigma}{}_{\sigma}} = -h^{\sigma}{}_{\sigma}$ を使った．この導出は次の脚注に記した．以上のように，バー演算は $\eta_{\mu\nu}$ には作用しないようである．

[20] 伊藤注：

$$\overline{h^{\sigma}{}_{\sigma}} = \overline{\eta^{\sigma\beta}h_{\beta\sigma}} = \eta^{\sigma\beta}\left(h_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\sigma}h^{\alpha}{}_{\alpha}\right) = h^{\sigma}{}_{\sigma} - \frac{1}{2}\eta^{\sigma\beta}\eta_{\beta\sigma}h^{\alpha}{}_{\alpha} = h^{\sigma}{}_{\sigma} - 2h^{\sigma}{}_{\sigma} = -h^{\sigma}{}_{\sigma}$$

ここで $\eta^{\sigma\beta}\eta_{\beta\sigma} = 4$ を使った．

$$\underbrace{-h^{\rho}{}_{\rho,\mu\nu}}_{(f)}+\eta_{\mu\nu}(h^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha}\underbrace{-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h^{\rho}{}_{\beta,\alpha}^{,\sigma}}_{(b)})+\underbrace{\eta_{\mu\nu}h^{\rho}_{\rho,\beta}{}^{,\beta}}_{(c)}$$

関係式 $\overline{h}^{\rho}{}_{\rho}=-h^{\rho}{}_{\rho}$ を 2 箇所と $(a)+(b)+(c)=0$, $(d)+(e)+(f)=0$ を使った．よって

$$=h_{\mu\nu,\sigma}^{\;\;;\sigma}-h_{\mu\sigma,\nu}^{\;\;;\sigma}-h_{\nu\sigma,\mu}^{\;\;;\sigma}+\eta_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha} \tag{3.7.4b}$$

(3.7.4) には到達せず，この形にまでしかならなかった．しかし，この後の議論にはこの形でも差し支えは無い．

//

ゲージ不変性を使うと電気力学でのローレンツ・ゲージのような適切なゲージを選ぶことにより場の方程式を得ることが容易になる．ここでは

$$A^{\nu}{}_{,\nu}=0 \tag{3.7.8}$$

という条件の類推から

$$\overline{h}^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}=0 \tag{3.7.9}$$

を選ぶ[21]（ローレンツ条件と呼ぶ）．これを使うと $\boldsymbol{T}$ のバーを場に関係付ける方程式は

$$h^{\mu\nu,\sigma}{}_{,\sigma}=-k^2h^{\mu\nu}=-\lambda\overline{T}^{\mu\nu} \tag{3.7.10}$$

となり，$h^{\mu\nu}=(\lambda/k^2)\overline{T}^{\mu\nu}$ という解を得る．これからラグランジアン中の $\lambda h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ からくる発生源 $T'_{\mu\nu}$ と $\boldsymbol{h}$ との相互作用の振幅は

$$\lambda^2T'_{\mu\nu}\left[\frac{1}{k^2}\right]\overline{T}^{\mu\nu}$$

となる．これは以前，振幅を直接計算したときのものと同じになる．

[21]伊藤注：既に記したように (3.7.4) は得られなかった．しかし，バーの無い形

$$h^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}=0 \tag{3.7.9b}$$

という条件を選択しても同じ議論ができる．しかし $\overline{h}^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}=0$ と $h^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}=0$ は異なる条件である．なぜなら

$$\overline{h}^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}=h^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{,\nu}=h^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{,\nu}=h^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}-\frac{1}{2}h_{,\mu}=0$$

第4章

4.1 テンソルの階数と場の符号との関係

ここで重力場に対する結合定数と平面波の規格因子を定義する．まず

$$\lambda = \sqrt{8\pi G} \tag{4.1.1}$$

とする．ここで G は自然単位系 $(\hbar = c = 1)$ での通常の重力定数であり[1]，また，λ が電気力学での電子の電荷 e に対応するものになるように（重力定数の）平方根とした．

平面波の重力子を表すために

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}\exp(\mathrm{i}k\cdot x) \tag{4.1.2}$$

を使う．偏極子テンソルは

$$e_{\mu\nu}\overline{e}^{\mu\nu} = 1 \tag{4.1.3}$$

と規格化する．

重力場，物質，そして物質と重力子の結合という系全体の作用の形は

$$\begin{aligned} S = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}V \left(h^{\mu\nu,\lambda}\overline{h}_{\mu\nu,\lambda} - 2\overline{h}^{\mu\lambda}{}_{,\lambda}\overline{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu} \right) & \qquad \text{（場）} \\ - \int \mathrm{d}V \lambda h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} & \qquad \text{（結合項）} \\ + S_M & \qquad \text{（物質）} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

となる[2]．

$$A_\mu B^\mu = A_4B_4 - (A_3B_3 + A_2B_2 + A_1B_1) \tag{4.1.6}$$

---

[1]伊藤注：SI 単位系で重力定数の次元は $G[\mathrm{L}]^3[\mathrm{M}]^{-1}[\mathrm{T}]^{-2}$ である．一方自然単位系では $[\mathrm{L}]=[\mathrm{T}]=[\mathrm{M}]^{-1}$ であるので重力定数は長さの次元の 2 乗となる．

[2]伊藤注：場に対する作用ではバーのついたテンソルを元に戻し，その積を展開すると (3.6.1) が得られる．ただし，(3.6.1) 式の b と c に対応する項では添字の上げ下げ処理が必要となる．

4.2 スカラーのエネルギー運動量テンソル

4.3 散乱振幅（スカラー理論）

4.4 平面波の詳しい性質—コンプトン効果

4.5 重力子の非線形ダイアグラム

4.6 重力に引かれている粒子の古典的運動方程式

星の周りを回る惑星の軌道など，この理論での古典的効果を計算するには，量子論を古典的形式に直す必要がある．これは作用を変分原理に基づき変分した結果が古典論となるということである．ここで作用とはラグランジアンの時間積分を含む経路積分である[3]．

粒子の運動は経路積分の最小値を与える経路である．例えば自由粒子の運動は

$$-\int \sqrt{(\mathrm{d}s)^2} = -\int \sqrt{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x_\mu} = -\int \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\alpha}}\mathrm{d}\alpha \tag{4.6.1}$$

の最小値に相当する．重力の効果を表すには被積分関数に何かを加えなければならない．

古典論を与える変分原理として，最も便利な経路積分に対応するものを使う（これは量子力学的経路積分法によりクライン-ゴルドン方程式を与える）．荷電粒子の場合，運動方程式は積分

$$-\frac{m}{2}\int \mathrm{d}\alpha \left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\alpha}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\alpha}\right) - e\int \mathrm{d}\alpha A_\mu(x)\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\alpha}\right) \tag{4.6.2}$$

を変分することにより求まる．計算すると，結果は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_\mu}{\mathrm{d}\alpha^2} = eF_{\mu\nu}\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\alpha}\right) \tag{4.6.3}$$

となる．ただし，$F_{\mu\nu}$ は A_μ の回転である．これに $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\alpha$ をかけると $F_{\mu\nu}$ は反対称なので

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\alpha}\right) = 0$$

である．つまり

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\alpha} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2$$

[3]原著注：ここでの経路積分とは，1 つの経路に沿っての積分という意味であり，量子論での経路積分ではない．

は定数であり，α は固有時間に比例する（静止質量を m_0 とすれば，α を固有時間とすることができる）.

重力中では，適切な方法で $T_{\mu\nu}$ を被積分関数に加えなければならない．電気力学では場にかかるのは位置の導関数で $\mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}\alpha$ であった[4].

この類推からテンソル $T_{|mu\nu}$ はこのような 2 つの速度によって構成されるだろう．定数係数は 44 成分がエネルギー密度を表すように選択する．

$$T^{\mu\nu} = m_0 \left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\alpha}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\alpha}\right) \tag{4.6.4}$$

ただし $s = \alpha =$「固有時間」．2 つある $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ という因子はその 1 つが速度によるエネルギーの増大を表し，もう 1 つはローレンツ収縮による体積の縮みを表す[5].

したがって，変分すべき作用は，(4.6.2) 式の類推から，

$$m_0 \left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\alpha \left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\alpha}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\alpha}\right) - \lambda \int \mathrm{d}\alpha h_{\mu\nu}(x)\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\alpha}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\alpha}\right)\right] \tag{4.6.5}$$

となる．より簡単化するため，以下のテンソル

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu}(x) \tag{4.6.6}$$

を導入すると，(4.6.5) 式は

$$m_0 \left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\alpha g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu\right] \tag{4.6.7}$$

となる．以後，α による微分演算を「'」で表す．経路の座標 x について変分すると，運動方程式

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(g_{\sigma\nu}x'^\nu) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}x'^\mu x'^\nu = 0 \tag{4.6.8}$$

を得る[6]．α による微分演算を実行し整理すると

$$g_{\sigma\nu}x''^\nu = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}\right] x'^\mu x'^\nu \tag{4.6.9}$$

[4] 伊藤注：(4.6.2) 式の $A_\mu(\mathrm{d}x_\mu/\mathrm{d}\alpha)$ のこと．

[5] 伊藤注：$\mathrm{d}\alpha = \sqrt{1-v^2/c^2}\mathrm{d}t$ のことを言っていると思う．

[6] 伊藤注：

$$\int \mathrm{d}\alpha \left\{\delta\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\alpha}g_{\sigma\nu}\right]\right\} = \int\left\{\frac{\mathrm{d}(\delta x^\sigma)}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\alpha}g_{\sigma\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}x'^\mu x'^\nu(\delta x^\sigma)\right\}\mathrm{d}\alpha$$

右辺第 1 項で部分積分を行う

$$\left(\delta x^\sigma \left(g_{\sigma\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\alpha}\right)\right| - \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(g_{\sigma\nu}x'^\nu)\delta x^\sigma \mathrm{d}\alpha \left.\right)$$

$$= \int \mathrm{d}\alpha \left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(g_{\sigma\nu}x'^\nu) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}x'^\mu x'^\nu\right]\delta x^\sigma$$

を得る．カッコ内第2項を等分し μ と ν を入れ替えると符号を変え，以下のように定義する：

$$[\mu\nu,\sigma]=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right] \tag{4.6.10}$$

この括弧（共変接続係数）を使うと運動方程式は

$$g_{\sigma\rho}x''^\rho=-[\mu\nu,\sigma]x'^\mu x'^\nu. \tag{4.6.11}$$

積 $g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu$ を α で微分して，運動方程式を使うと直ぐに得られる結果がある．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu)=2g_{\mu\nu}x'^\mu x''^\nu+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}x'^\mu x'^\nu x'^\sigma \tag{4.6.12}$$

これに運動方程式 (4.6.9) 式を使うと，この導関数は恒等的にゼロとなることが分かる[7]．すなわち，積 $g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu$ はスカラーの定数である．新しいパラメーター s を

$$g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}\right)^2$$

で定義すると，これは重力問題での固有時間に対応するものになる．$\mathrm{d}s/\mathrm{d}\alpha$ は定数なので，これを1とする．以下，s での微分演算を「・」で表し

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=1 \tag{4.6.13}$$

4.7　星の周りの粒子の軌道

運動方程式 (4.6.8) より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\eta_{\sigma\nu}\dot{x}^\nu+2\lambda h_{\sigma\nu}\dot{x}^\nu)=\lambda\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \tag{4.7.1}$$

これを解くには，重力場の適切な形が必要である．我々は重力源が存在しない領域に関心がある．場の方程式 (3.7.4)

$$h_{\mu\nu,\sigma}{}^{;\sigma}-h_{\mu\sigma,\nu}{}^{;\sigma}-h_{\nu\sigma,\mu}{}^{;\sigma}+\eta_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha}=-\lambda\overline{T}_{\mu\nu} \tag{4.7.2}$$

---

[7] 伊藤注：計算を続ける．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu)=x'^\sigma 2g_{\sigma\nu}x''^\nu+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}x'^\mu x'^\nu x'^\sigma=x'^\sigma\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}-2\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}\right]x'^\mu x'^\nu$$

$$+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}x'^\mu x'^\nu x'^\sigma=2\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}x'^\mu x'^\nu x'^\sigma-2\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}x'^\mu x'^\nu x'^\sigma=0$$

はローレンツ・ゲージ $\overline{h}_{\mu\rho}{}^{;\rho} = 0$ を使えば，マックスウェル方程式と同じように解くことができる[8]．このゲージではダランベルシャン ($\Box^2 = (\partial/\partial t)^2 - \nabla^2$) を使うと

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = -\lambda \overline{T}_{\mu\nu} \tag{4.7.3}$$

と書くことができる[9]．

振動数がゼロの，すなわち時間依存性のない静的重力場の場合に対しては，ニュートンの重力の法則が求まらなければならない．T_{44} 成分は質量に比例する．$T_{\mu\nu}$ の他の成分はゼロである．したがって場のテンソルは

$$\overline{h}_{44} = -\frac{\lambda M}{4\pi r}, \quad \overline{h}_{\mu\nu} = 0, \ (\mu, \nu \neq 4, 4) \tag{4.7.4}$$

となる[10]．バーが付いていない $h_{\mu\nu}$ が必要なので，再度バーを付けて

$$h_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\overline{h}^{\sigma}_{\sigma} = \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{8\pi}\dfrac{M}{r}, & \mu = \nu \text{のとき}, \\ \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \tag{4.7.5}$$

が得られる[11]．これらを運動方程式 (4.7.1) に代入するが，以下の記号を用いる．

$$\begin{aligned} \phi &= 2\lambda h_{44}, \\ \psi &= 2\lambda h_{33} = 2\lambda h_{22} = 2\lambda h_{11} \end{aligned} \tag{4.7.6}$$

今の場合，$\phi = \psi = -2MG/r$ だが，この関係が成立しない場合を後で扱うので，このままこれらを区別して表す．ただし，ϕ と ψ は r のみの関数とする．

---

[8]伊藤注:以前と同様場の方程式として (3.7.4b) の形を記した．従って，ゲージは $h_{\mu\rho}{}^{;\rho} = 0$

[9]伊藤注：上記の場の方程式に対しゲージ $h_{\mu\rho}{}^{;\rho} = 0$ からも，これと同じ方程式を得る．

[10]伊藤注：まず，バーのない $T_{\mu\nu}$ を使うため (4.7.3) にバーをつけて

$$\Box^2 \overline{h}_{\mu\nu} = -\lambda T_{\mu\nu}$$

とする．ここで (3.7.2b) を使った．ダランベルシャン $\omega = 0, \kappa \neq 0$ から $-\kappa^2 \overline{h}_{44} = -\lambda T_{44}$

$$\overline{h}_{44} = \frac{\lambda}{\kappa^2} M \to \overline{h}_{44} = -\frac{\lambda M}{4\pi r}$$

マイナスは重力ポテンシャルがマイナスとなるようにした．$\kappa^2 \to r$ は逆フーリエ変換

[11]伊藤注：ここは結構ごたごたとしている．$\overline{h}_{44}$ 以外ゼロなので，つまり $\overline{h}_{33} = \overline{h}_{22} = \overline{h}_{11} = 0$ であるからトレース $\overline{h}^{\sigma}_{\sigma} = \overline{h}_{44} = -\lambda M/(4\pi r)$ となる．よって，h_{44} と h_{11} は

$$h_{44} = \overline{h}_{44} - \frac{1}{2}\eta_{44}\overline{h}^{\sigma}_{\sigma} = -\frac{\lambda M}{4\pi r} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\lambda M}{4\pi r}\right) = -\frac{\lambda M}{8\pi r}$$

$$h_{11} = \overline{h}_{11} - \frac{1}{2}\eta_{11}\overline{h}^{\sigma}_{\sigma} = 0 - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{\lambda M}{4\pi r}\right) = -\frac{\lambda M}{8\pi r}$$

運動方程式 (4.7.1) を空間座標部分と時間座標部分に分離する．まず (4.7.1) で $\nu = 1$ とする．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(-\dot{x} + \psi\dot{x}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\dot{t}^2 + \frac{\partial\psi}{\partial x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] \tag{4.7.7}$$

また (4.7.1) で $\nu = 4$ とすると，時間座標部分は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\dot{t} + \phi\dot{t}) = 0 \tag{4.7.8}$$

となる．

運動の積分 (4.6.13) より

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + 2\lambda h_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1 \tag{4.7.9}$$

この式は今の場合

$$\dot{t}^2(1 + \phi) - (1 - \psi)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 1 \tag{4.7.10}$$

となる[12]．

(4.7.8) は K を定数（エネルギーに比例）として

$$(1 + \phi)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = K \tag{4.7.11}$$

を得るから，(4.7.7) から $\dot{t}$ を消去することができる．また，ϕ と ψ は r にしか依存しないので，(4.7.7) 式の右辺は x に比例する[13]．したがって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{(1 - \psi)(\dot{x}y - x\dot{y})\right\} = 0 \tag{4.7.12}$$

が得られる[14]．

---

[12]伊藤注：

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = (\eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu})\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + 2\lambda h_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1$$
$$\dot{t}^2 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2\lambda_{44}\dot{t}^2 + 2\lambda_{11}\dot{x}^2 + 2\lambda_{22}\dot{y}^2 + 2\lambda_{33}\dot{z}^2 = 1$$

[13]伊藤注：具体的な計算を実施すると，$\phi = \psi = \alpha/r$ として，右辺は

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\alpha x}{r^3}\dot{t}^2 - \frac{\alpha x}{r^3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{r^3}\dot{t}^2 + \frac{\alpha}{r^3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right]x \equiv F(\dot{x}^\mu)x$$

[14]伊藤注：原著は分からないが邦訳書では $(\dot{x}y + x\dot{y})$ となってしまっている．(4.7.7) の y に関する式も考慮すると，2 つの式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{(1 - \psi)\dot{x}\right\} = F(\dot{x}^\mu)x, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{(1 - \psi)\dot{y}\right\} = F(\dot{x}^\mu)y$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{(1 - \psi)\dot{x}\right\}\right)y - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{(1 - \psi)\dot{y}\right\}\right)x = F(\dot{x}^\mu)xy - F(\dot{x}^\mu)yx = 0$$

$$0 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{(1 - \psi)\dot{x}\right\}\right)y - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{(1 - \psi)\dot{y}\right\}\right)x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{(1 - \psi)(\dot{x}y - x\dot{y})\right\}$$

運動が完全に $z=0$ 平面内であるとして x,y 平面の極座標 r,θ を使うと，角運動量に関係する運動の定数 L を得る．

$$(1-\psi)r^2\dot{\theta}=L \tag{4.7.12}$$

よって動径方向の運動方程式は

$$\frac{K^2}{1+\phi}-(1-\psi)(r^2\dot{\theta}^2+\dot{r}^2)=1 \tag{4.7.13}$$

$\mathrm{d}r/\mathrm{d}s$ を $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s$ で割り，導関数を $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ として

$$\frac{K^2}{1+\phi}-\frac{L^2}{(1-\psi)r^4}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+r^2\right]=1 \tag{4.7.14}$$

更に変数変換 $u=1/r$ を行うと，ニュートン解に対する小さな摂動によって扱うことのできる方程式

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+u^2=\left(\frac{K^2}{1+\phi}-1\right)\frac{1-\psi}{L^2} \tag{4.7.15}$$

を得る．今の場合，$\phi=\psi=-2MG/r=-2MGu$ である．非相対論的運動の場合 K は 1 に近く，ϕ が小さいとすれば，$K^2/(1+\phi)-1=K^2-1+2MGu$ である．したがって ψ が小さいという極限では (4.7.15) の右辺は単に $(K^2-1+2MGu)/L^2$ となる．

//
伊藤注：惑星軌道の古典的方程式（以下式番号に対応する式はもちろん原著にはない）．ニュートンの運動方程式は

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{x} \tag{4.7.16}$$

惑星の軌道角運動量を $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}=\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}=0 \tag{4.7.17}$$

となり，角運動量一定である．

以下，惑星軌道は (x,y) 平面内とし，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とする．

$$||\boldsymbol{L}||=L=r^2\dot{\theta} \tag{4.7.18}$$

とする．以下の操作をする

$$r^2=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\quad\xrightarrow{t\text{ 微分する}}\quad r\dot{r}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}\quad\xrightarrow{t\text{ 微分する}}\quad r\ddot{r}+\dot{r}^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$$

よって

$$r\ddot{r} + \dot{r}^2 = v^2 - \frac{GM}{r} \tag{4.7.19}$$

を得る．ベクトル公式

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 + ||\mathbf{p} \times \mathbf{q}||^2 = p^2 q^2$$

より

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v})^2 + ||\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}||^2 = (r\dot{r})^2 + J^2 = r^2 v^2$$

であるから

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \tag{4.7.20}$$

これを (4.7.19) に代入すると，惑星軌道の運動方程式

$$r\ddot{r} = \frac{L^2}{r^2} - \frac{GM}{r} \tag{4.7.21}$$

が得られた．

ここで変数 r から新しい変数 $u = 1/r$ を導入し，さらに角運動量 (4.7.18) を使い，時間 t による導関数を θ による導関数へ移行する．

$$r^2 \dot{\theta} = L \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{r^2} = Lu^2$$

これを使うと

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

であり，

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-L\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-L\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) = Lu^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-L\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)$$

となるので

$$\ddot{r} = -L^2 u^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} \tag{4.7.22}$$

よって，これを (4.7.21) へ代入すると

$$-L^2 u^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} = L^2 u^3 - GMu^2$$

が得られるので，これから惑星軌道の方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{GM}{L^2} \tag{4.7.23}$$

が得られた．

//

第5章

5.1　惑星の軌道と水星の歳差運動

我々は星の場の中を動く光子の「落下」も正しく予測すると思われる場の理論を得た．一方，この理論を否定するかもしれない事実が，水星の軌道の近日点移動に関するものである．惑星軌道の計算を続ける．

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+u^2=\left(\frac{K^2-1-\phi}{1+\phi}\right)\frac{1-\psi}{L^2}$$
$$u=\frac{1}{r},\quad K=(1+\phi)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},\quad L=(1-\psi)r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \tag{5.1.1}$$

ここで ϕ と ψ はテンソル $h_{\mu\nu}$ の対角成分に関連しており $\phi=2\lambda h_{44}$ であり $\psi=2\lambda_{ii}, i=1,2,3$ である[1]．そしてここまで構築してきた理論によれば $\phi=\psi=-2GM/r=-2GMu$ である．しかし，この理論は正しくなく，後で計算をすべてやり直すのを避けるために，次のようにしておく．

$$\begin{aligned}\phi&=\alpha(-2GMu)+a(-2GMu)^2+\cdots,\\ \psi&=\beta(-2GMu)+b(-2GMu)^2+\cdots,\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

ポテンシャル ϕ は自然な単位 mc^2 で表すと 1 よりも非常に小さく[2]，因子 $1/(1+\phi)$ を ϕ の級数として展開することができる[3]．その方程式は

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+u^2=\frac{1}{L^2}(K^2-1-\phi)(1-\phi+\phi^2+\cdots)(1-\psi) \tag{5.1.3}$$

となる．この式の右辺を u で展開しその 2 次の項までとると

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+u^2=A+Bu+Cu^2+\cdots \tag{5.1.4}$$

[1]伊藤注：このセクションは筆記ミスが多い．$\psi=2\lambda h_{ii}$ である．

[2]伊藤注：普通の単位系では $\phi=-2GM/(c^2r)$ で，無次元となり (5.1.2) のような和が可能となる．

[3]伊藤注：展開は以下の方が簡単である．

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{K^2}{1+\phi}-1\right)(1-\psi)=\frac{1}{L^2}\left[K^2(1-\phi+\phi^2-\phi^3+\cdots)-1\right](1-\psi)$$

ただし

$$A = \frac{K^2-1}{L^2},$$

$$B = \frac{2GM}{L^2}[(K^2-1)(\alpha+\beta)+\alpha],$$

$$C = \frac{(2GM)^2}{L^2}[K^2\alpha + K^2\alpha\beta - K^2 a - (K^2-1)b]$$

である[4]．

(5.1.4) 式を θ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{1}{2}B + Cu + \cdots \tag{5.1.5}$$

を得る[5]．

$C=0$ の場合はニュートンの理論の解と同じになる．u は θ の関数として点 $B/2$ の周りの単振動となる．振動数は 1 で，動径座標は 2π 回ると元に戻る．運動は周期的となる．

$C \neq 0$ の場合，振動数は $\omega = \sqrt{1-C}$ となる．周期は長くなり，近日点は角度が $T = 2\pi/\omega = 2\pi(1 + C/2 + \cdots)$ 変化するたびに現れる．

非相対論的な場合，すなわち $K \to 1$ の場合，1 周期当たりの歳差は

$$\pi C = \pi \frac{(2GM)^2}{L^2}[K^2\alpha + K^2\alpha\beta - K^2 a] \tag{5.1.6}$$

である．これまでの理論では $\alpha = \beta = 1$，$a = 0$ なので，水星に対して（地球時間の）1 世紀当たり 57 角度秒となる．他の惑星に対しては，この量はずっと小さく，地球の場合 1 世紀当たり 4 角度秒ほどになる．実際の歳差は観測によれば 5270 角度秒／世紀である[6]．しかしこのほとんどは他

---

[4]伊藤注：面倒な計算である．$K^2-1 \equiv P$ とし，途中までは分子だけを計算し，分母の L^2 は外しておく．また $-2GM = \mu$ としておく．

$$\begin{aligned}(P-\phi)(1-\phi+\phi^2+\cdots)(1-\psi) &= (P-\phi-P\phi+\phi^2+P\phi^2-\phi^3)(1-\psi)\\ &= P-\phi-P\phi+\phi^2+P\phi^2-P\psi+\phi\psi+P\phi\psi-\phi^2\psi\\ &= P-K^2\phi-P\psi+K^2\phi^2+K^2\phi\psi+\cdots\\ &= P-K^2[\alpha\mu u+a(\mu u)^2+\cdots]-P[\beta\mu u+b(\mu u)^2+\cdots]+K^2\alpha^2(\mu u)^2+K^2[\alpha\mu u+\cdots)][\beta\mu u+\cdots]\\ &= P-\mu[\alpha K^2+\beta(K^2-1)]u+\mu^2[K^2\alpha+K^2\alpha\beta-aK^2-(K^2-1)b]u^2+\cdots\end{aligned}$$

[5]伊藤注：これが古典的な軌道の方程式 (4.7.23) 式に対応する式である．(5.1.5) 式で非相対論的極限は $K \to 1$ とすることであるから，このとき $B/2 \to GM/L^2$ となり (4.7.23) 式右辺に一致する．

[6]伊藤注：他の文献によればこの値の 10 分の 1 で，530 角度秒／世紀程度である．

の惑星による摂動として説明できる.（純粋のニュートン理論を使った）補正を正確に行うと，41 ± 2 秒となるが，ここで得られた 57 秒は 4/3 ほど大きい.

この原因として色々と考えられるが，最終的にこの理論は正しくないと結論せざるを得ない[7].

///
伊藤注：歳差角度の算出：
(5.1.5) の解は

$$u(\theta) = \frac{1}{2}B + U\cos(\sqrt{1-C}\theta) \tag{5.1.7}$$

である (U は初期条件により決まる定数)．元に戻るまでつまり 1 周期は

$$\sqrt{1-C}\theta = 2\pi$$

により決まる．C の存在により，2π からズレる．その大きさは

$$\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-C}} = 2\pi + \pi C \tag{5.1.8}$$

から πC となり，これが (5.1.6) であった．$K=1, \alpha=\beta=1, a=0$ を代入すると

$$\pi C = \pi \frac{8(GM)^2}{L^2} \tag{5.1.9}$$

となる．ここでは $\hbar = c = 1$ という単位系を採用しているので，これを SI 単位系に戻すと

$$GM \to \frac{GM}{c^2}$$

である．以下具体的な数値を Wikipedia から引用し計算する．
SI 単位系
$G = 6.67408 \times 10^{-11}$ [m3 kg-1 s-2]
$M = 1.9884 \times 10^{30}$ [kg] (太陽)

通常の方法での表記（計量テンソル内）：$MG \to MG/c^2$
$c = 2.9979 \times 10^8$ [m s-1] (光速度)

$\mu \equiv GM/c^2 = 13.271 \times 10^{19}/(2.9979 \times 10^8)^2$ [m]=1.47662×10^3 [m]

$r_a = 5.7910 \times 10^{10}$ [m](水星の長半径)

[7]伊藤注：歳差を求める通常の理論では，時間＋球座標系で計算しており，Feynman のように直交座標系では行っていない．さらに，この食い違いは後の 6 章の (6.1.14) で補正が加えられ（$a=0$ ではなく，$a=1/2$ とする），観測値と合う結果が得られる．

$u = 4.78725 \times 10^4$ [m s-1] (水星の平均軌道速度)
$e = 0.20563$(水星の離心率)
(相対論的速度に変換)　$r\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = (r\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)/c = u/c$
近似的に L_a を計算すると：
$L_a = ru/c = 5.7910 \times 10^{10} \times 4.78725 \times 10^4/(2.9979 \times 10^8)$
$= 9.24746 \times 10^6$ [m]（若干大きめな値になっていると思う）

面積速度の 2 倍 $L(= ru/c$ 相当)
L を観測値から求めることは難しい（できない）．今軌道が

$$u(\theta) = \frac{\mu}{L^2}(1 + e\cos\theta)$$

と書かれたとき，長半径を r_a とすると

$$r_a = \frac{L^2/\mu}{1 - e^2}$$

という関係式がある．ここで e は離心率である．
よって，上の関係式を使って L^2/μ を消去すると

$$\pi C = \pi 8\frac{\mu}{L^2}\mu = \frac{8\mu}{r_a(1-e^2)}\pi = \frac{8 \times 1.47662 \times 10^3}{5.7910 \times 10^{10} \times 0.9577}\pi$$
$$= 2.130 \times\ 10^{-7}\pi[\mathrm{rad}/周期]$$

rad $\longrightarrow$ 度
$180 \times 2.130 \times 10^{-7}\pi/\pi = 3.834 \times 10^{-5}$ [度/周期]
度× 3600 $\longrightarrow$ 秒
$3.834 \times 10^{-5} \times 3600 = 0.13804$ [秒/周期]

水星は 88 日で 1 回転 (周期) 100 年で水星は 415 回転 (周期)

Feynman 流水星の歳差結果
$0.13804 \times 415 = 57.3$ [角度秒/世紀]
となり，これは正しいとされる 41 秒の約 4/3 倍である．
因みに近似的に算出した L_a と長半径から算出した L を比べる：

$$\begin{aligned} L_a &= ru/c = 9.24746 \times 10^6 \ \ [\mathrm{m}] \\ L &= \sqrt{r_a(1-e^2)\mu} = \sqrt{5.7910 \times 10^{10} \times 0.9577 \times 1.47662 \times 10^3} \\ &= 9.04953 \times 10^6 \ \ [\mathrm{m}] \end{aligned}$$

///

//

伊藤注：正当な計算とされる水星の歳差計算式には (5.1.5) 右辺に Cu の項はなく，より高次の u^2 の項が現れる．これは (5.1.4) では u^3 の項に対応するので，u^3 まで考慮する必要がある．

(5.1.3) の右辺を以下のように展開する：

$$\frac{1}{L^2}\left(\frac{K^2}{1+\phi}-1\right)(1-\psi)=\frac{1}{L^2}\Big[\,K^2(1-\phi+\phi^2-\phi^3+\cdots)-1\Big](1-\psi)$$

ひとまず，$1/L^2$ を省略し展開の計算を続ける．

$$\Big[\,K^2(1-\phi+\phi^2-\phi^3+\cdots)-1\Big](1-\psi)$$

$$=(K^2-K^2\phi+K^2\phi^2-K^2\phi^3+\cdots-1)(1-\psi)$$

$$=(\underbrace{K^2-1}_{P}-K^2\phi+K^2\phi^2-K^2\phi^3+\cdots)(1-\psi)$$

$$=P-K^2\phi+K^2\phi^2-K^2\phi^3-P\psi+K^2\phi\psi-K^2\phi^2\psi+K^2\phi^3\psi+\cdots$$

$$=P-[K^2\phi+P\psi]+[K^2\phi^2+K^2\phi\psi]-[K^2\phi^3+K^2\phi^2\psi]+\cdots$$

となるので u^3 に対応する項は

$$-\frac{1}{L^2}[K^2\phi^3+K^2\phi^2\psi]$$

である．簡単のため $\phi=\psi=-2GMu$ とすると，この項は（$K=1$ として）

$$-\frac{2(-2GM)^3}{L^2}u^3\equiv Du^3 \tag{5.1.11}$$

という寄与となる．この項を考慮した運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{1}{2}B+Cu+\frac{3}{2}Du^2+ \tag{5.1.11}$$

となる．

水星の場合

$$\frac{1}{2}B=\frac{GM/c^2}{L^2}=\frac{\mu}{L^2}=\frac{1}{r_a(1-e^2)}=1.803\times10^{-11}$$

以下これを使って D の大きさを見積もると

$$D=\frac{16(GM/c^2)^3}{L^2}=\frac{\mu}{L^2}16\mu^2=1.803\times10^{-11}\times16\times(1.47662\times10^3)^2$$

$$= 6.290 \times 10^{-4}$$

ちなみに

$$C = \frac{8\mu^2}{L^2} = 8 \times 1.803 \times 10^{-11} \times 1.47662 \times 10^3 = 2.130 \times 10^{-7}$$

となる．

運動方程式 (5.1.11) で Cu の項を左辺へ移項し，$(1-C)u$ としても良いが，この効果は既に評価している．ここでは u^2 の影響を探るため C は小さいとしてひとまず無視する．よって運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\mu}{L^2} + \frac{3}{2} D u^2 \tag{5.1.12}$$

となる．ここで $\mu \equiv GM/c^2$ とした．

この方程式を基に通常採られている方法で歳差計算を行う．u^2 の係数 D は小さくこの項全体は微小であると考え，解 $u(\theta)$ に与える影響も小さいもの ($v(\theta) \ll 1$) と仮定する．すなわち方程式 (5.1.12) の解の形は

$$u(\theta) = \frac{\mu}{L^2}(1 + e\cos\theta) + v(\theta) \tag{5.1.13}$$

と仮定する．ここで e は水星の離心率である．これを (5.1.12) へ代入すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\theta^2} + v = \frac{3D}{2}\left[\frac{\mu^2}{L^4}(1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta) + 2\frac{\mu}{L^2}(1 + e\cos\theta)v + v^2\right]$$

となるが，$v \ll \mu/L^2$ とするなら（$\mu/L^2 = 1.803 \times 10^{-11}$ であり，この仮定はかなり無理があるか？），括弧 [　] 内第 2 項と第 3 項を無視する．第 1 項にある $\cos^2\theta$ を $\cos^2\theta = (\cos 2\theta + 1)/2$ として整理すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\theta^2} + v = D_1\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2D_1 e\cos\theta + \frac{e^2}{2} D_1 \cos 2\theta \tag{5.1.14}$$

を得る．ここで $D_1 \equiv 3D\mu^2/(2L^4)$ である．右辺の 3 つの項を非斉次として 3 つに対する解をそれぞれ $v_A(\theta), v_B(\theta), v_C(\theta)$ とする．すなわち $v = v_A + v_B + v_C$ である．それら解は

$$v_A = D_1\left(1 + \frac{e^2}{2}\right),\quad v_B = D_1 e\theta\sin\theta,\quad v_C = -\frac{1}{6}D_1 e^2\cos 2\theta \tag{5.1.15}$$

である．

したがって，解 u は

$$u(\theta) = \frac{\mu}{L^2}(1 + e\cos\theta) + D_1\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + e\theta\sin\theta - \frac{1}{6}e^2\cos 2\theta\right] \tag{5.1.16}$$

となる．解として新たに加わったなかで $D_1 e\theta\sin\theta$ は周期的ではなく時間的に累積していく．よって，この項だけを右辺先頭の項に取り入れると

$$u(\theta) = \frac{\mu}{L^2}(1 + e\cos\theta + eD_2\theta\sin\theta) + D_1\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) - \frac{1}{6}e^2\cos 2\theta\right] \tag{5.1.17}$$

とする．ここで $D_2 \equiv 3D\mu/(2L^2)$ である．ここで三角関数の加法定理を使うと

$$\frac{\mu}{L^2}(1 + e\cos\theta + eD_2\theta\sin\theta) = \frac{\mu}{L^2}\left[1 + e\cos(\theta - D_2\theta)\right]$$

となる．よって解の 1 周期は $\cos(1 - D_2)\theta$ から

$$(1 - D_2)\theta = 2\pi$$

となることである．よって

$$\theta = \frac{2\pi}{1 - D_2} = 2\pi(1 + D_2) = 2\pi + 2\pi D_2$$

から $2\pi D_2$ のズレが発生する．

$$D_2 = \frac{3D\mu}{(2L^2)} = \frac{3\mu}{2L^2}\frac{16\mu^3}{L^2} = 24\left(\frac{\mu}{L^2}\right)^2\mu^2$$

$$2\pi D_2 = \frac{48\pi\mu^4}{L^4} = 1.069 \times 10^{-13} \quad [\text{rad/周期}]$$

$$\frac{180 \times 1.069 \times 10^{-13}}{\pi} = 6.124 \times 10^{-12} \quad [\text{度/周期}]$$

$$6.124 \times 10^{-12} \times 3600 = 2.2046 \times 10^{-8} \quad [\text{秒/周期}]$$

となる．地球の 1 世紀当たりに水星は 415 回転するので $2.2046 \times 10^{-8} \times 415 = 9.15 \times 10^{-6}$ 秒/世紀しかずれない．つまり，Feynman 流の計算では u^2 の項からのズレに対する寄与はゼロとなる．

///

5.2 重力場中での時間の遅れ

5.3 時間の遅れの宇宙的効果

5.4 量子力学でのマッハ原理

5.5 重力場の自己エネルギー

我々の場の理論の修正を考える際に，理論の整合性のことは考えてこなかった．我々は場の項，物質の項，そして結合項を含む全てのラグランジアンを書き下した．

エネルギー運動量テンソルの発散が恒等的にゼロになるように調整することで，場の方程式に到達した．

しかしこのテンソルは重力場自体のエネルギーを含んでいないので，この手続きは明らかに誤りである．つまり物質のエネルギーが保存されないので，我々の理論は物理的に不満足である．

この理論を矯正するために

$$(T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \tag{5.5.1}$$

となり，同時に場のエネルギーを正しく考慮することになるような，以前のテンソル $T^{\mu\nu}$ に加えるべき新しいテンソルを探してみよう．

ウェンツェルの公式と完全なラグランジアンから構成した結果は非対称なテンソルとなり，それから得られる水星の近日点移動の計算値は悪くなる．

つまり，最小作用の原理といった何らかの変分原理から作ったのではない理論は，結局困難や矛盾に突き当たる．

複雑さが増す，さまざまな理論を試してみる．つまり物理的には非線形効果を記述しようとするのである．重力場はエネルギーによって作り出され，その場自体も場の発生源となる．

我々は場の方程式が何らかの作用の変分から出てくるという立場を変えず，(5.5.1) 式が満たされる $\chi^{\mu\nu}$ を得て，運動方程式

$$h^{\mu\nu,\sigma}{}_{,\sigma} - 2\overline{h}^{\mu}{}_{\sigma}{}^{,\nu\sigma} = -\lambda(\overline{T}^{\mu\nu} + \overline{\chi}^{\mu\nu}) \tag{5.5.2}$$

を導くにはどのような項をラグランジアンに加えなければならないのかを考える．少なくともその一部は場の 2 乗[8]，つまりポテンシャルの勾配の 2 乗に比例していなければならない．

よっておそらく $\chi^{\mu\nu}$ は $h^{\mu\sigma}{}_{,\lambda}h^{\nu\lambda}{}_{,\sigma}$ のような 2 つの h と 2 つの微分演算を含む項である．

場の方程式は最小作用の原理のような変分原理から求まるとする．積を変分すると h が減るから，変分されるラグランジアンは $h_{\mu\nu}$ の 3 次の項を必要とする．それを F^3 と呼ぼう．この F^3 の変分が $\chi^{\mu\nu}$ という項を導くようにしたい．

$$\frac{\delta F^3}{\delta h_{\mu\nu}} = \lambda\chi^{\mu\nu} \tag{5.5.3}$$

F^3 の代数的性質は 3 つの h を含み，2 つの微分演算をもつものでなければならない．F^3 の典型的な形は

$$F^3 = ah_{\mu\nu}h^{\mu\sigma,\lambda}h_{\sigma\lambda}{}^{,\nu} + \cdots \tag{5.5.4}$$

のようなものであるだろう．

[8] 伊藤注：非線形の方程式を得ようとしているから？

第6章

6.1 エネルギー運動量テンソルの2次の項

I. 我々は第1近似として，物体を発生源として場を計算した．
II. 次の近似は，第1近似として求めた場を発生源に含め，自己無撞着な解に近づくことである．

ラグランジアンで無視された部分から導かれる項を新たに加えることで，以前のエネルギー運動量テンソルから，新しいエネルギー運動量テンソルを求める．つまり無視された部分を F^3 とおき，変分により

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{new}}T^{\mu\nu} &= {}^{\mathrm{old}}T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu}, \\ \lambda\chi^{\mu\nu} &= \frac{\delta F^3[h]}{\delta h_{\mu\nu}} \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

とする．こうすれば，少なくとも $h_{\mu\nu}$ の高いオーダーまでは問題を解決することができるかもしれない．

記号 ${}^{\mathrm{old}}T^{\mu\nu} \equiv {}^{o}T^{\mu\nu}$ とする．

エネルギー保存則 ${}^{o}T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ を満たさないという問題を解決するために $\chi^{\mu\nu}$ を導入しているので発散 ${}^{o}T^{\mu\nu}_{,\nu}$ を考えることで $\chi^{\mu\nu}$ の構造のヒントを得よう．

$\chi^{\mu\nu}$ の発散が，少なくとも ${}^{o}T^{\mu\nu}_{,\nu}$ の最初のゼロでない項を相殺していなければならない．

この発散を計算するために，まず動いている粒子に対する ${}^{o}T^{\mu\nu}$ を計算が容易になる形に書き替える．スカラーパラメターである固有時 s の積分にすると

$${}^{o}T^{\mu\nu}(x) = m_0 \int \mathrm{d}s\delta^4(x - z(s))\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu \tag{6.1.3}$$

${}^{o}T^{\mu\nu}$ のこの表現が以前に使ったものと同等であることは作用の対応する項を比較すれば確認できる[1]：

$$\lambda \int \mathrm{d}^4x {}^{o}T^{\mu\nu}(x)h_{\mu\nu}(x) = \lambda m_0 \int \mathrm{d}s h_{\mu\nu}(z)\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu \tag{6.1.4}$$

[1] 伊藤注：例えば (4.6.5)-(4.6.7)

(6.1.3) 式の δ 関数の意味は，粒子が実際に存在する場所以外では相互作用のエネルギーが存在しないことを意味している．

電気力学を同じ表現で書き替えてみるならば，この表現が適切であることが理解できる．ラグランジアンの相互作用項は $-j^\mu A_\mu$ であり，j^μ は粒子の速度に関係している．

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= e\int \mathrm{d}s\delta^4(x-z(s))\dot{z}^\mu \\ S(\mathrm{int}) &= -e\int \mathrm{d}sA_\mu\dot{z}^\mu \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

(6.1.3) 式から発散 ${}^oT^{\mu\nu}_{\ ,\nu}$ を計算する．まず，δ 関数は x と z について対称であり，発散の式の x^ν での微分演算は z^ν での微分演算（マイナスをつける）とすることができる．恒等式

$$\dot{z}^\nu\frac{\partial}{\partial z^\nu}f[z(s)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f[z(s)] \tag{6.1.6}$$

を使うと

$${}^oT^{\mu\nu}{}_{,\nu} = m_0\int \mathrm{d}s\delta^4(x-z(s))\ddot{z}^\mu \tag{6.1.7}$$

となる[2]．この発散は，加速度密度になっている．ここで，すでにラグランジアンの中に重力以外の全てのエネルギーを正しく取り入れている．

加速度 $\ddot{z}^\mu$ は運動方程式

$$g_{\mu\lambda}\ddot{z}^\mu = -\frac{1}{2}[g_{\mu\lambda,\nu}+g_{\nu\lambda,\mu}-g_{\mu\nu,\lambda}]\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu = -[\mu\nu,\lambda]_z\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu \tag{6.1.8}$$

添字 z は括弧内の記号が定義される位置を表す．

次に，発散 (6.1.7) 式に $g_{\mu\lambda}\ddot{z}^\mu$ をかけ，その $g_{\mu\lambda}\ddot{z}^\mu$ を $-[\mu\nu,\lambda]_z\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu$ で置き換える．δ 関数により，$[\mu\nu,\lambda]_z$ は $[\mu\nu,\lambda]_x$ としてよいことに注意しよう[3]．つまり，括弧付きの関数は積分の外に出すことができ，右辺は最初のテンソル ${}^oT^{\mu\nu}$ で表され

$$g_{\sigma\lambda}{}^oT^{\sigma\nu}{}_{,\nu}(x) = -[\mu\nu,\lambda]{}^oT^{\mu\nu} \tag{6.1.9}$$

[2]伊藤注：右辺にはマイナスが付くと思うのだが．δ 関数の中に入れたのか？

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial z^\nu} = -\frac{\partial}{\partial z^\nu}\int m_0\mathrm{d}s\delta^4(x-z(s))\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu = -\dot{z}^\nu\frac{\partial}{\partial z^\nu}\int m_0\mathrm{d}s\delta^4(x-z(s))\dot{z}^\mu$$
$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int m_0\mathrm{d}s\delta^4(x-z(s))\dot{z}^\mu = -m_0\int \mathrm{d}s\delta^4(x-z(s))\ddot{z}^\mu = m_0\int \mathrm{d}s\delta^4(z-x(s))\ddot{z}^\mu$$

[3]伊藤注：(6.1.7) 式でマイナスが付くと思うと記したが，この部分でマイナスを吸収したのか．

となる．これが ${}^{o}T^{\mu\nu}$ が満たさなければならない正確な方程式である．

左辺の $g_{\sigma\lambda}$ を $g_{\sigma\lambda} = \eta_{\sigma\lambda} + 2\lambda h_{\sigma\lambda}$ として，これに代入し整理すると ${}^{o}T^{\sigma\nu}{}_{,\nu}$ が λ の 1 次の項から始まることを示す方程式を得る．

$$ {}^{o}T_{\lambda\nu}{}^{,\nu} = -[\mu\nu,\lambda]{}^{o}T^{\mu\nu} - 2\lambda h_{\sigma\lambda}{}^{o}T^{\sigma\nu}{}_{,\nu} \tag{6.1.10} $$

この方程式を新しいテンソル ${}^{\mathrm{new}}T^{\mu\nu} \equiv {}^{n}T^{\mu\nu}$ の発散がゼロ

$$ {}^{n}T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = {}^{o}T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \chi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{6.1.11} $$

という要求と比較し，$\chi^{\mu\nu}$ 自体は場の 2 次式と仮定すると，発散 $\chi^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ は

$$ \chi_{\mu\nu}{}^{,\nu} = [\sigma\nu,\mu]{}^{o}T^{\sigma\nu} + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{6.1.12} $$

とならなければならないことがわかる．

発散が分かっても $\chi^{\mu\nu}$ は決まらない．$\chi^{\mu\nu}$ は F^3 の $h_{\mu\nu}$ による変分 (6.1.2) によって求まるという要求を加える．すると，場の成分の 3 次の積と 2 つの微分演算を含む，すべての可能な項の和として F^3 は書ける．大変な計算の結果だけを引用すると

$$ F^3 = -\lambda\left[h^{\alpha\beta}\overline{h}^{\gamma\delta}\overline{h}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \cdots\right] \tag{6.1.13} $$

となる[4]．

これで後は摂動法を使うことで，以前考えたすべての効果を計算することができる．惑星の運動の場合には，ラグランジアンに F^3 を加えると，軌道の計算で使うべき ϕ と ψ として

$$ \begin{aligned} \phi &= \Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 + \cdots \\ \psi &= \Phi - \frac{3}{8}\Phi^2 + \cdots \\ \Phi &= -2MG/r \end{aligned} \tag{6.1.14} $$

この補正により，水星の近日点移動についての我々の計算と観測値は完全に一致し[5]，残っていた理論と観察との間の最後の不一致が取り除かれた．

[4] 伊藤注：あまりに長いので省略．後で困ることはない．

[5] 伊藤注：(5.1.6) 式の $\alpha + \alpha\beta - a$ で，補正により $a = 1/2$ が減算されるので，合計が 2 から 3/2 へと減少する．前の係数などを考慮すると全体としては元の 6/8 となり 4/3 倍であったものがキャンセルされ 43 秒/世紀という結果が得られ，これは観測値と一致する．

6.2　すべての次数で正しい理論の構成

物理の理論では，より高次の補正の計算は異常に面倒なものになるが，すべての高次の補正を合計した理論を構築することが可能である場合がある．

そこで，関数 $F = F^2 + F^3 + F^4 + \cdots$ に対する完全な表式を求めるという，野心的で大胆なことを考えよう．

我々は変分すべき作用となる関数 F を探す．経験によれば，ラグランジアン，または（それと同等な）ハミルトニアンを出発点とする変分原理から求まらない理論はないからである．

ラグランジアン的でない理論がうまくいかないということが，自然についての根源的真実を反映しているかどうかは，明白ではない．

重力理論を非ラグランジアン的形式で作るという野心的な試みがバーコフによってなされた．彼は線形な場の方程式には手を触れず，粒子の運動方程式の方を変更した．得られた古典力学は満足できるものだったが，つじつまの合った量子化はできなかった．波束の運動は，仮定された古典力学の運動ではなく，アインシュタインの方程式を満たすことが示された．量子化によって彼の場の方程式の隠れた矛盾が明らかになったのかもしれない．

そこで我々は完全な関数 F を

$$F = F^2 + F^3 + F^4 + \cdots \tag{6.2.1}$$

と定義したとき，運動方程式

$$\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}} = \lambda T^{\mu\nu} \tag{6.2.2}$$

が自動的に発散の性質，(6.1.9) 式を導くという要求を課す．つまり関数 F は

$$g_{\sigma\lambda}\left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}\right)_{,\nu} + [\mu\nu, \lambda]\left(\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}}\right) = 0, \tag{6.2.3}$$

を満たすものとする．

この方程式を解くのは極めて難しい問題であり，解を求める手続きというものはない．何とか解を工夫して，代入すればそれが (6.2.2) を満たしているという意味での解を見つけなければならない．

「最も単純な」解は存在する（$g_{\mu\nu}$ の微分演算が最も少ない，つまり 2 つしかない解）．我々はそれを選ぶ．そうすればアインシュタインの理論に一致する理論が得られる．

6.3　無限小変換に対する不変量の構成

(6.2.3) 式はベクトル形であることに注意する．この式と $A^\lambda(x)$ との内積をとり全空間で積分すると，やや異なって見える式が得られる：

$$\int \mathrm{d}\tau \left[A^\lambda(x) g_{\sigma\lambda}(x) \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}\right)_{,\nu} + A^\lambda(x)[\sigma\nu, \lambda] \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}\right)\right] = 0, \quad (6.3.1)$$

任意の A^λ に対して F がこの式を満たすとすれば (6.2.3) 式が導かれる．第 1 項を部分積分し，ν についての微分演算を取り除く．すると

$$\int \underline{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}\right) \left[-[A^\lambda(x) g_{\sigma\lambda}(x)]_{,\nu} + [\sigma\nu, \lambda] A^\lambda(x)\right] = 0, \qquad (6.3.2)$$

を得る．ここで積分 $\underline{\mathrm{d}\tau}$ は σ と ν を交換した被積分関数との和をとって平均したことを表している[6]．$h_{\sigma\nu}$ は対称なので角括弧内も σ と ν に対して対称である場合にのみ数学的意味のある恒等式が得られる．

(6.3.2) 式は別の解釈が可能である．h に 1 次の変更，すなわち $h_{\sigma\nu}$ を $h_{\sigma\nu} + \xi_{\sigma\nu}$ に変えると F の値は

$$F[h_{\sigma\nu} + \xi_{\sigma\nu}] = F[h_{\sigma\nu}] + \xi_{\sigma\nu} \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}\right) + \cdots, \qquad (6.3.3)$$

と変化する．したがって (6.3.2) 式は $\xi_{\sigma\nu}$ が無限小で，しかも (6.3.2) 式に出てくるとき F は変わらないこと（不変）を意味する[7]．

場のテンソル $h_{\mu\nu}$ が，無限小変換 A^λ によって $h'_{\mu\nu}$ に変わったとしよう[8]．

---

[6]伊藤注：従って (6.3.2) 式は

$$(6.3.2) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}\right) \left[-[A^\lambda(x) g_{\sigma\lambda}(x)]_{,\nu} + [\sigma\nu, \lambda] A^\lambda(x)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau \left(\frac{\delta F}{\delta h_{\nu\sigma}}\right) \left[-[A^\lambda(x) g_{\nu\lambda}(x)]_{,\sigma} + [\nu\sigma, \lambda] A^\lambda(x)\right] = 0$$

[7]原注：$\xi_{\sigma\nu}$ が (6.3.2) の [　] 内の形をしているということである．
[8]伊藤注：すなわち 2 段構えで A^λ により $h'_{\mu\nu}$ となり，最終的に $F[h'_{\mu\nu}]$ となる．

$h'_{\mu\nu}$ を (6.3.2) が意味する規則に基づき（σ と ν で対称化し，$[\sigma\nu, \lambda]$ の具体的な形を使う）

$$h'_{\sigma\nu} = h_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu,\lambda}A^\lambda - \frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}A^\lambda{}_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\lambda\nu}A^\lambda{}_{,\sigma}, \tag{6.3.4}$$

と表現する[9]．

便宜上 $-A^\lambda = 2\zeta^\lambda$ として，また $h_{\sigma\nu}$ ではなく

$$g'_{\sigma\nu} = g_{\sigma\nu} + g_{\sigma\nu,\lambda}\zeta^\lambda + g_{\lambda\sigma}\zeta^\lambda{}_{,\nu} + g_{\lambda\nu}\zeta^\lambda{}_{,\sigma}, \tag{6.3.5}$$

とする．

よって，問題は任意の $\zeta^\lambda(x)$ に対し ζ の 1 次のオーダーで不変であるような $g_{\mu\nu}$ の汎関数 F の形を見つけるということになる．これに類似した方程式を扱う方法は微分幾何学を扱う数学者によって開発されている．

変換 (6.3.5) は座標の無限小変換 ${x'}^\lambda = x^\lambda + \zeta^\lambda$ のもとでのテンソル場 $g_{\mu\nu}(x)$ の変換である．

F に対する望ましい不変形を求めよう．添字を下付ではなく上付きにした，$g_{\mu\nu}$ の逆行列を定義すると便利である．

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma, \tag{6.3.6}$$

ここで δ はクロネッカーの δ である．

行列 $A' = A + B$ の逆行列は，行列 B が無限小のとき，展開

$$\frac{1}{A'} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \cdots, \tag{6.3.7}$$

で与えられる．

ζ^λ は無限小なので，この規則に基づき $g'_{\sigma\nu}$ の逆行列をすぐに作ることができ

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \zeta^\alpha{}_{,\nu}g^{\nu\beta} - \zeta^\beta{}_{,\nu}g^{\nu\alpha} - \zeta^\lambda g^{\alpha\sigma}g^{\beta\nu}g_{\sigma\nu,\lambda} + \cdots, \tag{6.3.8}$$

[9] 伊藤注：積分 $\underline{d\tau}$ の意味するところを式で表現し計算すればよい．$[\sigma\nu, \lambda]$ の具体的な形を使う．

$$\frac{1}{2}\left[-[A^\lambda(x)g_{\sigma\lambda}(x)]_{,\nu} + [\sigma\nu,\lambda]A^\lambda(x) - [A^\lambda(x)g_{\nu\lambda}(x)]_{,\sigma} + [\nu\sigma,\lambda]A^\lambda(x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-g_{\lambda\sigma}A^\lambda{}_{,\nu} - g_{\lambda\nu}A^\lambda{}_{,\sigma} - g_{\sigma\nu,\lambda}A^\lambda\right]$$

を得る[10].

容易に見つけることができる1つの不変量を調べよう．行列を少し変えたとき行列式がどのように変化するか，考えてみよう．行列式に対する次の式を使う．

$$\mathrm{Det}A = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\log A}, \tag{6.3.9}$$

この等式の証明を議論するために時間をかけるつもりはない．これがもっともらしいと感じるためには，対角行列の場合，これは自明であることに気付けばよい．

$$\mathrm{Det}A = A_{11}A_{22}A_{33}\cdots = \mathrm{e}^{\log A_{11}+\log A_{22}+\log A_{33}+\cdots} = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\log A}, \tag{6.3.10}$$

ルール (6.3.9) を $(A+B)$ の行列式を計算するのに使う．ただし B は無限小の行列である．必要なのは $A+B$ の対数である．適切な展開は

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\left[A\left(1+\frac{1}{A}B\right)\right] &= \mathrm{Det}A\cdot\mathrm{Det}\left(1+\frac{1}{A}B\right) = \mathrm{Det}A\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\log\left(1+\frac{1}{A}B\right)}\\ &= \mathrm{Det}A\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\frac{1}{A}B}\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

テンソル $g'_{\sigma\nu}$ の行列式を計算するのにこの規則を使い，その結果の対数をとると

$$\log(-\mathrm{Det}g') = \log(-\mathrm{Det}g) + 2\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda} + \zeta^{\lambda}g_{\sigma\nu,\lambda}g^{\sigma\nu} \tag{6.3.12}$$

を得る[11].

[10]伊藤注：(6.3.6) 式を使う．

$$-g^{\alpha\sigma}\left[g_{\lambda\sigma}\zeta^{\lambda}{}_{,\nu} + g_{\lambda\nu}\zeta^{\lambda}{}_{,\sigma} + \zeta^{\lambda}g_{\sigma\nu,\lambda}\right]g^{\beta\nu} = \left[-g^{\alpha\sigma}g_{\sigma\lambda}\zeta^{\lambda}{}_{,\nu} - g_{\lambda\nu}\zeta^{\lambda}{}_{,\sigma}g^{\alpha\sigma} - g^{\alpha\sigma}\zeta^{\lambda}g_{\sigma\nu,\lambda}\right]g^{\beta\nu}$$

$$= \left[-\delta^{\alpha}_{\lambda}\zeta^{\lambda}{}_{,\nu} - g_{\lambda\nu}\zeta^{\lambda}{}_{,\sigma}g^{\sigma\alpha} - g^{\alpha\sigma}\zeta^{\lambda}g_{\sigma\nu,\lambda}\right]g^{\beta\nu} = -\zeta^{\alpha}{}_{,\nu}g^{\beta\nu} - g^{\beta\nu}g_{\nu\lambda}\zeta^{\lambda}{}_{,\sigma}g^{\sigma\alpha} - g^{\alpha\sigma}\zeta^{\lambda}g_{\sigma\nu,\lambda}g^{\beta\nu}$$

$$= -\zeta^{\alpha}{}_{,\nu}g^{\beta\nu} - \delta^{\beta}_{\lambda}\zeta^{\lambda}{}_{,\sigma}g^{\sigma\alpha} - g^{\alpha\sigma}\zeta^{\lambda}g_{\sigma\nu,\lambda}g^{\beta\nu} = -\zeta^{\alpha}{}_{,\nu}g^{\nu\beta} - \zeta^{\beta}{}_{,\sigma}g^{\sigma\alpha} - g^{\alpha\sigma}\zeta^{\lambda}g_{\sigma\nu,\lambda}g^{\beta\nu}$$

[11]伊藤注：(6.3.5) 式を $A+B$ とし，これを (6.3.11) 式では $A = g_{\sigma\nu}$ で $B = g_{\lambda\sigma}\zeta^{\lambda}{}_{,\nu} + g_{\lambda\nu}\zeta^{\lambda}{}_{,\sigma} + g_{\sigma\nu,\lambda}\zeta^{\lambda}$ とする．また $1/A = g^{\sigma\nu}$ である．

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\frac{1}{A}B &= g^{\sigma\nu}\left(g_{\lambda\sigma}\zeta^{\lambda}{}_{,\nu} + g_{\lambda\nu}\zeta^{\lambda}{}_{,\sigma} + g_{\sigma\nu,\lambda}\zeta^{\lambda}\right) = \delta^{\nu}_{\lambda}\zeta^{\lambda}{}_{,\nu} + \delta^{\sigma}_{\lambda}\zeta^{\lambda}{}_{,\sigma} + g_{\sigma\nu,\lambda}\zeta^{\lambda}g^{\sigma\nu}\\ &= 2\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda} + g_{\sigma\nu,\lambda}\zeta^{\lambda}g^{\sigma\nu}\end{aligned}$$

よって，(6.3.11) 式は，マイナスを付けて

$$(-\mathrm{Det}g') = (-\mathrm{Det}g)\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\frac{1}{A}B} = (-\mathrm{Det}g)\cdot\mathrm{e}^{\left(2\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda} + g_{\sigma\nu,\lambda}\zeta^{\lambda}g^{\sigma\nu}\right)}$$

これの log をとったのが (6.3.12) 式となる．

最後の項の g 行列の積は行列式との間に

$$g_{\sigma\nu,\lambda}g^{\sigma\nu} = [\log(-\mathrm{Det}g)]_{,\lambda} \tag{6.3.13}$$

という関係式が成立する[12]．ここで $C = \log(-\mathrm{Det}g)$ として，最後の方程式を書き換えると

$$C' = C + 2\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda} + C_{,\lambda}\zeta^{\lambda} \tag{6.3.14}$$

となる．

最後の 2 項の和が何かの発散だったら，全空間で積分することにより，求めていた不変量が得られる．この 2 項を見ると，積分因子として $\exp(C/2)$ という形が示唆される[13]．

そこで $\exp(\alpha C)$ という不変量を探そう．ζ^{λ} が無限小であることに注意して

$$\mathrm{e}^{\alpha C'} = \mathrm{e}^{\alpha(C+2\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda}+C_{,\lambda}\zeta^{\lambda})} = \mathrm{e}^{\alpha C} + \mathrm{e}^{\alpha C}(2\alpha\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda} + \alpha C_{,\lambda}\zeta^{\lambda}) \tag{6.3.15}$$

となる[14]．

この式の第 2 項は発散として書ける形をしている．実際

$$\left(\mathrm{e}^{\alpha C}\zeta^{\lambda}\right)_{,\lambda} = \mathrm{e}^{\alpha C}\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda} + \alpha C_{,\lambda}\zeta^{\lambda}\mathrm{e}^{\alpha C} \tag{6.3.16}$$

となり，$\alpha = 1/2$ ならば，これは (6.3.15) 式の最右辺第 2 項に等しい．

(6.3.15) 式を全空間で積分すると，$\alpha = 1/2$ とすると第 2 項は消え

$$\int \mathrm{d}\tau \exp(C'/2) = \int \mathrm{d}\tau \exp(C/2) \tag{6.3.17}$$

つまり，不変な解は行列 $g_{\mu\nu}$ を使って

$${}^{\circ}F = \int \mathrm{d}\tau\sqrt{-\mathrm{Det}g} \tag{6.3.18}$$

となる[15]．

---

[12]伊藤注：例えば，テンソル A（行列と考えても良い）の要素 A_{ij} の余因子行列式を Δ_{ij} とする．

$$\frac{\partial}{\partial x^{\ell}}[\log(\mathrm{Det}A)] = \frac{A_{ij,\ell}\Delta_{kj}}{\mathrm{Det}A} = A_{ij,\ell}A^{ij}$$

ただし，余因子行列式の定義

$$\sum_j A_{ij}\frac{\Delta_{kj}}{\mathrm{Det}A} = \delta_{ik}$$

であり，上付添字（反変テンソル）$A^{jk} = \Delta_{kj}/\mathrm{Det}A$ である．

[13]伊藤注：残念ながら凡人としては思いつくことができない．しかしながら，読み進めることでファインマンが何を言っているか分かる．

[14]伊藤注：$\exp(x) \sim 1 + x + \cdots$，$x \ll 1$ を使う．

$$\mathrm{e}^{\alpha(C+2\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda}+C_{,\lambda}\zeta^{\lambda})} = \mathrm{e}^{\alpha C}\mathrm{e}^{\alpha(2\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda}+C_{,\lambda}\zeta^{\lambda})} = \mathrm{e}^{\alpha C}\left[1 + \alpha(2\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda} + C_{,\lambda}\zeta^{\lambda})\right]$$

[15]伊藤注：念のため．$C = \log(-\mathrm{Det}g)$．また $\mathrm{d}\tau\sqrt{-\mathrm{Det}g}$ は不変体積．

6.4 全次数で正しい理論のラグランジアン

前節の ^{o}F は汎関数微分方程式 (6.2.3) の解ではあるが微分演算を含んでいないので我々の必要とする解ではない．

出発点は，ζ^{λ} とその導関数が出てくる (6.3.5) 式である．原理は ζ を含まない（少なくとも発散の中にしか含まない），$g_{\mu\nu}$ とその導関数の組合せを見つけることである．

この節の結論：

$$F = \int \mathrm{d}\tau g^{\mu\nu} R^{\tau}{}_{\mu\nu\tau} \sqrt{-\mathrm{Det} g_{\mu\nu}} \tag{6.4.8}$$

6.5 エネルギー運動量テンソルに対するアインシュタイン方程式

第7章

7.6　2次元および4次元の曲率

座標系の選び方に依らない方法で空間の幾何を特徴づける不変量が曲率である．曲率という概念は2次元空間で考えると視覚化しやすい．平坦な曲がっていない空間が平面であり，曲がった空間が曲面である．

高次元での曲率という概念は，(2次元) 面の曲率の正確な類似物である．

2次元面の線素は

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{11}(\mathrm{d}x)^2 + 2g_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + g_{22}(\mathrm{d}y)^2 \tag{7.6.1}$$

と書ける．この表し方では表面上では3つの関数 g_{ab} が関係しているが，座標変換に対する不変量は，座標の関数1つだけで指定することができる．

座標系の選択に自由度があり，例えば直交するように選べる．座標変換で2つの関数が使えるので，3つの関数 g_{ab} に2つの条件を課すことができるのである．特に

1. $g_{12} = 0$,
2. $g_{11} = g_{22}$

したがって，2次元面の線素の一般的形は

$$(\mathrm{d}s)^2 = f(x,y)\left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2\right) \tag{7.6.2}$$

とできる．関数 $f(x,y)$ は面上各点での物差しの変化とみなすこともできるし，面の曲率を表していると見ることもできる．

各点での曲率とは，無限に小さな対象に対して測定を考えた，何らかの数学的基準によって定義しなければならない．

球の場合，$1/R^2$ となる，局所的な曲率を表すのに適切な量は，内部曲率あるいはガウスにより考察されたことから，ガウス2乗平均曲率と呼ばれる．

たとえば，円筒面の曲率はゼロである．円筒面は収縮なしで平面に展開できるので，半径と円周の比は正確に 2π となる．

面が滑らかなら，内部曲率を定義する無限小の領域は楕円放物面か双曲放物面である．このような面は 2 つの直交する平面上での曲率半径という，長さのパラメターによって表され，内部曲率は $1/(R_1R_2)$ となる．

球面の場合の 2 つの曲率半径は等しく，円筒面の場合，片方は無限大となる．

4 次元空間の曲率も同様な数学的基準により定義される．しかし，直感はきかないので，解析的な方法に頼らざるをえない．特殊相対性理論の 4 次元空間でさえ直感で考えることは難しい．マイナスの符号が付くので，どことどこが近いのか感覚的に理解することが困難である．曲率がある空間はさらに大変になる．

3 次元空間の中に埋め込んだ 2 次元曲面は，曲がった空間の簡単な例として考えられた．しかし 3 次元空間の曲率を同じように表現するには 6 次元空間に埋め込む必要があり，また 4 次元空間の場合には 10 次元空間に埋め込んで考える必要がある．時空の曲率は 2 次元面の曲率よりかなり複雑である．

7.7　一般座標変換の下で不変な量の数

2 次元面では 1 つの量 $1/(R_1R_2)$ が内部曲率を表していたが，4 次元の場合，曲率を表すのに 20 の係数が存在する．

これからすることは，賢い座標の選択によってテンソル $g'_{\mu\nu}$ を単純化することである．

一般に，1 点を除き，加速することによって重力場を消し去ることはできない．曲率は各点の周りの無限小領域で何が起こるかということで定義されるので，計量テンソル $g'_{\mu\nu}$ がどの程度単純化できるかということを調べる必要がある．

2 次元の場合の類推で，1 点の周りの空間が，その点からの距離が 2 次以下では平坦となるように座標を選ぶことができると想像される（リーマン正規座標と呼ばれる）．

つまり，曲面は接点から測った座標について 2 次の量だけ，接平面からず

れるので，これと類似のことが 4 次元で起こると期待する．

そこで $g'_{\mu\nu}$ をある点 x_0 の周りでテーラー展開をし

$$g'_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x_0) + g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau) + \frac{1}{2} g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau)(x^\sigma - x_0^\sigma) + \cdots \tag{7.7.1}$$

とする．計量テンソル $g'_{\mu\nu}$ とその導関数は，前の節の

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu} \tag{7.4.8}$$

にしたがって計算しなければならない．つまり

$$g'_{\alpha\beta}(x_0) = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu} \right]_{x_0},$$

$$g'_{\alpha\beta,\tau}(x_0) = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu,\tau} \right]_{x_0} + 2 \left[\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu} \right]_{x_0},$$

$$g'_{\alpha\beta,\tau\sigma}(x_0) = \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu,\tau\sigma} \right]_{x_0} + 2 \left[\frac{\partial^3 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\tau \partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu} \right]_{x_0}. \tag{7.7.2}$$

展開を 2 次まで考えた場合，$g'_{\mu\nu}$ を単純化するためには (7.7.2) 式の偏微分係数が適当な値になるように選ばなければならない．そこで以下の量

$$\begin{aligned} &1.\quad 16\,\text{個の量}\ \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \right]_{x_0}, \\ &2.\quad 40\,\text{個の量}\ \left[\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\tau} \right]_{x_0}, \\ &3.\quad 80\,\text{個の量}\ \left[\frac{\partial^3 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\tau \partial x^\sigma} \right]_{x_0}. \end{aligned} \tag{7.7.3}$$

を指定しよう[1]．一方，計量テンソルとその導関数の値の数は

$$\begin{aligned} &1.\quad 10\,\text{個の}\ g'_{\mu\nu}(x_0), \\ &2.\quad 40\,\text{個の 1 階導関数}\ g'_{\mu\nu,\tau}(x_0), \\ &3.\quad 100\,\text{個の 2 階導関数}\ g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0). \end{aligned} \tag{7.7.4}$$

[1]伊藤注：(α, τ) の組み合わせは (11，22，33，44，12, 13, 14, 23, 24, 34) の 10 個

まずは，$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ となるようにしよう．これには 1 階導関数 $[\partial x'^{\mu}/\partial x^{\alpha}]_{x_0}$ のみが関係しており，10 個の条件を満たすために 16 個の任意定数が使える．これは明らかに可能であり，6 個の自由度が残る．それら 6 個は特殊相対性理論のローレンツ変換と回転の 6 つのパラメター（速度ベクトルと回転の軸と角度）であり，$\eta_{\mu\nu}$ は変えない．

40 個の

$$\left[\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\tau}}\right]_{x_0}$$

を使って，40 個の $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$ を正確に消去することができる．$g'_{\mu\nu,\tau}$ は $\int \mathrm{d}s$ が最小とする運動方程式に現れる．ある 1 点ですべて消去することができるということは，重力を時空のある 1 点で，適切な加速により除去できるということである．

結局変換によって除去できない $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)$ という形の 2 階導関数の 20 個の線形結合が残る．

第8章

8.1　非直交座標系でのテンソル成分の変換

繰返される添字に対する和の法則：

$$A_\mu B^\mu = A_4 B_4 - A_3 B_3 - A_2 B_2 - A_1 B_1 \tag{8.1.1}$$

直交座標系では，この和は不変なスカラー量である．その特別な場合が，特殊相対性理論で固有時間を定義する

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2, \tag{8.1.2}$$

スカラー不変量を作るためには (8.1.1) 式よりも複雑な規則を使うことになる．

座標の変位はベクトルの反変成分の典型的なものである．通常 $\mathrm{d}x^\mu$ と書く．反変ベクトルの変換則は

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}x^\alpha, \tag{8.1.3}$$

例えばテンソルは，2 つのベクトルの外積と同じ変換をする関数である．つまり

$$T^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}(x) \tag{8.1.5}$$

(8.1.5) と比べると $g_{\mu\nu}$ の添字は上下が逆であるので，同じタイプの量ではないことがわかる．しかし以前 $g_{\mu\nu}$ の逆行列を定義した．

$$g^{\nu\alpha}g_{\alpha\beta} = \delta^\nu_\beta \tag{8.1.6}$$

$$\begin{aligned} &\text{(a)}, \quad A_\beta = g_{\beta\alpha}A^\alpha, \\ &\text{(b)}, \quad A_\beta(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}A_\mu(x) \end{aligned} \tag{8.1.8}$$

これをベクトルの共変成分と呼ぼう．

特殊相対論の直交座標系では固有時間は

$$(\mathrm{d}s)^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{8.1.10}$$

となる．テンソル $\eta_{\mu\nu}$ は対角であり，対角成分は $(1, -1, -1, -1)$ である．

ベクトル量が物理の問題で登場する場合には，共変ベクトルか反変ベクトルのいずれかとして定義される．しかし計量テンソルを使うことによって，一方から他方を作ることができる．添字を上げ下げすることが自由にでき，上下の添字を混ぜて表すこともできる．順番が曖昧にならないように添字を書くことが重要である．

$$g_{\mu\alpha}T^{\mu\nu} = \delta_\alpha{}^\nu \tag{8.1.11}$$

対称テンソル $g_{\mu\nu}$ や $g^{\mu\nu}$ という特殊な場合には，添字を上げ下げすればクロネッカーの δ になるだけなので，この規則を緩めることができる．

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu = \delta_\nu{}^\mu \tag{8.1.12}$$

ベクトルの共変成分と反変成分の間には，基本的な物理の相違はない．同じ物理的内容をもっており，違うのは表現だけである．2 次元の場合には，この違いを図示することができる．

変換は無限小の変位に対して定義されているので，空間の曲がりについては気にする必要はない．問題は座標軸が直交しているかいないかの問題である．座標軸が直交していない場合には，物理的な変位を射影する場合には，2 通りの方法がある．軸に垂直に射影するか，他の軸に平行に射影するかである．

8.2 $g_{\mu\nu}$ の不変量を決定する方程式

座標の無限小変換に対して，計量テンソルからどのような不変量をつくることができるかを調べよう．

これからしようとしていることは，以前ラグランジアンを作るためにしたことと全く同じである．座標の微小変換

$$x^\mu = x'^\mu + \zeta^\mu(x') \tag{8.2.1}$$

を行う．ζ^μ は小さな量と仮定し，ζ^μ について 1 次の項だけを残す．したがって変換で現れる導関数は

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} \tag{8.2.2}$$

となる．よって $g'_{\mu\nu}$ は

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\alpha\beta}(x+\zeta)\left(\delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)\left(\delta^\beta_\nu + \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu}\right) \tag{8.2.3}$$

これを展開して，ζ について 0 次と 1 次の項のみを残すと

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) + g_{\alpha\nu}\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} + g_{\mu\beta}\frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma}\zeta^\sigma \tag{8.2.4}$$

が得られる[1]．新しい $g'_{\mu\nu}$ は従来の $g_{\mu\nu}$ と ζ^μ の 1 次の項との和である．この形が不変であるべしと要求した場合に $g_{\mu\nu}$ のどのような関数が許されるのかを考えると第 6 章で解いた数学の問題と同じ問題になる．

こ問題は保存するエネルギー運動量テンソルを導くラグランジアンを求める問題と同じである．

同じ方程式を導く，同じ内容をもつ物理的観点が複数ある．重力のラグランジアンを求めるときに現れる変換が，純粋に幾何学的問題の解答にも現れることを発見した．したがって，物理的に見える基準と幾何学的に見える基準とは，ある部分で同等であると推測される．

　発散が恒等的にゼロとなる以前のアプローチ[2]の一貫性は，現在ここで行っていることと同等でなければならない．計量テンソル $g_{\mu\nu}$ から作られる不変量の物理的意味は何なのだろうか．

運動方程式は変分原理

$$\delta \int \mathrm{d}s = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu} \tag{8.2.5}$$

[1]伊藤注：念のため．(8.2.3) をそのまま展開すると

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x+\zeta) + g_{\alpha\nu}(x+\zeta)\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} + g_{\mu\beta}(x+\zeta)\frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu}$$

であり，更に右辺の $g_{\mu\nu}(x+\zeta)$ をテイラー展開し，また右辺の 2，3 項の $g_{\alpha\mu}(x+\zeta)$ では $\zeta \to 0$ とした．

[2]伊藤注：6.2 節と 6.3 節で行ったことを指している．

変分を行うと次の（測地線の）方程式が求まる．

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2} = -\Gamma^\mu_{\sigma\tau}\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\tau}{\mathrm{d}s} \tag{8.2.7}$$

ここで

$$\Gamma^\mu_{\sigma\tau} = g^{\mu\nu}[\sigma\tau,\nu]$$

である．任意の変換によって計量テンソルを変えても，この（測地線の）方程式の形は変わらないので，問題の物理を含むものは $g_{\mu\nu}$ の不変量でなければならない．

8.3 空間が真に平坦であるという仮定について

8.4 重力理論への異なるアプローチの間の関係について

重力の理論の特徴の一つは，場による解釈と幾何学的解釈の双方が可能であるということである．

このようにスピン 2 の場はこの幾何学的な意味をもっている．これは簡単には説明できない驚くべきことなのである．

幾何学的解釈は物理にとって実際には必要でなく，本質的なことでもない．

一致自体が，何らかのゲージ不変性を表していると理解すべきなのかもしれない．

変換の下での場の理論の一般的性質を第 3 の観点から議論した後に，重力に関する先の 2 つの観点[3] の間の関係は明らかになるのかもしれない．

この観点は後でもっと深く展開するが，ここでは重力が幾何でも場でもあり得る理由を理解するのに取るべき方向について，何らかの間隔を得るための議論をする．

[3]伊藤注：ここでの訳文は分かりにくかったので，日本文を勝手に書き換えた．そこで，ここで言う 2 つの観点とは「場の解釈」と「幾何学的解釈」に相当していると思う．

ゲージ不変性について考えてみよう．電気力学でよく言われるように，これはベクトルポテンシャル A を

$$A' = A + \nabla X \tag{8.4.1}$$

によって新しいベクトルポテンシャルに置き換えても，場の方程式も物理的効果も変わらないことを意味する．これは振幅の位相不変性に関係している．量子力学の振幅がどう変化するかを見てみよう．

確率の計算に

$$\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\psi$$

を使ったとしても，物理的予測は何も変わらない．一般に定数 a には意味がない．では，定数 a の代わりに，空間内の各点で変化する X を使ったらどうなるだろうか．方程式は

$$\nabla\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}X}(\nabla\psi + \mathrm{i}\psi\nabla X) \tag{8.4.2}$$

となる．しかし演算子 $(\nabla - \mathrm{i}A')$ は位相しか変えない．

$$(\nabla - \mathrm{i}A')\psi' = (\nabla - \mathrm{i}A)\psi \tag{8.4.3}$$

つまり，もしこのように結合するベクトル場が存在するならば，方程式は場 ψ の時空に依存する変換の下で不変である．

ヤン-ミルズ・ベクトル場理論は原子核相互作用のアイソスピンにこの変換のアイデアを拡張する試みである．陽子の振幅を ψ とすると

$$\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{a}}\psi \tag{8.4.4}$$

は部分的に陽子で部分的に中性子である状態を表す．

ヤンとミルズの提案は「位置に依存する」位相変更 $(a \to X)$ が方程式には何の変更ももたらさないように，ラグランジアンにベクトル場を加えるということであった．

物理の方程式は

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \tag{8.4.5}$$

のように定数だけ変位させても不変である．運動量表示を使い平行移動の演算子を

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_{\mu}a^{\nu}}$$

とする．

すると，空間に依存する変位 $a^\mu \to \zeta^\mu$ を認めたときに，物理の方程式をどのようにして不変にするかを調べることができる．より完全なラグランジアンを求めなければならない．そこで必要な新しい項は，まさに重力場のラグランジアンである．つまり重力とは座標変換に対するゲージ不変性に対応する場なのである．

8.5 接空間からみた曲率

アインシュタインのように幾何学的に考えれば，半径と円周の極限として曲率などの量を求めることができる．

座標変換である 16 個の微分係数 $(\partial x^\alpha/\partial x'^\nu)$ を調節することによって

$$g^0_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{8.5.1}$$

とすることができると言った．

また 40 個の 2 階微分係数 $(\partial^2 x^\alpha/\partial x'^\mu \partial x'^\nu)$ を調節して $g^0_{\mu\nu}$ の 1 階微分係数をすべてゼロとすることができる．次に 80 個の調節可能な 3 階微分係数と $g_{\mu\nu}$ の 100 個の 2 階微分係数があるが，幾何学的定義をもつのは，2 階微分係数の 20 個の線形結合になる．これらは座標変換によって消去できない．我々が探しているのはこれらの 20 個の式である．

3 段階でこの計算をする．第 1 に座標変換の 1 階と 2 階の微分係数は（ある 1 点でリーマン正規座標に変換することによって）$g^0_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ および $g^0_{\mu\nu,\sigma} = 0$ となるように既に調節したと仮定して，20 個の量に対する式を見つける．

そしてその後で，実際に任意の座標から出発して，これらの調節をどのようにしたのかを考え，最初の $g_{\mu\nu}$ を使った 20 個の量の式を得る．

最初に，ある点における接空間の座標による幾何学的に定義可能な量を議論しよう．2 次元では曲がった空間とは曲面であり，図 8.2 のように，ある点での面の形を，そこでの接平面から見た形に対比させる．

曲面の最初に与えられた座標は一般には直交しておらず，不変量は $1/(R_1R_2)$ に基づき，また形状の最も単純な表現を与えるような適切な方向を向いていない．4 次元で行うことの第 1 段階は，最初に与えられた座標によるこの内部曲率の決定である．

問題の点で，曲がった空間が平らな空間からのズレを表すのは 2 階以上の

微分係数である．曲率とはまさに曲面と接平面との局所的なズレの尺度である．それはその点での空間の本質的な性質である．

座標の 1，2，3 階微分係数のみが関係するので

$$x^\alpha = x'^\alpha + \frac{1}{2}a^\alpha{}_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu + \frac{1}{6}b^\alpha{}_{\mu\nu\sigma}x'^\mu x'^\nu x'^\sigma \tag{8.5.2}$$

とすれば十分に一般的な座標変換となる[4].

座標変換の 1 階微分係数は

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha{}_\mu + a^\alpha{}_{\mu\nu}x'^\nu + \frac{1}{2}b^\alpha{}_{\mu\nu\sigma}x'^\nu x'^\sigma \tag{8.5.3}$$

接空間で計量テンソルは

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau, \\ g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}x^\sigma x^\tau, \end{aligned} \tag{8.5.4}$$

とすれば十分に一般的である[5]．上付き添字 0 は接点 x_0 で計算された量であることを示す.

接空間で 2 つの座標系を考え，両方でその式の形が変わらないことを要請すると，不変な線形結合が求まる.

2 つの空間は接しているので，座標は 2 次以上でのみ異なる．つまり

$$a^\alpha{}_{\mu\nu} = 0 \tag{8.5.5}$$

とできる[6].

---

[4]伊藤注：明記されていないが，x' が接空間（平ら）の座標で，x が曲がった空間を表す座標である．案外重要.

[5]伊藤注：$g_{\alpha\beta}$ は曲がった空間の接空間での計量テンソル．前提として $g^0_{\alpha\beta,\sigma} = 0$

[6]伊藤注：以下のようなことを言っているのか．無限小座標変換（簡単のため 3 次以上を無視し，2 次元とする）

$$x^\alpha = x'^\alpha + \frac{1}{2}a^\alpha{}_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu \quad \to \mathrm{d}x^\alpha = \mathrm{d}x'^\alpha + a^\alpha{}_{\mu\nu}x'^\nu \mathrm{d}x'^\mu$$

を考える．2 つの座標系の接空間は同じであるから $(\mathrm{d}s)^2$ は等しい．直交座標を考えるなら，

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}s)^2 = \sum_\alpha (\mathrm{d}x^\alpha)^2 &= \sum_\alpha (\mathrm{d}x'^\alpha)^2 + \sum_\alpha 2a^\alpha{}_{\mu\nu}x'^\nu \mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\alpha + \sum_\alpha (a^\alpha{}_{\mu\nu}x'^\nu \mathrm{d}x'^\mu)^2 \\ &= \sum_\alpha (\mathrm{d}x'^\alpha)^2 = (\mathrm{d}x'^1)^2 + (\mathrm{d}x'^2)^2 \end{aligned}$$

となるはずだから，$a^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$

次は (8.5.3) 式を使って，$g_{\mu\nu}$ の変換則を計算すると

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} + \eta_{\alpha\nu}b^\nu_{\beta\sigma\tau} + \eta_{\beta\nu}b^\nu_{\alpha\sigma\tau}\right)x'^\sigma x'^\tau \tag{8.5.6}$$

となる[7].

したがって，g の 2 階導関数の関係は

$$g'^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} = g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} + b_{\alpha\beta\sigma\tau} + b_{\beta\alpha\sigma\tau} \tag{8.5.7}$$

となる．ただし

$$b_{\alpha\beta\sigma\tau} = \eta_{\alpha\nu}b^\nu_{\beta\sigma\tau}$$

である．

b は後ろの 3 つの添字について完全反対称であるが，$g_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ は $\sigma\tau$ についてのみ対称であることを利用する．添字を交換し ($\beta \longleftrightarrow \sigma$) 引き算すると

$$g'^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g'^0_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} + g^0_{\alpha\sigma,\beta\tau} = b_{\beta\alpha\sigma\tau} - b_{\sigma\alpha\beta\tau} \tag{8.5.8}$$

この式の右辺は $\alpha\tau$ について対称であるが，左辺は必ずしもそうではない．そこで $\alpha \longleftrightarrow \tau$ とし反対称化すると，プライム付きか否かにかかわらない

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2}\left(g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g^0_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g^0_{\tau\beta,\sigma\alpha} + g^0_{\tau\sigma,\beta\alpha}\right) \tag{8.5.9}$$

を得る[8].

---

[7]伊藤注：(8.5.3) 式とは逆の変換式を使って，更に x^α の 2 次以下を拾うと

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g_{\mu\nu} = \left(\delta^\mu_\alpha + \frac{1}{2}b^\mu_{\alpha\beta\sigma}x^\beta x^\sigma\right)\left(\delta^\nu_\beta + \frac{1}{2}b^\nu_{\beta\alpha\sigma}x^\alpha x^\sigma\right)g_{\mu\nu}$$
$$= \left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta + \frac{1}{2}\delta^\mu_\alpha b^\nu_{\beta\alpha\sigma}x^\alpha x^\sigma + \frac{1}{2}\delta^\nu_\beta b^\mu_{\alpha\beta\sigma}x^\beta x^\sigma\right)\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}x^\sigma x^\tau g^0_{\mu\nu,\sigma\tau}\right)$$
$$= \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\nu}b^\nu_{\beta\tau\sigma}x^\tau x^\sigma + \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}b^\nu_{\alpha\tau\sigma}x^\tau x^\sigma + \frac{1}{2}g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}x^\sigma x^\tau$$

を得る．(8.5.2) の定義式から分かるように b の下付添字 $\mu\nu\sigma$ はどのようにも交換できる．よって (8.5.6) が得られる．次に $x^\sigma x^\tau$ であるが，これを (8.5.2) を使い変換するが，x'^α の 2 次以下では $x^\sigma x^\tau = x'^\sigma x'^\tau$ である．

[8]伊藤注：$\alpha \longleftrightarrow \tau$ としても (8.5.8) 式右辺は変わらない：$B \equiv b_{\beta\alpha\sigma\tau} - b_{\sigma\alpha\beta\tau} = b_{\beta\tau\sigma\alpha} - b_{\sigma\tau\beta\alpha} \equiv B'$ である．一方

$$B = g'^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g'^0_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} + g^0_{\alpha\sigma,\beta\tau},\quad B' = g'^0_{\tau\beta,\sigma\alpha} - g'^0_{\tau\sigma,\beta\alpha} - g^0_{\tau\beta,\sigma\alpha} + g^0_{\tau\sigma,\beta\alpha}$$

$$0 = \frac{1}{2}(B - B')$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(g'^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g'^0_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} + g^0_{\alpha\sigma,\beta\tau}\right) - \left(g'^0_{\tau\beta,\sigma\alpha} - g'^0_{\tau\sigma,\beta\alpha} - g^0_{\tau\beta,\sigma\alpha} + g^0_{\tau\sigma,\beta\alpha}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(g'^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g'^0_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g'^0_{\tau\beta,\sigma\alpha} + g'^0_{\tau\sigma,\beta\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left(g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau} - g^0_{\alpha\sigma,\beta\tau} - g^0_{\tau\beta,\sigma\alpha} + g^0_{\tau\sigma,\beta\alpha}\right)$$

これが我々が探していた 20 個の線形結合である．この量はテンソルではない．十分に一般的でもない．場がゼロになる点でのみ定義されている

これはある意味では，重力テンソルの本質的な部分であり，変換で除去することはできない[9]．純粋の潮汐力を表している．

まとめ：
第 1 に $g_{\mu\nu}$ を $\eta_{\mu\nu}$ にし（伊藤注：局所化），その 1 階導関数をゼロにするための（リーマン正規座標への）変換をみつける（伊藤注：すなわち接空間であり，(8.5.5)）．次に変換された $g_{\mu\nu}$ を使うと，曲率は (8.5.9) 式によって表される[10]．

残る問題は $R_{\alpha\tau\beta\sigma}$ を最初に与えた任意の座標および計量 $g_{\mu\nu}$ を使って表すことである．

8.6 任意の座標での曲率

次の段階として 1 階導関数（一般にはゼロではない）に対する制限は取り除くが，座標は局所的には直交しているとする．
$g_{\mu\nu}$ と $g'_{\mu\nu}$ は

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + g^0_{\alpha\beta,\mu}x^\mu + \frac{1}{2}g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}x^\sigma x^\tau, \\
g'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau,
\end{aligned}
\tag{8.6.1}
$$

g' は以前と同じで 1 階導関数がゼロである．g の 2 階導関数は既に調節したので

$$
x^\alpha = x'^\alpha + \frac{1}{2}a^\alpha{}_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu \tag{8.6.2}
$$

という型の変換だけを考えればよい．座標変換の 1 階微分係数は

$$
\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha{}_\mu + a^\alpha{}_{\mu\nu}x'^\nu \tag{8.6.3}
$$

を g' を g で表す式に代入すると

$$
\eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^0_{\alpha\beta,\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau = \eta_{\alpha\beta} + (g^0_{\alpha\beta,\sigma} + a_{\beta\alpha\sigma} + a_{\alpha\beta\sigma})x'^\sigma
$$

[9]伊藤注：ここで「重力テンソル」と記されているが，前半で「テンソルではない」としているので，ここは単に「重力」か？つまり,「重力の本質的な部分であり，変換で除去することはできない.」

[10]伊藤注：この式を曲率と言い切っている．

$$+x'^{\sigma}x'^{\tau}\left[a^{\rho}{}_{\alpha\sigma}a_{\rho\beta\tau}+a^{\rho}{}_{\alpha\tau}g^{0}_{\rho\beta,\sigma}+a^{\rho}{}_{\beta\tau}g^{0}_{\rho\alpha,\sigma}+\frac{1}{2}a^{\rho}{}_{\sigma\tau}g^{0}_{\alpha\beta,\rho}+\frac{1}{2}g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}\right] \tag{8.6.4}$$

を得る．$a_{\alpha\beta\sigma}=\eta_{\alpha\mu}a^{\mu}{}_{\beta\sigma}$ である．

///////////////////////////////脚注///////////////////////////////
伊藤注：脚注としてはあまりにも長くなるので，本文中に記す．

$$g'_{\alpha\beta}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}g_{\mu\nu}$$

を行う．座標変換は

$$x^{\mu}=x'^{\mu}+\frac{1}{2}a^{\mu}{}_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}$$

とする．よって

$$\eta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}\left(\eta_{\mu\nu}+g^{0}_{\mu\nu,\sigma}x^{\sigma}+\frac{1}{2}g^{0}_{\mu\nu,\sigma\tau}x^{\sigma}x^{\tau}\right)$$

である．これに座標変換の微分係数を代入すると

$$=\left(\delta^{\mu}{}_{\alpha}+a^{\mu}{}_{\alpha\sigma}x'^{\sigma}\right)\left(\delta^{\nu}{}_{\beta}+a^{\nu}{}_{\tau\beta}x'^{\tau}\right)\left(\eta_{\mu\nu}+g^{0}_{\mu\nu,\sigma}x^{\sigma}+\frac{1}{2}g^{0}_{\mu\nu,\sigma\tau}x^{\sigma}x^{\tau}\right)$$

$$=\left(\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta}+\delta^{\nu}{}_{\beta}a^{\mu}{}_{\alpha\sigma}x'^{\sigma}+\delta^{\mu}{}_{\alpha}a^{\nu}{}_{\tau\beta}x'^{\tau}+a^{\mu}{}_{\alpha\sigma}x'^{\sigma}a^{\nu}{}_{\tau\beta}x'^{\tau}\right)$$

$$\times\left(\eta_{\mu\nu}+g^{0}_{\mu\nu,\sigma}x^{\sigma}+\frac{1}{2}g^{0}_{\mu\nu,\sigma\tau}x^{\sigma}x^{\tau}\right)$$

$$=\eta_{\alpha\beta}+\eta_{\mu\beta}a^{\mu}{}_{\alpha\sigma}x'^{\sigma}+\eta_{\alpha\nu}a^{\nu}{}_{\tau\beta}x'^{\tau}+a^{\mu}{}_{\alpha\sigma}a_{\mu\tau\beta}x'^{\sigma}x'^{\tau}+g^{0}_{\alpha\beta,\sigma}\underbrace{x^{\sigma}}$$

$$+g^{0}_{\mu\beta,\sigma}a^{\mu}{}_{\alpha\tau}\underbrace{x^{\sigma}}x'^{\tau}+g^{0}_{\alpha\nu,\sigma}a^{\nu}{}_{\tau\beta}\underbrace{x^{\sigma}}x'^{\tau}+\frac{1}{2}g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}\underbrace{x^{\sigma}x^{\tau}}$$

以上，x もしくは x' の 2 次以下のみをとった．また，$\underbrace{x^{\sigma}}$ などは座標変換を行い x'^{σ} に変換する必要がある．それらをまとめると

$$=\eta_{\alpha\beta}+(g^{0}_{\alpha\beta,\sigma}+a_{\beta\alpha\sigma}+a_{\alpha\sigma\beta})x'^{\sigma}$$

$$+\left[a^{\rho}{}_{\alpha\sigma}a_{\rho\tau\beta}+a^{\rho}{}_{\alpha\tau}g^{0}_{\rho\beta,\sigma}+a^{\rho}_{\tau\beta}g^{0}_{\alpha\rho,\sigma}+\frac{1}{2}g^{0}_{\alpha\beta,\rho}a^{\rho}{}_{\sigma\tau}+\frac{1}{2}g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}\right]x'^{\sigma}x'^{\tau}$$

途中，例えば

$$g^{0}_{\alpha\beta,\sigma}\underbrace{x^{\sigma}}=g^{0}_{\alpha\beta,\rho}x^{\rho}=g^{0}_{\alpha\beta,\rho}\left(x'^{\rho}+\frac{1}{2}a^{\rho}{}_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}\right)$$

$$=g^{0}_{\alpha\beta,\sigma}x'^{\sigma}+\frac{1}{2}g^{0}_{\alpha\beta,\rho}a^{\rho}{}_{\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau}$$

などを使った．なお，$a_{\alpha\beta\sigma}=a_{\alpha\sigma\beta}$ であり，$g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$ である．
//////////////////////脚注終わり//////////////////////////

1 階導関数は

$$a_{\beta\alpha\sigma}+a_{\alpha\beta\sigma}=-g^0_{\alpha\beta,\sigma} \tag{8.6.5}$$

とするとゼロになる．この方程式を解いて，$a^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ を最初の座標系の $g^0_{\alpha\beta,\sigma}$ で表さなければならない．$(\alpha\sigma)$ を交換した式を差し引きまとめると

$$a_{\sigma\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\left(g^0_{\sigma\alpha,\beta}+g^0_{\sigma\beta,\alpha}-g^0_{\alpha\beta,\sigma}\right)=-[\alpha\beta,\sigma]^0 \tag{8.6.6}$$

を得る[11]．

$$\begin{aligned}R_{\alpha\tau\beta\sigma}=&\frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta,\sigma\tau}-g_{\alpha\sigma,\beta\tau}-g_{\tau\beta,\sigma\alpha}+g_{\tau\sigma,\beta\alpha}\right)\\&+[\rho\sigma,\alpha]\eta^{\rho\lambda}[\tau\beta,\lambda]-[\rho\beta,\alpha]\eta^{\rho\lambda}[\tau\sigma,\lambda]\end{aligned} \tag{8.6.7}$$

[11]伊藤注：念のため．(8.6.5) 式と，更に

$$a_{\beta\sigma\alpha}+a_{\sigma\beta\alpha}=-g^0_{\sigma\beta,\alpha},\quad a_{\alpha\sigma\beta}+a_{\sigma\alpha\beta}=-g^0_{\sigma\alpha,\beta}$$

を足したり引いたりすると

$$2a_{\sigma\alpha\beta}=-\left(g^0_{\sigma\alpha,\beta}+g^0_{\sigma\beta,\alpha}-g^0_{\alpha\beta,\sigma}\right)$$

第 10 章

10.1 重力場の方程式

ベクトルを空間内で動かしたとき，それに生じることにより定義される曲率テンソルをみつけた．これはテンソルなので共変な方程式を作るのに利用することができる．しかし共変な方程式を書くだけでは物理は得られない．方程式と現実の物質の世界との関連を指定しなければならない．

アインシュタインがしたことはこの関連が何であるかを推測したことである．

重力はエネルギー密度に結合しており，相対論でのエネルギー密度は 2 階テンソルの (4,4) 成分なので，2 階テンソルが必要となることがヒントとなる．曲率は 4 階テンソルなので 1 回縮約してリッチテンソルを使う．そして $\lambda^2 T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ としたのがアインシュタインの最初の推測だった．

しかしアインシュタインが最終的に選んだのは

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \lambda^2 T_{\mu\nu} \tag{10.1.1}$$

であった．その大きな理由は (10.1.1) の共変微分法による発散が恒等的にゼロになることである．これはエネルギー保存則が (10.1.1) の形の結果であることを意味する．

式 (10.1.1) の形を選べば計量テンソルは固定されない．一般的な座標変換を表す 4 つの関数に対応して，計量には 4 つの関数を選ぶ自由がある．

以下略

10.2 重力場内の古典的粒子の作用

略

マクスウェル方程式を解くには，電流の形が必要である．それは任意の流れではなく，保存していなければならない．意味のある保存電流は，物理の他の問題を，オームの法則やフックの法則，シュレーディンガー方程式など何らかの独立な法則に従って解くことにより得られる．これらの

他の法則が無い場合には，電磁場の理論は役に立たず，意味のない理論となる．

重力の場合は，事情はより複雑である．テンソル $T^{\mu\nu}$ は物質の運動を含んでおり，オームの法則やフックの法則など物質が従う法則が必要だが，$T^{\mu\nu}$ は重力場 $g^{\mu\nu}$ も含んでいる．

中略

しかし非常に単純な問題でさえも，適切な $T^{\mu\nu}$ をどのように書き下せばよいのか分からない．回転している棒を表す $T^{\mu\nu}$ をどのように表現したらよいかわからないので，重力波の放射を正確に計算することができない．

中略

重力理論はこの点に問題を抱えている．方程式の片方は美しく幾何学的だが，他方はそうではない．フックの法則やその他の法則など物質を支配する法則のさまざまな美しくない部分を含んでいる．美しくも幾何学的でもない．多くの物理学者は方程式の片方の美しさに魅せられているが，他方の醜さと，そして物理的な解答がないことを無視している．

我々は（$T^{\mu\nu}$ を導き出す）作用 S_m の形を推測することを学ばなければならない．……

以下略

備忘録まとめ 1

備忘録まとめ 1 として，本文とは別に共変微分法が導入されているという条件のもとで，曲率テンソル $R_{ik\ell m}$ を導出しておく．これは主に C. メラー著，永田恒夫，伊藤大介訳「相対性理論」(みすず書房 1959) の計算法によるものであるが，当然のことながらランダウ・リフシッツの「場の古典論」の結果とも一致する．(添字の順序確認)

また，(共変) 導関数に対する呼び方「いわゆる」共変微分については，矢野健太郎著「相対性理論」(至文堂昭和 38 年) での用語を従い「共変微分係数」とする．すなわち変数 x の関数 f の微分は $\Delta f(x)$ であって，$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ は微分係数もしくは微分商と呼んだ方が混乱がない．ただし，共変微分係数の場合，共変微分でも共変微分係数でも混同することはあまりないので上記矢野の本でも何箇所かで両方を使っている．また，矢野著「相対性理論」での曲率テンソル ${R_{kji}}^h$ の添字表記は他の一般的な表記と若干異なるので注意を要する．$({R_{jki}}^h \Rightarrow {R^h}_{ijk})$

以下，共変微分法の幾何学的意味については触れない．

共変ベクトル a_i の共変微分係数は

$$a_{k;\ell} = \frac{\partial a_k}{\partial x^\ell} - \Gamma^r_{k\ell} a_r = \frac{\partial a_k}{\partial x^\ell} - \Gamma_{r,k\ell} a^r \tag{M.1}$$

ここで「；」は共変微分演算を表す．またクリストッフェル記号

$$\Gamma^i_{k\ell} = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial g_{r\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^r} \right), \quad \Gamma_{r,k\ell} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial g_{r\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^r} \right) \tag{M.2}$$

である．さらに 2 階の共変微分係数は

$$a_{k;\ell m} = \frac{\partial a_{k;\ell}}{\partial x^m} - \Gamma_{r,km} {a^r}_{;\ell} - \Gamma^r_{\ell m} a_{k;r} \tag{M.3}$$

となる．ここで $\Gamma_{r,k\ell} {a^r}_{;\ell}$ を選んだのは，クリストッフェル記号で g^{ir} のつかない方の導関数を使いたいからである．この式をさらに展開すると

$$\begin{aligned} a_{k;\ell m} &= \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^\ell} - \Gamma_{r,k\ell} a^r \right) - \Gamma_{r,km} \left(\frac{\partial a^r}{\partial x^\ell} + \Gamma^r_{t\ell} a^t \right) - \Gamma^r_{\ell m} a_{k;r} \\ &= \frac{\partial^2 a_k}{\partial x^m \partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma_{r,k\ell}}{\partial x^m} a^r - \Gamma_{r,k\ell} \frac{\partial a^r}{\partial x^m} - \Gamma_{r,km} \left(\frac{\partial a^r}{\partial x^\ell} + \Gamma^r_{t\ell} a^t \right) - \Gamma^r_{\ell m} a_{k;r} \end{aligned} \tag{M.4}$$

一方，$a_{k;m\ell}$ は ℓ と m を交換すればよいので

$a_{k;m\ell}$

$$= \frac{\partial^2 a_k}{\partial x^\ell \partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{r,km}}{\partial x^\ell} a^r - \Gamma_{r,km} \frac{\partial a^r}{\partial x^\ell} - \Gamma_{r,k\ell} \left(\frac{\partial a^r}{\partial x^m} + \Gamma^r_{tm} a^t \right) - \Gamma^r_{m\ell} a_{k;r} \tag{M.5}$$

したがって，曲率テンソル $-R_{ik\ell m} a^i \equiv a_{k;\ell m} - a_{k;m\ell}$ は (M.4)―(M.5) で

$$R_{ik\ell m} a^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{i,k\ell}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{i,km}}{\partial x^\ell} + \Gamma_{r,km} \Gamma^r_{i\ell} - \Gamma_{r,k\ell} \Gamma^r_{im} \right) a^i$$

$$R_{ik\ell m} = \frac{\partial \Gamma_{i,k\ell}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{i,km}}{\partial x^\ell} + g_{rs} \left(\Gamma^s_{km} \Gamma^r_{i\ell} - \Gamma^s_{k\ell} \Gamma^r_{im} \right) \tag{M.6}$$

この形ならば，(M.2) 右を考慮すると $\partial \Gamma_{i,k\ell}/\partial x^m$ などの計算は g^{ir} が無いぶん，簡単である．

順番が逆のようであるが $R^i{}_{k\ell m}$ についても導出しておく．(M.3) 式に対応する式は

$$a_{k;\ell m} = \frac{\partial a_{k;\ell}}{\partial x^m} - \Gamma^r_{km} a_{r;\ell} - \Gamma^r_{\ell m} a_{k;r} \tag{M.7}$$

である．これを展開すると

$$a_{k;\ell m} = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x^\ell} - \Gamma^r_{k\ell} a_r \right) - \Gamma^r_{km} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x^\ell} - \Gamma^t_{r\ell} a_t \right) - \Gamma^r_{\ell m} a_{k;r}$$

$$= \frac{\partial^2 a_k}{\partial x^m \partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma^r_{k\ell}}{\partial x^m} a_r - \Gamma^r_{k\ell} \frac{\partial a_r}{\partial x^m} - \Gamma^r_{km} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x^\ell} - \Gamma^t_{r\ell} a_t \right) - \Gamma^r_{\ell m} a_{k;r} \tag{M.8}$$

であり，$a_{k;m\ell}$ は上の式で ℓ と m を入れ替えればよい．よって

$a_{k;m\ell}$

$$= \frac{\partial^2 a_k}{\partial x^\ell \partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^r_{km}}{\partial x^\ell} a_r - \Gamma^r_{km} \frac{\partial a_r}{\partial x^\ell} - \Gamma^r_{k\ell} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x^m} - \Gamma^t_{rm} a_t \right) - \Gamma^r_{m\ell} a_{k;r} \tag{M.9}$$

が得られる．よって曲率テンソル $-R^i_{k\ell m} a^i \equiv a_{k;\ell m} - a_{k;m\ell}$ は (M.8)―(M.9) より

$$R^i_{k\ell m} = \frac{\partial \Gamma^i_{k\ell}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^\ell} + \Gamma^r_{k\ell} \Gamma^i_{rm} - \Gamma^r_{km} \Gamma^i_{r\ell} \tag{M.10}$$

が得られる．

備忘録まとめ２

まとめ２では Einstein-Hamilton 作用を変分することで重力場の方程式を導出する．そのためにはいくつかの準備が必要となりそれらを順次記していく．最も一般的な導出を行っていると思われる，前記矢野著「相対性理論」を主に参考とした．

1．クリストッフェル記号とそれに関連する式

クリストッフェル記号は４章の

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right] \tag{4.6.10}$$

$$g_{\sigma\rho}x''^\rho = -[\mu\nu, \sigma]x'^\mu x'^\nu. \tag{4.6.11}$$

から導かれる．(4.6.11) 式に左から $g^{\rho\sigma}$ をかけると測地線の方程式

$$x''^\rho = -g^{\rho\sigma}[\mu\nu, \sigma]x'^\mu x'^\nu \equiv -\Gamma^\rho_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu \tag{S.1}$$

が得られる．ここでクリストッフェルの記号

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right]$$

とした．このまとめではギリシャ文字添字の代わりにアルファベットを使っているので

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}g^{hr}\left[\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right] \tag{S.2}$$

とする．

上の定義から

$$\Gamma^r_{kj}g_{ir} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right]$$

$$\Gamma^r_{ki}g_{rj} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right]$$

この２つの式を加えて整理すると

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^r_{kj}g_{ir} - \Gamma^r_{ki}g_{rj} = 0 \tag{S.3}$$

が得られる．

更に $g_{ij}g^{jh} = \delta_i^h$ の両辺を x^k で微分すると

$$\cdot\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}g^{jh} + g_{ij}\frac{\partial g^{jh}}{\partial x^k} = 0.$$

これに (S.3) を代入すると

$$\left(\Gamma^r_{kj}g_{ir} + \Gamma^r_{ki}g_{rj}\right)g^{jh} + g_{ij}\frac{\partial g^{jh}}{\partial x^k} = 0$$

$$\Gamma^r_{kj}g_{ir}g^{jh} + \Gamma^h_{ki} + g_{ij}\frac{\partial g^{jh}}{\partial x^k} = 0$$

更に g^{ji} をかけると

$$\frac{\partial g^{jh}}{\partial x^k} + \Gamma^j_{kt}g^{th} + \Gamma^h_{kt}g^{jt} = 0 \tag{S.4}$$

が得られる．これは既にまとめ 1 で導入した共変微分法を考えるなら計量テンソル g^{jh} の共変微分係数であり，つまり

$$g^{jh}{}_{;k} = \frac{\partial g^{jh}}{\partial x^k} + \Gamma^j_{kt}g^{th} + \Gamma^h_{kt}g^{jt} = 0 \tag{S.5}$$

を意味しており，後に使う公式が導出された．なお，矢野での共変微分演算記号は ∇_j であり，クリストッフェル記号は $\left\{ {i \atop j\,k} \right\}$ を使用している．

2．クリストッフェル記号の座標変換

座標系 (x^h) での測地線の方程式は (S.1) 式，つまり

$$\frac{\mathrm{d}^2x^h}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^h_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{S.6}$$

である．同様に座標系 $(x^{h'})$ では

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{h'}}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{h'}_{i'j'}\frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{j'}}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{S.7}$$

と書かれる．ただし

$$x^{h'} = A^{h'}_h x^h \left(= \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h}x^h \right). \tag{S.8}$$

ところで，逆変換ではあるが

$$\frac{\mathrm{d}x^h}{\mathrm{d}s} = A^h_{h'}\frac{\mathrm{d}x^{h'}}{\mathrm{d}s}, \quad \frac{\mathrm{d}^2x^h}{\mathrm{d}s^2} = A^h_{h'}\frac{\mathrm{d}^2x^{h'}}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\partial A^h_{j'}}{\partial x^{i'}}\frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{j'}}{\mathrm{d}s}$$

これを (S.6) 式に代入し，さらに (S.7) を利用すると

$$-A^h_{h'}\Gamma^{h'}_{i'j'}\frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{j'}}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial A^h_{j'}}{\partial x^{i'}}\frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{j'}}{\mathrm{d}s}+\Gamma^h_{ij}A^i_{i'}A^j_{j'}\frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{j'}}{\mathrm{d}s}=0,$$

となるが，すなわち

$$\left[A^h_{h'}\Gamma^{h'}_{i'j'}-\Gamma^h_{ij}A^i_{i'}A^j_{j'}-\frac{\partial A^h_{j'}}{\partial x^{i'}}\right]\frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{j'}}{\mathrm{d}s}=0,$$

を得る．したがって

$$A^h_{h'}\Gamma^{h'}_{i'j'}=A^i_{i'}A^j_{j'}\Gamma^h_{ij}+\frac{\partial A^h_{j'}}{\partial x^{i'}} \tag{S.9}$$

もしくは

$$\Gamma^{h'}_{i'j'}=A^{h'}_hA^i_{i'}A^j_{j'}\Gamma^h_{ij}+A^{h'}_h\frac{\partial A^h_{j'}}{\partial x^{i'}} \tag{S.10}$$

なる変換則を得る．この変換則から Γ^h_{ij} がテンソルの変換則とは異なることがわかる．

後で行われる Einstein-Hamilton 作用の変分を行う場合，この記号の変分もとられる．変分とは 1 点における変分量の変化（もしくは差）であるから，(S.10) をみても分かるようにクリストッフェル記号の変分は（1 階反変，2 階共変の）テンソル量となる．

$$\overline{\Gamma}^{h'}_{i'j'}=A^{h'}_hA^i_{i'}A^j_{j'}\overline{\Gamma}^h_{ij}+A^{h'}_h\frac{\partial A^h_{j'}}{\partial x^{i'}}$$

とすると

$$\delta\Gamma^{h'}_{i'j'}=\overline{\Gamma}^{h'}_{i'j'}-\Gamma^{h'}_{i'j'}=A^{h'}_hA^i_{i'}A^j_{j'}(\overline{\Gamma}^h_{ij}-\Gamma^h_{ij})=A^{h'}_hA^i_{i'}A^j_{j'}\delta\Gamma^h_{ij}$$

となるからである．つまり

3. テンソル密度とその共変微分法

テンソル密度に関する定義等の情報は多くの参考書にあるので省略する．また矢野はテンソル密度と言う用語ではなく相対テンソル（双対では無い）という用語を使用しているが，ここでは一般的なテンソル密度という用語を使用する．

以下，矢野著「相対性理論」におけるテンソル密度の定義を忠実に引用する（ただし同著では式番号と Det(A) は使用していない）．

テンソル密度の定義

座標系 (x) では 4^3 個の量 $\mathfrak{T}_{ji}{}^h$ で表現され，座標系 (x) と

$$x^{h'} = A^{h'}_h x^h \qquad \alpha = |A^{h'}_h| \equiv \mathrm{Det}(A) \neq 0 \tag{S.11}$$

で結ばれた任意の座標系 (x') では 4^3 個の量 $\mathfrak{T}_{j'i'}{}^{h'}$ で表現される幾何学的または物理学的対象であって，それを表現する量 $\mathfrak{T}_{ji}{}^h$，$\mathfrak{T}_{j'i'}{}^{h'}$ が

$$\mathfrak{T}_{j'i'}{}^{h'} = \alpha^{-p} A^j_{j'} A^i_{i'} A^{h'}_h \mathfrak{T}_{ji}{}^h \tag{S.12}$$

で結ばれているものを，重さ p の 2 次の共変，1 次の反変相対テンソル，またはテンソル密度といい，$\mathfrak{T}_{ji}{}^h$，$\mathfrak{T}_{ji}{}^h$，$\mathfrak{T}_{j'i'}{}^{h'}$ をそれぞれ，この相対テンソルの座標系 (x)，(x') に関する成分とよぶ[1]．

以上

例題 1

計量テンソル g_{ij} から作った行列式を $\mathfrak{g} = \mathrm{Det}(g) = |g_{ij}|$ とする．g_{ij} の座標変換式

$$g_{i'j'}(x') = A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij}(x)$$

であるから

$$\mathfrak{g}'(x') = \mathrm{Det}(g'(x')) = |A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij}(x)|$$

$$= \mathrm{Det}(A^{-1}) \cdot \mathrm{Det}(A^{-1}) \cdot \mathrm{Det}(g(x)) = \alpha^{-2} \mathfrak{g}(x)$$

を得る．相対性理論では $\mathfrak{g} < 0$ であるから，上の式は

$$\sqrt{-\mathfrak{g}'(x')} = \alpha^{-1} \sqrt{-\mathfrak{g}(x)}$$

よって，$\sqrt{-\mathfrak{g}}$ は重さ 1 のスカラー密度である．なお，α^{-1} は Jacobi 行列式の逆であり

$$\alpha^{-1} = \left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right| \equiv \alpha'$$

と書くこともできる．

テンソル密度の共変微分法（矢野 p.135）

いま，$\mathfrak{T}^h_i$ を重さ p のテンソル密度とする．このときテンソル密度の共変微分係数は

$$\mathfrak{T}^h_{i;j} = \frac{\partial \mathfrak{T}^h_i}{\partial x^j} - \Gamma^r_{ji} \mathfrak{T}^h_r + \Gamma^h_{jr} \mathfrak{T}^r_i - p \Gamma^r_{jr} \mathfrak{T}^h_i \tag{S.13}$$

[1] 伊藤注：念のため．定義式で α^{-p} が現れているのは α の定義式に対して $\alpha^{-1} \equiv |A^h_{h'}| = \mathrm{Det}(A^{-1})$ とした．

例題 2
上の演算を重さ 1 のスカラー密度 $\sqrt{-\mathfrak{g}}$ にあてはめると

$$(\sqrt{-\mathfrak{g}})_{;j} = \frac{\partial\sqrt{-\mathfrak{g}}}{\partial x^j} - \Gamma^r_{jr}\sqrt{-\mathfrak{g}} \tag{S.14}$$

となる．ここで

$$\Gamma^r_{jr} = \frac{1}{2}g^{rt}\frac{\partial g_{rt}}{\partial x^j}$$

であり，要素 g_{rt} の余因数は $\mathfrak{g}g^{rt}$ であるから

$$\frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial x^j} = \mathfrak{g}g^{rt}\frac{\partial g_{rt}}{\partial x^j}$$

となり，$\mathfrak{g} < 0$ に注意し

$$\Gamma^r_{jr} = \frac{\partial\log\sqrt{-\mathfrak{g}}}{\partial x^j} \tag{S.15}$$

と書くことができる．よって，これを (S.14) に代入することで

$$(\sqrt{-\mathfrak{g}})_{;j} = 0 \tag{S.16}$$

を得る．

4. Einstein-Hamilton 作用の変分

まず，まとめ 1 との関連からはじめ，曲率テンソルを縮約する．

$$R_{km} = g^{i\ell}R_{ik\ell m} = R^\ell_{k\ell m} = R^\ell_{km\ell} \tag{S.17}$$

この式の最右辺では (M.10) 式より ℓ, m について対称であることを使った．
同様に (M.10) 式より

$$R_{km} = R^\ell_{k\ell m} = \frac{\partial\Gamma^\ell_{k\ell}}{\partial x^m} - \frac{\partial\Gamma^\ell_{km}}{\partial x^\ell} + \Gamma^r_{k\ell}\Gamma^\ell_{rm} - \Gamma^r_{km}\Gamma^\ell_{r\ell}$$

となるが，(S.15) より

$$\frac{\partial\Gamma^\ell_{k\ell}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2\log\sqrt{-\mathfrak{g}}}{\partial x^m\partial x^k}$$

により

$$R_{km} = R_{mk} \tag{S.18}$$

と k, m について対称になる．

更に縮約すると，スカラー曲率が得られる：

$$R = g^{mk} R_{km} = g^{mk} R^{\ell}_{km\ell}. \tag{S.19}$$

本文第 6 章 (6.4.8) で得られた不変量は

$$F = \int \mathrm{d}\tau g^{\mu\nu} R^{\tau}{}_{\mu\nu\tau} \sqrt{-\mathrm{Det} g_{\mu\nu}} \tag{6.4.8}$$

であった．これを係数等を略し，また添字をアルファベットにして書き換えると

$$F = \int R\sqrt{-\mathfrak{g}}\mathrm{d}\tau \tag{S.20}$$

であり，これが Einstein-Hilbert 作用である．

計量テンソル g^{km} が重力を表しているとすると，作用の中の重力 g^{km} を変分することで重力場の方程式が得られるはずである．作用 (S.20) 式は g^{km} が隠れてしまったので

$$F = \int g^{km} R_{km} \sqrt{-\mathfrak{g}}\mathrm{d}\tau \tag{S.21}$$

とひとつ元に戻し，これを g^{km} について変分すると

$$\delta F = \delta \int g^{km} R_{km} \sqrt{-\mathfrak{g}}\mathrm{d}\tau$$

$$= \int (\delta g^{km}) R_{km} \sqrt{-\mathfrak{g}}\mathrm{d}\tau + \int g^{km} (\delta R_{km}) \sqrt{-\mathfrak{g}}\mathrm{d}\tau + \int g^{km} R_{km} (\delta\sqrt{-\mathfrak{g}})\mathrm{d}\tau \tag{S.22}$$

を得る．この右辺最後の項の変分は

$$\delta\sqrt{-\mathfrak{g}} = -\frac{1}{2\sqrt{-\mathfrak{g}}}\delta\mathfrak{g} = -\frac{1}{2\sqrt{-\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} g_{km}\delta g^{km} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\mathfrak{g}} g_{km}\delta g^{km}$$

である．ここで途中 (S.15) を導く際に使用した，要素と余因数の関係を使った．よって，これと (S.22) 右辺第 1 項をまとめると

$$\delta F = \int \left(R_{km} - \frac{1}{2} g_{km} R \right) (\delta g^{km}) \sqrt{-\mathfrak{g}}\mathrm{d}\tau + \int g^{km} (\delta R_{km}) \sqrt{-\mathfrak{g}}\mathrm{d}\tau \tag{S.23}$$

が得られる．

残るは δR_{km} であるが上記C．メラーやランダウは与えられた点が慣性系内の点であるとして，つまりすべての $\Gamma^{i}_{k\ell} = 0$ として計算を簡略化している．しかし，矢野や後述の内山はこの仮定を外して若干面倒な計算をしている．ここでもそれにならった．

矢野は単位テンソル δ_i^ℓ を導入し，まず

$$R_{km} = \delta_i^\ell R^i_{k\ell m} \tag{S.24}$$

とする．よって

$$\delta R_{km} = \delta(\delta_i^\ell R^i_{k\ell m}) = \delta_i^\ell(\delta R^i_{k\ell m}) \tag{S.25}$$

として，$R^i_{k\ell m}$ 内の g^{ir} に対し変分を行う．ただし，ここでは変分 δg^{ir} に対して，すなわち δg^{ir} という変化に対し，クリストッフェル記号も $\delta\Gamma$ と変化したと考え，変分は $\delta\Gamma$ の形で行われる（内山龍雄著　物理学選書 15「一般相対性理論」裳華房 1978 年，127 頁より）．

$$\delta R^i_{k\ell m} = \delta\left(\frac{\partial\Gamma^i_{k\ell}}{\partial x^m} - \frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^\ell} + \Gamma^r_{k\ell}\Gamma^i_{rm} - \Gamma^r_{km}\Gamma^i_{r\ell}\right)$$

$$= \frac{\partial\delta\Gamma^i_{k\ell}}{\partial x^m} - \frac{\partial\delta\Gamma^i_{km}}{\partial x^\ell} + \delta\Gamma^r_{k\ell}\Gamma^i_{rm} + \Gamma^r_{k\ell}\delta\Gamma^i_{rm} - \delta\Gamma^r_{km}\Gamma^i_{r\ell} - \Gamma^r_{km}\delta\Gamma^i_{r\ell}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial\delta\Gamma^i_{k\ell}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{rm}\delta\Gamma^r_{k\ell} - \Gamma^r_{\ell m}\delta\Gamma^i_{kr} - \Gamma^r_{km}\delta\Gamma^i_{r\ell} \\ &\quad - \frac{\partial\delta\Gamma^i_{km}}{\partial x^\ell} - \Gamma^i_{r\ell}\delta\Gamma^r_{km} + \Gamma^r_{\ell m}\delta\Gamma^i_{kr} + \Gamma^r_{k\ell}\delta\Gamma^i_{rm} \end{aligned} \tag{S.26}$$

ここで，途中 $-\Gamma^r_{\ell m}\delta\Gamma^i_{kr} + \Gamma^r_{\ell m}\delta\Gamma^i_{kr} = 0$ を補った．(S.10) 式の後段でもふれたように，$\delta\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ はテンソルであるので，(S.26) 式はテンソルの共変微分係数の形で

$$\delta R^i_{k\ell m} = (\delta\Gamma^i_{k\ell})_{;m} - (\delta\Gamma^i_{km})_{;\ell} \tag{S.27}$$

と書ける．これを (S.25) 式に戻し

$$\delta R_{km} = \delta\Gamma^\ell_{k\ell})_{;m} - (\delta\Gamma^\ell_{km})_{;\ell}$$

とし，さらにこれを (S.23) 式の右辺第 2 項へ戻すと

$$\int g^{km}\left[(\delta\Gamma^\ell_{k\ell})_{;m} - (\delta\Gamma^\ell_{km})_{;\ell}\right]\sqrt{-\mathfrak{g}}\,\mathrm{d}\tau \tag{S.28}$$

となる．また (S.5)，(S.16) 式より

$$(\sqrt{-\mathfrak{g}}g^{km})_{;\ell} = (\sqrt{-\mathfrak{g}})_{;\ell}g^{km} + \sqrt{-\mathfrak{g}}(g^{km})_{;\ell} = 0$$

であるから

$$\int\left[(\sqrt{-\mathfrak{g}}g^{km}\delta\Gamma^\ell_{k\ell})_{;m} - (\sqrt{-\mathfrak{g}}g^{km}\delta\Gamma^\ell_{km})_{;\ell}\right]\mathrm{d}\tau \tag{S.29}$$

と書くことができる．ところが $\delta\Gamma^\ell_{k\ell}$ 等はテンソルであるから

$$\sqrt{-\mathfrak{g}}g^{km}\delta\Gamma^\ell_{k\ell}, \qquad \sqrt{-\mathfrak{g}}g^{km}\delta\Gamma^\ell_{km}$$

は重さ 1 の反変ベクトル密度で

$$\mathfrak{A}^m = \sqrt{-\mathfrak{g}}g^{km}\delta\Gamma^{\ell}_{k\ell}, \qquad \mathfrak{B}^{\ell} = \sqrt{-\mathfrak{g}}g^{km}\delta\Gamma^{\ell}_{km} \tag{S.30}$$

と書けるので，(S.29) 式は

$$\int \left[(\mathfrak{A}^m)_{;m} - (\mathfrak{B}^{\ell})_{;\ell} \right] \mathrm{d}\tau$$

の形にできる．$\mathfrak{A}^m$ と $\mathfrak{B}^{\ell}$ は重さ 1 の反変ベクトル密度であることに注意し，その共変微分法 (S.13) によれば

$$\int \left[\frac{\partial \mathfrak{A}^m}{\partial x^m} - \frac{\partial \mathfrak{B}^{\ell}}{\partial x^{\ell}} \right] \mathrm{d}\tau \tag{S.31}$$

となる．したがってストークスの定理により境界上の積分に直せば，境界上で $\delta\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot} = 0$ であるから，(S.31) はゼロとなり，結局は (S.23) の右辺最後の項はゼロとなる．したがって

$$\delta F = \int \left(R_{km} - \frac{1}{2}g_{km}R \right) (\delta g^{km})\sqrt{-\mathfrak{g}}\mathrm{d}\tau = 0$$

つまり,（質量の存在しない）場の方程式

$$R_{km} - \frac{1}{2}g_{km}R = 0 \tag{S.32}$$

を得る．

補．テンソル密度の共変微分法

テンソル密度の共変微分法の結果のみを (S.13) に示した．しかしその導出も必要と思い再度立ち返ることとした．

座標変換が (S.11) で与えられるとき，$\mathfrak{T}^h_i$ を重さ p のテンソル密度とすると，その変換則は

$$\mathfrak{T}^{h'}_{i'} = \alpha'^p A^i_{i'} A^{h'}_h \mathfrak{T}^h_i$$

であり，$\alpha^{-1} = \alpha'$ である．この両辺の微分をとると

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathfrak{T}^{h'}_{i'} &= \alpha'^p A^i_{i'} A^{h'}_h \mathrm{d}\mathfrak{T}^h_i + \alpha'^p \frac{\partial A^r_{i'}}{\partial x^{j'}} \mathrm{d}x^{j'} A^{h'}_h \mathfrak{T}^h_r \\
&+ \alpha'^p A^i_{i'} \frac{\partial A^{h'}_r}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \mathfrak{T}^r_i + \frac{\partial \alpha'^p}{\partial x^{j'}} \mathrm{d}x^{j'} A^i_{i'} A^{h'}_h \mathrm{d}\mathfrak{T}^h_i,
\end{aligned} \tag{S.33}$$

となる．なお

$$\alpha'^p \frac{\partial A^r_{i'}}{\partial x^{j'}} \mathrm{d}x^{j'} A^{h'}_h \mathfrak{T}^h_r = \alpha'^p \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \left(\frac{\partial x^r}{\partial x^{i'}} \right) \mathrm{d}x^{j'} A^{h'}_h \mathfrak{T}^h_r = \alpha'^p \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \mathrm{d}x^{j'} A^{h'}_h \mathfrak{T}^h_r$$

$$\alpha'^p A^i_{i'} \frac{\partial A^{h'}_r}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \mathfrak{T}^r_i = \alpha'^p A^i_{i'} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^{h'}}{\partial x^r} \right) \mathrm{d}x^j \mathfrak{T}^r_i = \alpha'^p A^i_{i'} \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^j \partial x^r} \mathrm{d}x^j \mathfrak{T}^r_i$$

となるように微分演算を実行している．

さて，クリストッフェル記号の座標変換式 (S.9) 式とその逆変換の式から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A^r_{i'}}{\partial x^{j'}} &= A^r_{r'} \Gamma^{r'}_{j'i'} - A^i_{i'} A^j_{j'} \Gamma^r_{ij}, \\ \frac{\partial A^{h'}_r}{\partial x^j} &= A^{h'}_h \Gamma^h_{jr} - A^{j'}_j A^{r'}_r \Gamma^{h'}_{j'r'}, \end{aligned} \right\} \tag{S.9'}$$

と表すことができる．また例題 1 で導出した $\sqrt{-\mathfrak{g}}$ に関する式で

$$\sqrt{-\mathfrak{g}'} = \alpha' \sqrt{-\mathfrak{g}}, \qquad \left(\alpha' = \left| \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \right| \right)$$

の対数をとると

$$\log \sqrt{-\mathfrak{g}'} = \log \sqrt{-\mathfrak{g}} + \log \alpha'$$

さらにこの式を $x^{j'}$ で微分すると

$$\frac{\partial \log \sqrt{-\mathfrak{g}'}}{\partial x^{j'}} = A^j_{j'} \frac{\partial \log \sqrt{-\mathfrak{g}}}{\partial x^j} + \frac{\partial \log \alpha'}{\partial x^{j'}}$$

を得る．(S.15) を使って

$$\Gamma^{t'}_{j't'} = A^j_{j'} \Gamma^t_{jt} + \frac{\partial \log \alpha'}{\partial x^{j'}},$$

すなわち

$$\frac{\partial \log \alpha'}{\partial x^{j'}} = \Gamma^{t'}_{j't'} - A^j_{j'} \Gamma^t_{jt} \tag{S.34}$$

を得る．よって (S.9') と (S.34) 式を (S.33) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathfrak{T}^{h'}_{i'} = \alpha'^p A^i_{i'} A^{h'}_h \mathrm{d}\mathfrak{T}^h_i &+ \alpha'^p \left[A^r_{r'} \Gamma^{r'}_{j'i'} - A^i_{i'} A^j_{j'} \Gamma^r_{ij} \right] \mathrm{d}x^{j'} A^{h'}_h \mathfrak{T}^h_r \\ &+ \alpha'^p A^i_{i'} \left[A^{h'}_h \Gamma^h_{jr} - A^{j'}_j A^{r'}_r \Gamma^{h'}_{j'r'} \right] \mathrm{d}x^j \mathfrak{T}^r_i \\ &+ p\alpha'^p \left[\Gamma^{t'}_{j't'} - A^j_{j'} \Gamma^t_{jt} \right] \mathrm{d}x^{j'} A^i_{i'} A^{h'}_h \mathrm{d}\mathfrak{T}^h_i, \end{aligned}$$

となる．

したがって

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\mathfrak{T}^{h'}_{i'} - \Gamma^{r'}_{j'i'}\mathrm{d}x^{j'}\mathfrak{T}^{h'}_{r'} + \Gamma^{h'}_{j'r'}\mathrm{d}x^{j'}\mathfrak{T}^{r'}_{i'} - p\Gamma^{t'}_{j't'}\mathrm{d}x^{j'}\mathfrak{T}^{h'}_{i'} \\
&= \alpha'^{p} A^{i}_{i'} A^{h'}_{h} \left(\mathrm{d}\mathfrak{T}^{h}_{i} - \Gamma^{r}_{ji}\mathrm{d}x^{j}\mathfrak{T}^{h}_{r} + \Gamma^{h}_{jr}\mathrm{d}x^{j}\mathfrak{T}^{r}_{i} - p\Gamma^{t}_{jt}\mathrm{d}x^{j}\mathfrak{T}^{h}_{i}\right) \qquad \text{(S.35)}
\end{aligned}
$$

を得る．この式は $\mathfrak{T}^{h}_{i}$ が重さ p のテンソル密度の成分ならば

$$
\delta\mathfrak{T}^{h}_{i} = \mathrm{d}\mathfrak{T}^{h}_{i} - \Gamma^{r}_{ji}\mathrm{d}x^{j}\mathfrak{T}^{h}_{r} + \Gamma^{h}_{jr}\mathrm{d}x^{j}\mathfrak{T}^{r}_{i} - p\Gamma^{t}_{jt}\mathrm{d}x^{j}\mathfrak{T}^{h}_{i}
$$

もまた重さ p のテンソル密度の成分であることを示している．これをテンソル密度の共変微分とよぶ．よってテンソル密度の共変微分係数は $\mathfrak{T}^{h}_{i}$ と重さが同じで共変指数が 1 つ多い

$$
\mathfrak{T}^{h}{}_{i;j} = \frac{\partial\mathfrak{T}^{h}_{i}}{\partial x^{j}} - \Gamma^{r}_{ji}\mathfrak{T}^{h}_{r} + \Gamma^{h}_{jr}\mathfrak{T}^{r}_{i} - p\Gamma^{t}_{jt}\mathfrak{T}^{h}_{i} \qquad \text{(S.36)}
$$

となる．

付録B　量子重力

ブライアン・ハットフィールド

ファインマンは最初，紫外発散および繰り込み可能性の問題を無視し，後になって初めてこれらの問題に戻った．結局，繰り込み可能な定式がなかったため，摂動的量子重力論を放棄することにはなった．

幾何学と量子場の理論との関係

このアプローチの実用的利点は，重力を研究するのに最初に（ファインマンによれば）「気紛れで感傷的な」微分幾何を学ぶ必要がなくなることである．（その代わりに場の量子論「さえ」学べばよい．）重力の量子化を最終目標としているとき，幾何学的解釈は邪魔であるとファインマンは考えた．場の理論的な観点からは，量子幾何とかトポロジー揺らぎとか時空の泡などの物理的意味を最初から定義する必要は無く，量子化した後で幾何学的意味を探せばよい．

重力子のスピンと反重力

重力理論の場の理論的展開をすることの利点の一つは，完全に首尾一貫した一般共変な理論から出発しなくとも，つまり一般共変性という原理を持ち出さなくとも，重力子の質量はゼロでスピンは 2 であることが保証できることである．これは重力理論を幾何学的枠組みを使って上から構築するのではなく，下から構築するようなものである．

散乱ではなく静的な力（すなわち引力）を生み出すには，1 つの重力子の放出または吸収が起きるとき，それを放出または吸収した粒子の内部状態が不変でなければならない．これにより，重力子が半整数スピンをもつ可能性が排除される（たとえば，スピン 1/2 の波動関数を回転させて元に戻すには 720 度回転させなければならないという事実に関係する）．

したがって，重力子のスピンは整数でなければならない．次にどの整数が可能かを判断するために，粒子 2 が粒子 1 と同一の場合と，粒子 2 が粒子 1 の反粒子である場合を考える．つまり互いのチャージが同じ場合と逆の場合である．ポテンシャルを計算し，適切な極限を考えると，電気力学でのように交換される粒子のスピンが奇数の場合は同種のチャージは反発し，異種のチャージは引き付けあう．

一方，交換される粒子が整数スピン[2]をもつ場合には，ポテンシャルは常に引力となる（同種のチャージも異種のチャージも引き付けあう）．したがって，重力子のスピンは 0,2,4, $\cdots$ でなければならない．

次にスピン 0 の可能性を排除するために，エートベッシュの実験およびその最近の精密化に着目する．それによれば重力は物体のエネルギーに結合し，したがって光子のようなものでも重力の影響を受け，重力場中で落下する．もし交換される粒子のスピンが 0 だとすると，スピン 1 の光子が重力に結合しなくなる．光が太陽など重い物体によって曲がることは分かっているので，重力子のスピンが 0 ではありえない．
場の理論の表現を使うと，粒子 1 と粒子 2 の間で交換される粒子の伝播を表すグリーン関数は，運動量空間では

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Delta}_0 &\sim \frac{1}{k^2}, && \text{スカラー場}, \\
\mathit{\Delta}_1 &\sim \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2}, && \text{ベクトル場}, \\
\mathit{\Delta}_2 &\sim \frac{\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}}{k^2}, && \text{テンソル場},
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

k^2 は相互作用で交換される仮想粒子がもつ 4 元運動量の 2 乗であり，$\eta_{\mu\nu}$ は平坦なミンコフスキー時空の計量である．スカラー場はスピン 0，ベクトル場はスピン 1，そしてテンソル場の適切に射影されたスピンは 2 である．

交換による振幅を計算するには伝播関数 $\mathit{\Delta}$ を，2 つの粒子のエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}(1)$ と $T^{\alpha\beta}(2)$ ではさむ．スピン 0 の粒子の交換の場合，伝播関数 $\mathit{\Delta}_0$ は分子に $T^{\mu\nu}(1)$ と $T^{\alpha\beta}(2)$ の添え字を縮約する因子 $\eta_{\mu\nu}$ をもたないので，それぞれのエネルギー運動量テンソルの 2 つの添え字を内部で縮約しなければならない．

つまり，スピン 0 の粒子の交換の場合の振幅は

$$
T^{\mu}_{\mu}(1)\frac{1}{k^2}T^{\alpha}_{\alpha}(2) \tag{B.3}
$$

に比例する．すなわちスピン 0 の重力子はエネルギー運動量テンソルのトレースに結合する．しかし，ミンコフスキー時空の電磁場のエネルギー

[2] 伊藤注：上で奇数スピンは重力の性質を表さないとしているので，ここでは偶数スピンとした方が適切であろう．

運動量テンソル[3] のトレースは 0 なので，スカラーの重力場では重力と光子を結合させせることはできず，したがって重力子のスピンは 0 ではありえない．

まとめると，重力は長距離力なので重力子の質量はゼロであり，物質のエネルギーに常に引力として結合するのでスピンは 2 である．

残念ながら，摂動論はうまくいかず，首尾一貫した量子重力を求めて多くの労力が費やされた．量子重力の低エネルギー，長距離そして弱場の極限は一般相対性理論となると期待されるが，整合性を得るには自然は，非常に短距離で物質と反物質の重力の違いを必要としているのかもしれない．そのような効果の大きさは現在の実験の限界以下であり，反重力を否定する論理を回避することはできるかもしれないが，もちろん，何かが「上に向かって落ちる」ことを意味することではない．

[3]伊藤注：電磁場のエネルギー運動量テンソルは Maxwell の方程式より計算され

$$
\begin{aligned}
T^{11} &= (H_x^2 - H_y^2 - H_z^2)/2 + (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)/2 = p_{xx}, \\
T^{22} &= (-H_x^2 + H_y^2 - H_z^2)/2 + (-E_x^2 + E_y^2 - E_z^2)/2 = p_{yy}, \\
T^{33} &= (-H_x^2 - H_y^2 + H_z^2)/2 + (-E_x^2 - E_y^2 + E_z^2)/2 = p_{zz}, \\
T^{44} &= -(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2)/2 - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)/2
\end{aligned}
$$