Kerr 解の導出

備忘録作成：伊藤榮信

2024 年 6 月 18 日

物理学選書 15 内山龍雄著一般相対性理論（裳華房，1978）—第 7 章 Einstein 方程式の厳密解 § 44 回転している物体の作る重力場，Kerr 解—に Kerr 解の導出が記されている．本には Adler, Bazin, Schiffer 著の Introduction to General Relativity(MacGraw - Hill, 2nd Ed.1975) 第 7 章 Kerr 解を参考にしたと記されている．よって，どちらに従い備忘録を作成しようかと悩んだ末，Adler 等の書を選択した．理由はベクトル記号の書き方（内山著：$\vec{\lambda}$，Adler： $\boldsymbol{\lambda}$）というどうでもよい理由と，どうせなら原典という理由からである．この解法には Killing ベクトルという言葉は現れないが，その言い換えともいえる時空の定常性は仮定される．

開始したのが 2024 年 5 月 25 日で，最終解が得られたセクション 7.5 が終了したのが 6 月 13 日である．この間約 3 週間であった．著作権などを考えるとセクション 7.7 以降は割愛せざるを得ない．

以下，馬鹿げたところもあるが，とにかく**すべての式の導出を記した**．なお計算を面倒にする誤植がセクション 7.5 に二カ所，一つは Kerr 解のクロスタームの正負で次のセクションでの計算に影響を与える．セクション 7.6 にも一つある．　注：Adler は Ronald J. Adler

1　シュワルツシルド解のエディントン形式

Schwarzschild 解を以下の座標変換を使って Eddinton の形式にする：

$$\overline{x}^0 = x^0 + 2m\log\left|\frac{r}{2m} - 1\right|, \quad \overline{r} = r, \quad \overline{\theta} = \theta, \quad \overline{\phi} = \phi, \tag{7.1}$$

変換の結果，次の Eddinton 形式を得る．

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - (\mathrm{d}\overline{r})^2 - \overline{r}^2(\mathrm{d}\overline{\theta}^2 + \sin^2\overline{\theta}\mathrm{d}\overline{\phi}^2) - \frac{2m}{\overline{r}}(\mathrm{d}\overline{x}^0 + \mathrm{d}\overline{r})^2, \tag{7.2}$$

導出

以下，$\overline{x}^0$ 以外の上のバーは省略する．また，m は質量と考えるのではなく単なる変換に含まれたパラメータと考える．

先ずは，この式の導出を行う：時間座標の微分を作り，移項する．

$$\mathrm{d}x^0 = \mathrm{d}\overline{x}^0 - \frac{2m}{r-2m}\mathrm{d}r \tag{1}$$

その他を略．これらを Schwarzschild 解の線素に代入する．時間項は

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[(\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - 2\frac{2m}{r-2m}\mathrm{d}\overline{x}^0\mathrm{d}r + \frac{4m^2}{(r-2m)^2}(\mathrm{d}r)^2\right]$$

$$= (\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - \frac{2m}{r}(\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - \frac{r-2m}{r}\left[2\frac{2m}{r-2m}\mathrm{d}\overline{x}^0\mathrm{d}r - \frac{4m^2}{(r-2m)^2}(\mathrm{d}r)^2\right]$$

$$= (\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - \frac{2m}{r}(\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - \left[2\frac{2m}{r}\mathrm{d}\overline{x}^0\mathrm{d}r - \frac{4m^2}{r(r-2m)}(\mathrm{d}r)^2\right] \tag{2}$$

次に動径項は

$$-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}(\mathrm{d}r)^2 = \frac{r}{r-2m}(\mathrm{d}r)^2 = -\frac{r-2m+2m}{r-2m}(\mathrm{d}r)^2$$

$$= -(\mathrm{d}r)^2 - \frac{2m}{r-2m}(\mathrm{d}r)^2$$

$$= -(\mathrm{d}r)^2 - \frac{2m}{r-2m}(\mathrm{d}r)^2 \tag{3}$$

となる．ここで (2) の最後の項と上の式の第 2 項の $(\mathrm{d}r)^2$ の項をまとめる計算を行う．

$$+\frac{4m^2}{r(r-2m)}(\mathrm{d}r)^2 - \frac{2m}{r-2m}(\mathrm{d}r)^2 = \frac{2m}{r}\left(\frac{2m}{r-2m} - \frac{r}{r-2m}\right)(\mathrm{d}r)^2$$

$$= -\frac{2m}{r}(\mathrm{d}r)^2 \tag{4}$$

よって，(2)，(3)，(4) より

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)(\mathrm{d}x^0)^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}(\mathrm{d}r)^2$$

$$= (\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - (\mathrm{d}r)^2 - \frac{2m}{r}(\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - 2\frac{2m}{r}\mathrm{d}\overline{x}^0\mathrm{d}r - \frac{2m}{r}(\mathrm{d}r)^2$$

$$= (\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - (\mathrm{d}r)^2 - \frac{2m}{r}(\mathrm{d}\overline{x}^0 + \mathrm{d}r)^2 \tag{5}$$

θ, ϕ の項は変換前後で同じである．

さて，(7.2) を直交座標系で表すと

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - (\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 - \frac{2m}{r}\left(\mathrm{d}\overline{x}^0 + \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{r}\right)^2, \tag{7.3}$$

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

この直交座標系での計量テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2m\ell_\mu\ell_\nu, \tag{7.4a}$$

$$\ell_\mu = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(1, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right), \tag{7.4b}$$

である．$\eta_{\mu\nu}$ は Lorentz 計量で $\ell_\mu\ell_\nu\eta^{\mu\nu} = 0$ である．

確認

式 (7.4) を確かめておく．そのためには (7.3) の右辺第 3 項の 2 乗を展開するだけで十分である．

$$-\frac{2m}{r}\left(\mathrm{d}\overline{x}^0 + \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{r}\right)^2$$

$$= -\frac{2m}{r}\left[(\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 + 2\frac{x\mathrm{d}\overline{x}^0\mathrm{d}x + y\mathrm{d}\overline{x}^0\mathrm{d}y + z\mathrm{d}\overline{x}^0\mathrm{d}z}{r} + \frac{1}{r^2}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)^2\right]$$

$$= -\frac{2m}{r}(\mathrm{d}\overline{x}^0)^2 - \frac{2mx^2}{r^3}(\mathrm{d}x)^2 - \frac{2my^2}{r^3}(\mathrm{d}y)^2 - \frac{2mz^2}{r^3}(\mathrm{d}z)^2$$

$$-\frac{2m}{r^2}\left[x(\mathrm{d}\overline{x}^0\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}\overline{x}^0) + y(\mathrm{d}\overline{x}^0\mathrm{d}y + \mathrm{d}y\mathrm{d}\overline{x}^0) + z(\mathrm{d}\overline{x}^0\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}\overline{x}^0)\right]$$

$$-\frac{2m}{r^3}\left[xy(\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y\mathrm{d}x) + yz(\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}y) + zx(\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}z)\right]$$

これらの形から

$$g_{ij} = \eta_{ij} - \frac{2m}{r}\left(\frac{x_i}{r}\right)\left(\frac{x_j}{r}\right), \qquad x_1 = x,\ \ x_2 = y,\ \ x_3 = z$$

という形になっていることが分かる．ただし η_{ij} は (7.3) での $(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ からでる．

□

(7.4a) の形の計量を縮退した (degenerate) 計量を呼ぶ．

2　縮退した計量に対する Einstein 方程式

計量

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2m\ell_\mu\ell_\nu, \qquad \ell_\mu\ell_\nu\eta^{\mu\nu} = 0, \qquad m\text{: 任意の定数}, \tag{7.5}$$

m は任意の定数であり質量ではない．縮退した計量は特徴的な性質を持っている．上付きの指標で表した対象

$$\ell^\alpha \equiv \eta^{\alpha\tau}\ell_\tau, \tag{7.6}$$

を定義する．

反変計量テンソルは

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + 2m\ell^\mu\ell^\nu. \tag{7.7}$$

確認

(7.7) の確認：

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\mu} = (\eta^{\mu\nu} + 2m\ell^\mu\ell^\nu)(\eta_{\nu\mu} - 2m\ell_\nu\ell_\mu)$$

$$= \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\mu} + 2m\ell^\mu\ell^\nu\eta_{\nu\mu} - 2m\eta^{\mu\nu}\ell_\nu\ell_\mu - 4m^2\ell^\mu\ell^\nu\ell_\nu\ell_\mu$$

$$= \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\mu} + 2m\ell^\mu\ell_\mu - 2m\ell^\mu\ell_\mu - 4m^2\ell^\mu(\ell^\nu\ell_\nu)\ell_\mu = \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\mu}$$

ここで $\ell^\mu\ell_\mu = 0$ を使った．

$$\ell^\alpha = g^{\alpha\tau}\ell_\tau = \eta^{\alpha\tau}\ell_\tau. \tag{7.8}$$

$$\ell^\alpha\partial_\tau\ell_\alpha = \ell_\alpha\partial_\tau\ell^\alpha = \frac{1}{2}\partial_\tau\left(\eta^{\mu\nu}\ell_\mu\ell_\nu\right) = 0, \tag{7.9}$$

確認　(7.9) の $1/2$ の確認：

$$\partial_\tau\left(\eta^{\mu\nu}\ell_\mu\ell_\nu\right) = \eta^{\mu\nu}(\partial_\tau\ell_\mu)\ell_\nu + \eta^{\mu\nu}\ell_\mu(\partial_\tau\ell_\nu) = \ell^\mu(\partial_\tau\ell_\mu) + \ell^\nu(\partial_\tau\ell_\nu) = 2\ell^\mu(\partial_\tau\ell_\mu)$$

原典ではクリストッフェルの記号に左辺の

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{matrix} \right\} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$$

を使っているが表記の簡単な右辺を使う．$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$ の定義

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = g^{\alpha\tau}\Gamma_{\tau,\beta\mu} = g^{\alpha\tau}\frac{1}{2}\left(\partial_\beta g_{\mu\tau} + \partial_\mu g_{\beta\tau} - \partial_\tau g_{\beta\mu}\right)$$

以下の式が成立する：

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}\ell^{\mu} = -m\ell^{\mu}\partial_{\mu}(\ell^{\alpha}\ell_{\beta}). \tag{7.10}$$

確認

(7.10) の確認：

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}\ell^{\mu} = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\tau} + 2m\ell^{\alpha}\ell^{\tau})(-2m)\left[\partial_{\beta}(\ell_{\mu}\ell_{\tau}) + \partial_{\mu}(\ell_{\beta}\ell_{\tau}) - \partial_{\tau}(\ell_{\beta}\ell_{\mu})\right]\ell^{\mu} \tag{6}$$

右辺の偏微分演算で定数 $\eta_{\mu\nu}$ の偏微分演算を 0 としている．右から ℓ^{μ} がかけられた括弧［　］内の 3 項の計算を順に行う：

(i) $\partial_{\beta}(\ell_{\mu}\ell_{\tau})\ell^{\mu} = \left[(\partial_{\beta}\ell_{\mu})\ell_{\tau} + \ell_{\mu}(\partial_{\beta}\ell_{\tau})\right]\ell^{\mu} = \ell^{\mu}(\partial_{\beta}\ell_{\mu})\ell_{\tau} + \ell^{\mu}\ell_{\mu}(\partial_{\beta}\ell_{\tau}) = 0$

ここで (7,9) と $\ell^{\mu}\ell_{\mu} = 0$ を使った.

(ii) $\partial_{\mu}(\ell_{\beta}\ell_{\tau})\ell^{\mu} = \left[(\partial_{\mu}\ell_{\beta})\ell_{\tau} + \ell_{\beta}(\partial_{\mu}\ell_{\tau})\right]\ell^{\mu} = (\partial_{\mu}\ell_{\beta})\ell_{\tau}\ell^{\mu} + (\partial_{\mu}\ell_{\tau})\ell_{\beta}\ell^{\mu}$

(iii) $\partial_{\tau}(\ell_{\beta}\ell_{\mu})\ell^{\mu} = \left[(\partial_{\tau}\ell_{\beta})\ell_{\mu} + \ell_{\beta}(\partial_{\tau}\ell_{\mu})\right]\ell^{\mu} = (\partial_{\tau}\ell_{\beta})\ell_{\mu}\ell^{\mu} + \ell^{\mu}(\partial_{\tau}\ell_{\mu})\ell_{\beta} = 0$

ここで (7,9) と $\ell^{\mu}\ell_{\mu} = 0$ を使った．よって，残ったのは (ii) だけであり，これを使い (6) の計算を続けると

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}\ell^{\mu} = -m(\eta^{\alpha\tau} + 2m\ell^{\alpha}\ell^{\tau})\left[(\partial_{\mu}\ell_{\beta})\ell_{\tau}\ell^{\mu} + (\partial_{\mu}\ell_{\tau})\ell_{\beta}\ell^{\mu}\right] \tag{7}$$

以上の計算で先ず $2m\ell^{\alpha}\ell^{\tau}[* + *]$ の項から始める：

$$2m(\partial_{\mu}\ell_{\beta})\ell^{\alpha}\ell^{\tau}\ell_{\tau}\ell^{\mu} + 2m(\partial_{\mu}\ell_{\tau})\ell^{\alpha}\ell^{\tau}\ell_{\beta}\ell^{\mu}$$

$$= 2m(\partial_{\mu}\ell_{\beta})\ell^{\alpha}(\ell^{\tau}\ell_{\tau})\ell^{\mu} + 2m[\ell^{\tau}(\partial_{\mu}\ell_{\tau})]\ell^{\alpha}\ell_{\beta}\ell^{\mu} = 0$$

ここで $\ell^{\tau}\ell_{\tau} = 0$ と (7.9) を使った．残るは

$$-m\eta^{\alpha\tau}\left[(\partial_{\mu}\ell_{\beta})\ell_{\tau}\ell^{\mu} + (\partial_{\mu}\ell_{\tau})\ell_{\beta}\ell^{\mu}\right] = -m\eta^{\alpha\tau}(\partial_{\mu}\ell_{\beta})\ell_{\tau}\ell^{\mu} - m\eta^{\alpha\tau}(\partial_{\mu}\ell_{\tau})\ell_{\beta}\ell^{\mu}$$

$$= -m(\partial_{\mu}\ell_{\beta})\ell^{\alpha}\ell^{\mu} - m(\partial_{\mu}\ell^{\alpha})\ell_{\beta}\ell^{\mu} = -m\ell^{\mu}\partial_{\mu}(\ell^{\alpha}\ell_{\beta})$$

が得られるので (7.10) が示せた.

□

（本文に戻る）　(7.10) を使うことで以下の関係が得られる．ここでは α についての共変微分演算記号として ∇_α を使う．

$$\ell_\nu \nabla_\alpha \ell^\nu = \ell^\nu \nabla_\alpha \ell_\nu = \ell^\nu \left(\partial_\alpha \ell_\nu - \Gamma^\tau{}_{\nu\alpha} \ell_\tau \right) = \ell^\nu \partial_\alpha \ell_\nu = 0. \tag{7.11}$$

確認
ここでは $\ell^\nu \Gamma^\tau{}_{\nu\alpha} \ell_\tau$ がゼロとなることを示せばよい．そのために (7.10) を使う．

$$\begin{aligned}\ell^\nu \Gamma^\tau{}_{\nu\alpha} \ell_\tau = \ell_\tau \Gamma^\tau{}_{\nu\alpha} \ell^\nu = \ell_\tau [-m\ell^\alpha \partial_\alpha(\ell^\tau \ell_\nu)] &= -m \left[\ell^\alpha \ell_\tau (\partial_\alpha \ell^\tau) \ell_\nu + \ell^\alpha \ell_\tau (\partial_\alpha \ell_\nu) \ell^\tau \right] \\ &= -m\ell^\alpha \underbrace{\ell_\tau (\partial_\alpha \ell^\tau)}_{0} \ell_\nu - m\ell^\alpha (\partial_\alpha \ell_\nu) \underbrace{\ell_\tau \ell^\tau}_{0} = 0\end{aligned}$$

よって (7.11) が示せた．

□

（本文に戻る）　任意の点で ℓ_μ は平坦空間 (flat-space) のヌルベクトルである：$\eta_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = 0$．この場合，$\eta_{\mu\nu}$ を一定にしたまま 3 次元空間内での固有回転を行うことができて，また ℓ_μ を $(a, a, 0, 0)$ とすることができる．
内山著から：

　$\det g_{\mu\nu}(x)$ を計算するために点 x で空間の回転を行う．なぜなら空間回転で $\det g_{\mu\nu}$ は不変であるからである．点 x からの回転後の 1 点 x' でのベクトル ℓ'_μ の成分を $(a, a, 0, 0)$ とすることができる．

　このシステムで計量テンソルの行列式 g は

$$g = \begin{Vmatrix} 1-2m^2 & -2ma^2 & 0 & 0 \\ -2ma^2 & -1-2ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = -1. \tag{7.12}$$

このように任意の縮退した計量に対して $g = -1$ とすることができる．よって，次の式が得られる：

$$\Gamma^\alpha{}_{\rho\alpha} = \partial_\rho \log \sqrt{-g} = 0. \tag{7.13}$$

こうして場の方程式 (5.119)

$$R_{\beta\delta} = \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\delta}\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\tau\alpha}\Gamma^\tau{}_{\beta\delta} = 0 \tag{5.119}$$

は

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} = 0, \tag{7.14}$$

となる．ただし，Γ の積の項では縮約の添字をいくつか入れ換えている．

以下，この場の方程式を解くのだが，任意のパラメータ m により $\Gamma^*{}_{**} = Am^2 + Bm$ の形をしていることに注目し，その冪でまとめ，それらが任意の m に対して (7.14) が成立するとすることで，以下の 4 つの方程式を得る．

O(m)

$$\eta^{\alpha\rho}\partial_\alpha \Gamma_{\rho,\mu\nu} = 0 \tag{7.15a}$$

O(m^2)

$$2m\partial_\alpha(\ell^\alpha \ell^\rho \Gamma_{\rho,\mu\nu}) - \eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\lambda}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu} = 0, \tag{7.15b}$$

O(m^3)

$$\ell^\beta \ell^\lambda \eta^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu} + \ell^\alpha \ell^\lambda \eta^{\beta\sigma}\Gamma_{\lambda,\beta\mu}\Gamma_{\sigma,\alpha\nu} = 0, \tag{7.15c}$$

O(m^4)

$$\ell^\alpha \ell^\sigma \ell^\beta \ell^\lambda \eta^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu} = 0. \tag{7.15d}$$

導出：

(7.15a) の導出：m の最低次数であるので (7.14) 右辺の第１項から得られる．$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ ではなく，$\Gamma_{\alpha,\mu\nu}$ の形のクリストッフェル記号を主に使い，m の１次のみを拾う．$\Gamma_{\alpha,\mu\nu}$ には m の１次項が含まれている．

$$\begin{aligned}
-\partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} &= -\partial_\alpha \left[g^{\alpha\rho}\Gamma_{\rho,\mu\nu} \right] = -\partial_\alpha \left[(\eta^{\alpha\rho} + 2m\ell^\alpha \ell^\rho)\Gamma_{\rho,\mu\nu} \right] \\
&= -\partial_\alpha \left(\eta^{\alpha\rho}\Gamma_{\rho,\mu\nu} + 2m\ell^\alpha \ell^\rho \Gamma_{\rho,\mu\nu} \right)
\end{aligned} \tag{8}$$

上の式の括弧［　］内第 2 項は m^2 の項なので括弧内最初の式が (7.15a) となる．

(7.15b) の導出：この式の第１項は (8) 式の第２項から，また第２項は (7.14) の $\Gamma^\alpha{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\mu\alpha}$ の m^2 の項からでる．

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} &= g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}g^{\beta\lambda}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu} = (\eta^{\alpha\sigma} + 2m\ell^\alpha\ell^\sigma)\Gamma_{\sigma,\beta\mu}(\eta^{\beta\lambda} + 2m\ell^\beta\ell^\lambda)\Gamma_{\lambda,\alpha\nu} \\
&= \left(\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\lambda} + 2m\ell^\beta\ell^\lambda\eta^{\alpha\sigma} + 2m\ell^\alpha\ell^\sigma\eta^{\beta\lambda} + 4m^2\ell^\alpha\ell^\sigma\ell^\beta\ell^\lambda \right)\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu}.
\end{aligned} \tag{9}$$

この式の展開式で第 1 項からの m^2 で

$$\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\lambda}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu} \tag{10}$$

これと前述の (8) の項を合わせたのが (7.15b) である．
(9) の第 2，3 項から m^3 の項

$$2m\left(\ell^\beta\ell^\lambda\eta^{\alpha\sigma}+\ell^\alpha\ell^\sigma\eta^{\beta\lambda}\right)\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu} \tag{11}$$

$$=2m\left(\ell^\beta\ell^\lambda\eta^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu}+\ell^\alpha\ell^\sigma\eta^{\beta\lambda}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu}\right)$$
$$=2m\left(\ell^\beta\ell^\lambda\eta^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu}+\ell^\alpha\ell^\lambda\eta^{\beta\sigma}\Gamma_{\lambda,\beta\mu}\Gamma_{\sigma,\alpha\nu}\right) \tag{12}$$

なお，最後の項の縮約で $\sigma\to\lambda$，$\lambda\to\sigma$ の入れ替えを行っている．理由が分からない．後で実際に計算を実行してみるが，このままでも同じ結果が得られる．内山著では条件式としては先頭の式で表しているが，実際の計算では別の表現に直している．なお内山著での計量テンソル $\eta^{\alpha\alpha}=(-1,+1,+1,+1)$ の定義が Adler：$\eta^{\alpha\alpha}=(1,-1,-1,-1)$ と異なるので注意しなければならない．特に (7.15b) は注意しなければならない．

m^4 の項は式 (9) の残りの項

$$\ell^\alpha\ell^\sigma\ell^\beta\ell^\lambda\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu} \tag{13}$$

である．

□

(7.15d) は恒等的に成立する．
確認：(7.15d) 式から以下の一部を取り出す．

$$\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\ell^\sigma\ell^\beta=g_{\sigma\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\ell^\sigma\ell^\beta=(\eta_{\sigma\alpha}-2m\ell_\sigma\ell_\alpha)\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\ell^\sigma\ell^\beta$$
$$=\eta_{\sigma\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\ell^\sigma\ell^\beta-2m\ell_\sigma\ell_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\ell^\sigma\ell^\beta$$

第 2 項は $\ell_\sigma\ell^\sigma=0$ であるから寄与しない．よって第 1 項のみを考えればよい．

$$\eta_{\sigma\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\ell^\sigma\ell^\beta=\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\ell_\alpha\ell^\beta=(\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\ell^\beta)\ell_\alpha=-m\ell^\beta\partial_\beta(\ell^\alpha\ell_\mu)\ell_\alpha$$
$$=-m\ell^\beta\underbrace{(\partial_\beta\ell^\alpha)\ell_\alpha}_{0}\ell_\mu-m\ell^\beta(\partial_\beta\ell_\mu)\underbrace{\ell^\alpha\ell_\alpha}_{0}=0$$

となる．ここで 3 番目の等号で (7.10) を使った．よって $\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\ell^\sigma\ell^\beta$ すなわち $\ell^\alpha\ell^\sigma\ell^\beta\ell^\lambda\eta^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu}$ は恒等的にゼロとなる．

□

<u>(7.15c) の導出</u>：ここでの注目点は $\eta^{\alpha\sigma}$ と $\eta^{\beta\sigma}$ をどう扱うかである．最初の項から始める．
<u>(7.15c) の前半</u>.

$$\ell^\beta\ell^\lambda\eta^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu} = \ell^\beta\ell^\lambda\eta^{\alpha\sigma}\Big[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\sigma) + \partial_\mu(\ell_\beta\ell_\sigma) - \partial_\sigma(\ell_\beta\ell_\mu)\Big]$$

$$\times\Big[\partial_\alpha(\ell_\nu\ell_\lambda) + \partial_\nu(\ell_\alpha\ell_\lambda) - \partial_\lambda(\ell_\alpha\ell_\nu)\Big]$$

$$= \ell^\beta\ell^\lambda\Big[\partial_\beta(\ell_\mu\ell^\alpha) + \partial_\mu(\ell_\beta\ell^\alpha) - \eta^{\alpha\sigma}\partial_\sigma(\ell_\beta\ell_\mu)\Big]\Big[\partial_\alpha(\ell_\nu\ell_\lambda) + \partial_\nu(\ell_\alpha\ell_\lambda) - \partial_\lambda(\ell_\alpha\ell_\nu)\Big]$$

$$= \ell^\beta\Big[\partial_\beta(\ell_\mu\ell^\alpha) + \partial_\mu(\ell_\beta\ell^\alpha) - \eta^{\alpha\sigma}\partial_\sigma(\ell_\beta\ell_\mu)\Big]\ell^\lambda\Big[\partial_\alpha(\ell_\nu\ell_\lambda) + \partial_\nu(\ell_\alpha\ell_\lambda) - \partial_\lambda(\ell_\alpha\ell_\nu)\Big]$$

$$= \ell^\beta\partial_\beta(\ell_\mu\ell^\alpha)\Big[-\ell^\lambda\partial_\lambda(\ell_\alpha\ell_\nu)\Big] \tag{14}$$

ここで

$$\ell^\beta\partial_\mu(\ell_\beta\ell^\alpha) = \underbrace{\ell^\beta(\partial_\mu\ell_\beta)}_{0}\ell^\alpha + (\partial_\mu\ell^\alpha)\underbrace{\ell^\beta\ell_\beta}_{0} = 0$$

を使った．$-\eta^{\alpha\sigma}\ell^\beta\partial_\sigma(\ell_\beta\ell_\mu) = 0$ も同様．同様に

$$\ell^\lambda\partial_\alpha(\ell_\nu\ell_\lambda) = 0, \qquad \ell^\lambda\partial_\nu(\ell_\alpha\ell_\lambda) = 0$$

(14) をさらに計算すると

$$-\Big[\ell^\beta(\partial_\beta\ell_\mu)\ell^\alpha + \ell^\beta(\partial_\beta\ell^\alpha)\ell_\mu\Big]\Big[\ell^\lambda(\partial_\lambda\ell_\alpha)\ell_\nu + \ell^\lambda(\partial_\lambda\ell_\nu)\ell_\alpha\Big]$$

$$= -\Big[\ell^\beta(\partial_\beta\ell_\mu)\ell^\alpha\ell^\lambda(\partial_\lambda\ell_\alpha)\ell_\nu + \ell^\beta(\partial_\beta\ell^\alpha)\ell_\mu\ell^\lambda(\partial_\lambda\ell_\alpha)\ell_\nu$$

$$+ \ell^\beta(\partial_\beta\ell_\mu)\ell^\alpha\ell^\lambda(\partial_\lambda\ell_\nu)\ell_\alpha + \ell^\beta(\partial_\beta\ell^\alpha)\ell_\mu\ell^\lambda(\partial_\lambda\ell_\nu)\ell_\alpha\Big]$$

$$= -\ell^\beta(\partial_\beta\ell_\mu)\ell^\lambda\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\lambda\ell_\alpha)}_{0}\ell_\nu - \ell^\beta(\partial_\beta\ell^\alpha)\ell^\lambda(\partial_\lambda\ell_\alpha)\ell_\mu\ell_\nu$$

$$-\ell^\beta(\partial_\beta\ell_\mu)\ell^\lambda(\partial_\lambda\ell_\nu)\underbrace{\ell^\alpha\ell_\alpha}_{0} - \ell^\beta\underbrace{(\partial_\beta\ell^\alpha)\ell_\alpha}_{0}\ell_\mu\ell^\lambda(\partial_\lambda\ell_\nu)$$

$$= -(\ell^\beta\partial_\beta\ell^\alpha)(\ell^\lambda\partial_\lambda\ell_\alpha)\ell_\mu\ell_\nu$$

(7.15c) の後半

$$\ell^\alpha\ell^\lambda\eta^{\beta\sigma}\Gamma_{\lambda,\beta\mu}\Gamma_{\sigma,\alpha\nu}$$

$$\begin{aligned}\ell^\alpha\ell^\lambda\eta^{\beta\sigma}\Gamma_{\lambda,\beta\mu}\Gamma_{\sigma,\alpha\nu} &= \ell^\alpha\ell^\lambda\eta^{\beta\sigma}\Big[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\lambda)+\partial_\mu(\ell_\beta\ell_\lambda)-\partial_\lambda(\ell_\beta\ell_\mu)\Big] \\ &\times\Big[\partial_\alpha(\ell_\nu\ell_\sigma)+\partial_\nu(\ell_\alpha\ell_\sigma)-\partial_\sigma(\ell_\alpha\ell_\nu)\Big]\end{aligned}$$

$$= \ell^\lambda\Big[\eta^{\beta\sigma}\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\lambda)+\partial_\mu(\ell^\sigma\ell_\lambda)-\partial_\lambda(\ell^\sigma\ell_\mu)\Big]\ell^\alpha\Big[\partial_\alpha(\ell_\nu\ell_\sigma)+\partial_\nu(\ell_\alpha\ell_\sigma)-\partial_\sigma(\ell_\alpha\ell_\nu)\Big]$$

$$= -\ell^\lambda\partial_\lambda(\ell^\sigma\ell_\mu)\ell^\alpha\partial_\alpha(\ell_\nu\ell_\sigma) = -(\ell^\lambda\partial_\lambda\ell^\sigma)(\ell^\alpha\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu$$

となり，前半部分と同じである．

独自計算：(11) のままで計算する．

式 (11) の前半 $\ell^\beta\ell^\lambda\eta^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu}$ は上の計算 (7.15c) の前半と同じである．
よって後半を確認する．

$$\begin{aligned}\ell^\alpha\ell^\sigma\eta^{\beta\lambda}\Gamma_{\sigma,\beta\mu}\Gamma_{\lambda,\alpha\nu} &= \ell^\alpha\ell^\sigma\eta^{\beta\lambda}\Big[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\sigma)+\partial_\mu(\ell_\beta\ell_\sigma)-\partial_\sigma(\ell_\beta\ell_\mu)\Big] \\ &\times\Big[\partial_\alpha(\ell_\nu\ell_\lambda)+\partial_\nu(\ell_\alpha\ell_\lambda)-\partial_\lambda(\ell_\alpha\ell_\nu)\Big] \\ &= -\eta^{\beta\lambda}\ell^\sigma\partial_\sigma(\ell_\beta\ell_\mu)\ell^\alpha\partial_\alpha(\ell_\nu\ell_\lambda) \\ &= -\eta^{\beta\lambda}\ell^\sigma\Big[(\partial_\sigma\ell_\beta)\ell_\mu+(\partial_\sigma\ell_\mu)\ell_\beta\Big]\ell^\alpha\Big[(\partial_\alpha\ell_\nu)\ell_\lambda+(\partial_\alpha\ell_\lambda)\ell_\nu\Big] \\ &= -\ell^\sigma\Big[(\partial_\sigma\ell^\lambda)\ell_\mu+(\partial_\sigma\ell_\mu)\ell^\lambda\Big]\ell^\alpha\Big[(\partial_\alpha\ell_\nu)\ell_\lambda+(\partial_\alpha\ell_\lambda)\ell_\nu\Big] \\ &= -\ell^\sigma(\partial_\sigma\ell^\lambda)\ell_\mu\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell_\nu)\ell_\lambda-\ell^\sigma(\partial_\sigma\ell_\mu)\ell^\lambda\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell_\nu)\ell_\lambda \\ &\quad -\ell^\sigma(\partial_\sigma\ell^\lambda)\ell_\mu\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell_\lambda)\ell_\nu-\ell^\sigma(\partial_\sigma\ell_\mu)\ell^\lambda\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell_\lambda)\ell_\nu \\ &= -\ell^\sigma\underbrace{\ell_\lambda(\partial_\sigma\ell^\lambda)}_{0}\ell_\mu\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell_\nu)-\ell^\sigma(\partial_\sigma\ell_\mu)\underbrace{\ell^\lambda\ell_\lambda}_{0}\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell_\nu) \\ &\quad -(\ell^\sigma\partial_\sigma\ell^\lambda)(\ell^\alpha\partial_\alpha\ell_\lambda)\ell_\mu\ell_\nu-\ell^\sigma(\partial_\sigma\ell_\mu)\ell^\alpha\underbrace{\ell^\lambda(\partial_\alpha\ell_\lambda)}_{0}\ell_\nu \\ &= -(\ell^\sigma\partial_\sigma\ell^\lambda)(\ell^\alpha\partial_\alpha\ell_\lambda)\ell_\mu\ell_\nu\end{aligned}$$

が得られ，前の結果と同じになる．

□

（本文に戻る）(7.15c) の計算結果により

$$\begin{aligned}&v^\alpha\equiv\ell^\beta\nabla_\beta\ell^\alpha=\ell^\beta\partial_\beta\ell^\alpha \\ &-m\ell_\mu\ell_\nu(v^\alpha v_\alpha)=0,\end{aligned} \tag{7.16}$$

確認：
まず，(7.16) の上の定義式および関係式を確認しておく．

$$v^\alpha = \ell^\beta \nabla_\beta \ell^\alpha = \ell^\beta \left(\partial_\beta \ell^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\beta}\ell^\sigma\right)$$

ここで，(7.10) を使って以下の式がゼロであることを示す：

$$\ell^\beta \Gamma^\alpha{}_{\sigma\beta}\ell^\sigma = \ell^\beta[-m\ell^\sigma \partial_\sigma(\ell^\alpha \ell_\beta)] = -m\ell^\sigma \underbrace{\ell^\beta \partial_\sigma(\ell^\alpha \ell_\beta)}_{0} = 0$$

よって，$\ell^\beta \nabla_\beta \ell^\alpha = \ell^\beta \partial_\beta \ell^\alpha$ である．
　さて (7.15c) の展開式の結果は何度も記したが

$$(\ell^\sigma \partial_\sigma \ell^\lambda)(\ell^\alpha \partial_\alpha \ell_\lambda)\ell_\mu \ell_\nu$$

でるが，これに上の定義を適用するならば

$$(\ell^\sigma \partial_\sigma \ell^\lambda)(\ell^\alpha \partial_\alpha \ell_\lambda)\ell_\mu \ell_\nu = \ell_\mu \ell_\nu (v^\lambda v_\lambda)$$

となる．ここで $v_\lambda = g_{\lambda\alpha} v^\alpha$ を仮定した．実際

$$\begin{aligned} v_\lambda &= (\eta_{\lambda\alpha} - 2m\ell_\lambda \ell_\alpha)\ell^\beta \partial_\beta \ell^\alpha = \eta_{\lambda\alpha}\ell^\beta \partial_\beta \ell^\alpha - 2m\ell_\lambda \ell_\alpha \ell^\beta \partial_\beta \ell^\alpha \\ &= \eta_{\lambda\alpha}\ell^\beta \partial_\beta \ell^\alpha - 2m\ell_\lambda \ell^\beta \underbrace{\ell_\alpha \partial_\beta \ell^\alpha}_{0} = \eta_{\lambda\alpha}\ell^\beta \partial_\beta \ell^\alpha = \ell^\beta \partial_\beta \ell_\lambda \end{aligned}$$

以上で，(7.16) の第 2 番目の式が示せた．

□

（本文に戻る）　このように v^α はヌルベクトルである．さらに，これはヌルベクトル ℓ^α と直交する：

$$v^\nu \ell_\nu = (\ell^\alpha \partial_\alpha \ell^\nu)\ell_\nu = \ell^\alpha \underbrace{\ell_\nu \partial_\alpha \ell^\nu}_{0} = 0. \tag{7.17}$$

この結果から v^α と ℓ^α は比例することを示せる．これらがヌルベクトルであることから任意の点で v^α と ℓ^α は

$$\ell^\alpha = (|\boldsymbol{l}|, \boldsymbol{l}), \qquad v^\alpha = (|\boldsymbol{v}|, \boldsymbol{v}), \tag{7.18}$$

とかくことができる（$\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{v}$ は 3 次元ユークリッド空間での通常の 3 次元ベクトルである）．

確認：
$\boldsymbol{l} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ とすると（ただし，$\ell^i = \ell_i$ とする）

$$\ell_\alpha = (|\boldsymbol{l}|, \boldsymbol{l}) = (\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$$

$$\ell^\alpha \ell_\alpha = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}^2 - (\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2) = 0$$

$\square$

これらが直交することより

$$\ell^\nu v_\nu = |\boldsymbol{l}||\boldsymbol{v}| - \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{l}||\boldsymbol{v}|(1 - \cos\theta) = 0, \qquad \cos\theta = \frac{\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{l}||\boldsymbol{v}|}. \tag{7.19}$$

$\cos\theta = 1$ より，$\boldsymbol{v}$ は任意の点 x で $\boldsymbol{l}$ に平行である．よって

$$v^\nu = \ell^\alpha \partial_\alpha \ell^\nu = -A(x^\mu)\ell^\nu, \tag{7.20}$$

とする．ここで $A(x^\mu)$ はスカラー場である．
m^2 に関する方程式については後回しにする．それは恒等的にみたされることができることを示せる．
m の 1 次の方程式 (7.15a) について考える．この式は

$$\eta^{\alpha\rho}\partial_\alpha \Big[\partial_\mu(\ell_\nu \ell_\rho) + \partial_\nu(\ell_\rho \ell_\mu) - \partial_\rho(\ell_\mu \ell_\nu)\Big] = 0, \tag{7.21}$$

伊藤注：ただし，(7.15a) の添字の入れ替えを行っているので原著に合わせ書き直した．具体的な計算をもう少し続ける．

$$\partial_\alpha \partial_\mu(\ell_\nu \ell^\alpha) + \partial_\alpha \partial_\nu(\ell^\alpha \ell_\mu) - \eta^{\alpha\rho}\partial_\alpha \partial_\rho(\ell_\mu \ell_\nu)$$

$$= \partial_\alpha \Big(\ell^\alpha \partial_\mu \ell_\nu + \ell_\nu \partial_\mu \ell^\alpha\Big) + \partial_\alpha \Big(\ell^\alpha \partial_\nu \ell_\mu + \ell_\mu \partial_\nu \ell^\alpha\Big) - \Box(\ell_\mu \ell_\nu) = 0, \tag{15}$$

ここで $\Box = \eta^{\alpha\rho}\partial_\alpha \partial_\rho$ である．
（本文に戻る）　スカラー L を以下のように定義する（途中，(7.13) を使う）

$$\nabla_\alpha \ell^\alpha = (\partial_\alpha \ell^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\tau}\ell^\tau) = \partial_\alpha \ell^\alpha = -L, \tag{7.22}$$

これら A と L を使うことにより (7.21) より

$$-\Box(\ell_\mu \ell_\nu) = \partial_\nu[(L + A)\ell_\mu] + \partial_\mu[(L + A)\ell_\nu], \tag{7.23}$$

を得る．
導出：
ちょっと厄介な導出である．
直ぐ上の式 (15) の α による偏微分演算を実行する．ただし，$-\Box(\ell_\mu\ell_\nu)$ の項は外しておく．

$$\begin{aligned}&\underbrace{(\partial_\alpha\ell^\alpha)(\partial_\mu\ell_\nu)}_{1}+\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\alpha\partial_\mu\ell_\nu)}_{2}+\underbrace{(\partial_\alpha\ell_\nu)(\partial_\mu\ell^\alpha)}_{3}+\underbrace{\ell_\nu(\partial_\alpha\partial_\mu\ell^\alpha)}_{4}\\&+\underbrace{(\partial_\alpha\ell^\alpha)(\partial_\nu\ell_\mu)}_{5}+\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\alpha\partial_\nu\ell_\mu)}_{6}+\underbrace{(\partial_\alpha\ell_\mu)(\partial_\nu\ell^\alpha)}_{7}+\underbrace{\ell_\mu(\partial_\alpha\partial_\nu\ell^\alpha)}_{8}\end{aligned}\tag{16}$$

これら 8 個の項を適宜組み合わせる．

$$\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\alpha\partial_\nu\ell_\mu)}_{6}+\underbrace{(\partial_\alpha\ell_\mu)(\partial_\nu\ell^\alpha)}_{7}=\partial_\nu(\ell^\alpha\partial_\alpha\ell_\mu)=\partial_\nu v_\mu=-\partial_\nu(A\ell_\mu)\tag{17}$$

$$\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\alpha\partial_\mu\ell_\nu)}_{2}+\underbrace{(\partial_\alpha\ell_\nu)(\partial_\mu\ell^\alpha)}_{3}=\partial_\mu(\ell^\alpha\partial_\alpha\ell_\nu)=\partial_\mu v_\nu=-\partial_\mu(A\ell_\nu)\tag{18}$$

残りすべてをまとめると

$$\begin{aligned}&\underbrace{(\partial_\alpha\ell^\alpha)(\partial_\mu\ell_\nu)}_{1}+\underbrace{(\partial_\alpha\ell^\alpha)(\partial_\nu\ell_\mu)}_{5}+\underbrace{\ell_\nu(\partial_\alpha\partial_\mu\ell^\alpha)}_{4}+\underbrace{\ell_\mu(\partial_\alpha\partial_\nu\ell^\alpha)}_{8}\\&=-L\partial_\mu\ell_\nu-L\partial_\nu\ell_\mu+\ell_\nu(\partial_\mu\partial_\alpha\ell^\alpha)+\ell_\mu(\partial_\nu\partial_\alpha\ell^\alpha)\\&=-L\partial_\mu\ell_\nu-L\partial_\nu\ell_\mu-\ell_\nu(\partial_\mu L)-\ell_\mu(\partial_\nu L)=-\partial_\nu(L\ell_\mu)-\partial_\mu(L\ell_\nu)\end{aligned}\tag{19}$$

(17), (18), (19) を (15) に戻すことで，(7.23) を得る．

□

（本文に戻る）　これまでのところ計量の何らかの対称性などは仮定していない．セクション 7.4 では計量が定常であること，つまり x^0 に依存しない場合を扱う．m の 1 次の式 (7.15a) がかなり単純化され，(7.23) を得た．

3　次数が m^2 の方程式

このセクションでは (7.23) を満たす $\ell\mu$ ならば，次数が m^2 の方程式 (7.15b) をも満たすことを示す．面倒だが初歩的な計算である．つまり

(7.15b) の項を全て書き表す．単純化のため，(7.5)，(7.9)，(7.16)，(7.20) を使う．その結果は以下のようになる：

$$\ell_\mu \ell_\nu \Big[2\partial_\alpha(\ell^\alpha A) - A^2 + (\partial_\beta \ell^\alpha)(\partial_\alpha \ell^\beta) - (\partial_\beta \ell^\alpha)(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\alpha) \Big] = 0. \quad (7.24)$$

導出：(7.24) の単純化された結果と元の式 (7.15b) との間のギャップにより，この計算は雲をつかむような計算のように思え，手の付け所に見当がつかない．しかしながら内山著の同じ部分にヒントらしきものがあったので，それをよりどころとして計算を進める．多少ばかげているが，この面倒な計算すべてを記す．

$$2m\partial_\alpha(\ell^\alpha \ell^\rho \Gamma_{\rho,\mu\nu}) - \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\Gamma_{\rho,\beta\mu}\Gamma_{\sigma,\alpha\nu} = 0, \quad (7.15b)$$

. 最初に注意すべきことは $\Gamma_{*,**}$ の定義式の 1/2 である．

$$\Gamma_{\rho,\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(\partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\Big)$$

計量が $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2m\ell_\mu \ell_\nu$ であるので符号や係数 2 に注意しなければならない．$\Gamma_{*,**}$ 内の $g_{\mu\nu}$ には偏微分演算子がかかっているから，$\eta_{\mu\nu}$ は消える．(7.15b) 左辺第 1 項でこれらを考慮すると，係数は 2 で符号はマイナスとなる．また第 2 項は $\Gamma_{*,**}$ 内の 1/2 と $2m$ の 2 がキャンセルするので全体としての係数は 1 のままであり，符号も $\Gamma_{*,**}$ の積により変化しないので，(7.15b) の全体としての形は第 1 項が -2 で第 2 項が -1 である，よって，-1 で割って全体として $+$ で計算する．以下の計算では第 1 項を 2 で割って 1 として計算するので，最終段階では第 2 項の結果を 2 で割って加える．

(7.15b) の先頭の式を分解する． 上で色々と述べたことを実際に記す：

$$2m\partial_\alpha(\ell^\alpha \ell^\beta \Gamma_{\beta,\mu\nu}) = 2m\partial_\alpha\Bigg[\ell^\alpha \ell^\beta \frac{(-2m)}{2}\Big\{\partial_\mu(\ell_\nu \ell_\beta) + \partial_\nu(\ell_\mu \ell_\beta) - \partial_\beta(\ell_\mu \ell_\nu)\Big\}\Bigg]$$

$-2m^2$ で割って

$$\to \partial_\alpha\Big[\ell^\alpha \ell^\beta \Big\{\partial_\mu(\ell_\nu \ell_\beta) + \partial_\nu(\ell_\mu \ell_\beta) - \partial_\beta(\ell_\mu \ell_\nu)\Big\}\Big] \quad (20)$$

として以下計算を続ける．(20) の括弧 { } 内先頭の 2 項はこれまでにも何度も現れたように ℓ^β との関係からゼロとなる．例えば：

$$\partial_\alpha\Big[\ell^\alpha \ell^\beta \partial_\mu(\ell_\nu \ell_\beta)\Big] = \ell^\alpha \underbrace{\ell^\beta(\partial_\mu \ell_\beta)}_{0} \ell_\nu + \ell^\alpha \underbrace{\ell^\beta \ell_\beta}_{0} (\partial_\nu \ell_\beta) = 0$$

よって (7.15b) の先頭の式である (20) は

$$-\partial_\alpha\left[\ell^\alpha\ell^\beta\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\nu)\right]=-\underbrace{\partial_\alpha\left(\ell^\alpha\ell^\beta\right)\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\nu)}_{\text{(I)}}-\underbrace{\ell^\alpha\ell^\beta\partial_\alpha\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\nu)}_{\text{(II)}}$$

<u>(I) の計算</u>：
ここでは $\ell^\alpha\partial_\alpha\ell_\mu=v_\mu=-A\ell_\mu$ や $\partial_\alpha\ell^\alpha=-L$ 等を多用する．

$$\partial_\alpha\left(\ell^\alpha\ell^\beta\right)\partial_\beta\left(\ell_\mu\ell_\nu\right)=[\underbrace{(\partial_\alpha\ell^\alpha)}_{-L}\ell^\beta+\ell^\alpha\left(\partial_\alpha\ell^\beta\right)]\left[\left(\partial_\beta\ell_\mu\right)\ell_\nu+\ell_\mu\left(\partial_\beta\ell_\nu\right)\right]$$

$$=-L\underbrace{\ell^\beta\left(\partial_\beta\ell_\mu\right)}_{v_\mu}\ell_\nu+\underbrace{\ell^\alpha\left(\partial_\alpha\ell^\beta\right)}_{v^\beta}\left(\partial_\beta\ell_\mu\right)\ell_\nu-L\ell^\beta\ell_\mu\left(\partial_\beta\ell_\nu\right)+\underbrace{\ell^\alpha\left(\partial_\alpha\ell^\beta\right)}_{v^\beta}\ell_\mu\left(\partial_\beta\ell_\nu\right)$$

$$=-L(-A\ell_\mu)\ell_\nu+(-A\ell^\beta)\left(\partial_\beta\ell_\mu\right)\ell_\nu-L\ell_\mu\underbrace{\ell^\beta\left(\partial_\beta\ell_\nu\right)}_{v_\nu}+(-A\ell^\beta)\ell_\mu\left(\partial_\beta\ell_\nu\right)$$

$$=LA\ell_\mu\ell_\nu-A\underbrace{\ell^\beta\left(\partial_\beta\ell_\mu\right)}_{v_\mu}\ell_\nu-L\ell_\mu(-A\ell_\nu)-A\ell_\mu\underbrace{\ell^\beta\left(\partial_\beta\ell_\nu\right)}_{v_\nu}$$

$$=LA\ell_\mu\ell_\nu+A^2\ell_\mu\ell_\nu+LA\ell_\mu\ell_\nu+A^2\ell_\mu\ell_\nu$$

$$=2LA\ell_\mu\ell_\nu+2A^2\ell_\mu\ell_\nu \tag{21}$$

<u>(II) の計算</u>：

$$\ell^\alpha\ell^\beta\partial_\alpha\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\nu)=\ell^\alpha\ell^\beta\partial_\alpha[(\partial_\beta\ell_\mu)\ell_\nu+\ell_\mu(\partial_\beta\ell_\nu)]$$

$$=\ell^\alpha\ell^\beta[\underbrace{(\partial_\beta\ell_\mu)(\partial_\alpha\ell_\nu)+(\partial_\alpha\ell_\mu)(\partial_\beta\ell_\nu)}_{\text{II}-1}+\underbrace{\ell_\nu(\partial_\alpha\partial_\beta\ell_\mu)+\ell_\mu(\partial_\alpha\partial_\beta\ell_\nu)}_{\text{II}-2}]$$

(II-1) の計算：

$$\ell^\alpha\ell^\beta(\partial_\beta\ell_\mu)(\partial_\alpha\ell_\nu)+\ell^\alpha\ell^\beta(\partial_\alpha\ell_\mu)_(\partial_\beta\ell_\nu)$$

$$=\underbrace{\ell^\beta(\partial_\beta\ell_\mu)}_{v_\mu}\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell_\nu)}_{v_\nu}+\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell_\mu)}_{v_\mu}\underbrace{\ell^\beta(\partial_\beta\ell_\nu)}_{v_\nu}=2A^2\ell_\mu\ell_\nu \tag{22}$$

(II-2) の計算：

$$\ell^\alpha\ell^\beta\ell_\nu(\partial_\alpha\partial_\beta\ell_\mu)=\ell^\alpha\ell_\nu[\partial_\alpha(\underbrace{\ell^\beta\partial_\beta\ell_\mu}_{v_\mu})-(\partial_\alpha\ell^\beta)(\partial_\beta\ell_\mu)]$$

$$= \ell_\nu[\ell^\alpha\partial_\alpha(\underbrace{\ell^\beta\partial_\beta\ell_\mu}_{v_\mu}) - \underbrace{\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell^\beta)}_{v^\beta}(\partial_\beta\ell_\mu)] = \ell_\nu[\ell^\alpha\partial_\alpha(-A\ell_\mu) - (-A\ell^\beta)(\partial_\beta\ell_\mu)]$$

$$= \ell_\nu[-\ell^\alpha(\partial_\alpha A)\ell_\mu - A\underbrace{(\ell^\alpha\partial_\alpha\ell_\mu)}_{v_\mu} + A\underbrace{(\ell^\beta\partial_\beta\ell_\mu)}_{v_\mu}] = -\ell^\alpha(\partial_\alpha A)\ell_\mu\ell_\nu$$

同様に

$$\ell^\alpha\ell^\beta\ell_\mu(\partial_\alpha\partial_\beta\ell_\nu) = --\ell^\alpha(\partial_\alpha A)\ell_\mu\ell_\nu$$

となるので

$$\ell^\alpha\ell^\beta\left[\ell_\nu(\partial_\alpha\partial_\beta\ell_\mu) + \ell_\mu(\partial_\alpha\partial_\beta\ell_\nu)\right] = -2\ell^\alpha(\partial_\alpha A)\ell_\mu\ell_\nu \tag{23}$$

よって，(7.15b) の先頭の (1/2) はマイナス符号に注意し，(21)，(22)，(23) より

$$-\partial_\alpha\left[\ell^\alpha\ell^\beta\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\nu)\right] = \left[-2LA - 4A^2 + 2\ell^\alpha(\partial_\alpha A)\right]\ell_\mu\ell_\nu \tag{24}$$

を得る．

(7.15b) の後半部分の計算

一番面倒な部分である．

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\Gamma_{\rho,\beta\mu}\Gamma_{\sigma,\alpha\nu}$$

$$\to \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\left[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\rho) + \partial_\mu(\ell_\beta\ell_\rho) - \partial_\rho(\ell_\mu\ell_\beta)\right][\underbrace{\partial_\nu(\ell_\alpha\ell_\sigma)}_{(\mathrm{III-1})} + \underbrace{\partial_\alpha(\ell_\sigma\ell_\nu)}_{(\mathrm{III-2})} - \underbrace{\partial_\sigma(\ell_\alpha\ell_\nu)}_{(\mathrm{III-3})}]$$

<u>(III-1) の計算</u>

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\left[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\rho) + \partial_\mu(\ell_\beta\ell_\rho) - \partial_\rho(\ell_\mu\ell_\beta)\right]\partial_\nu(\ell_\alpha\ell_\sigma)$$

$$= \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\left[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\rho) + \partial_\mu(\ell_\beta\ell_\rho) - \partial_\rho(\ell_\mu\ell_\beta)\right][\underbrace{(\partial_\nu\ell_\alpha)\ell_\sigma}_{(\mathrm{III-1-1})} + \underbrace{\ell_\alpha(\partial_\nu\ell_\sigma)}_{(\mathrm{III-1-2})}]$$

(III-1-1) の計算

まず，前の括弧 [ ] 内の積も偏微分演算を施して分割しておく．$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ は外しておく：

$$\left[(\partial_\beta\ell_\mu)\ell_\rho + \ell_\mu(\partial_\beta\ell_\rho) + (\partial_\mu\ell_\beta)\ell_\rho + \ell_\beta(\partial_\mu\ell_\rho) - (\partial_\rho\ell_\mu)\ell_\beta - \ell_\mu(\partial_\rho\ell_\beta)\right](\partial_\nu\ell_\alpha)\ell_\sigma$$

$$= (\partial_\beta \ell_\mu)\ell_\rho(\partial_\nu \ell_\alpha)\ell_\sigma + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\rho)(\partial_\nu \ell_\alpha)\ell_\sigma + (\partial_\mu \ell_\beta)\ell_\rho(\partial_\nu \ell_\alpha)\ell_\sigma + \ell_\beta(\partial_\mu \ell_\rho)(\partial_\nu \ell_\alpha)\ell_\sigma$$
$$-(\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\beta(\partial_\nu \ell_\alpha)\ell_\sigma - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)(\partial_\nu \ell_\alpha)\ell_\sigma$$

これに $\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ を掛けて添字の上げ下げを行う：

$$(\partial_\beta \ell_\mu)\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\nu \ell_\alpha)}_{0}\ell^\beta + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\rho)(\partial_\nu \ell_\alpha)\ell^\beta\eta^{\alpha\rho} + (\partial_\mu \ell_\beta)\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\nu \ell_\alpha)}_{0}\ell^\beta + \underbrace{\ell_\beta\ell^\beta}_{0}(\partial_\mu \ell_\rho)(\partial_\nu \ell_\alpha)\eta^{\alpha\rho}$$

$$-(\partial_\rho \ell_\mu)\underbrace{\ell_\beta\ell^\beta}_{0}(\partial_\nu \ell_\alpha)\eta^{\alpha\rho} - \ell_\mu\underbrace{\ell^\beta(\partial_\rho \ell_\beta)}_{0}(\partial_\nu \ell_\alpha)\eta^{\alpha\rho}$$

$$= \ell_\mu\underbrace{\ell^\beta(\partial_\beta \ell_\rho)}_{v_\rho}(\partial_\nu \ell_\alpha)\eta^{\alpha\rho} = \ell_\mu v_\rho \eta^{\alpha\rho}(\partial_\nu \ell_\alpha) = \ell_\mu v^\alpha(\partial_\nu \ell_\alpha) = \ell_\mu(-A\ell^\alpha)(\partial_\nu \ell_\alpha)$$

$$= -A\ell_\mu\underbrace{\ell^\alpha\partial_\nu \ell_\alpha}_{0} = 0$$

よって

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\Big[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\rho) + \partial_\mu(\ell_\beta\ell_\rho) - \partial_\rho(\ell_\mu\ell_\beta)\Big](\partial_\nu \ell_\alpha)\ell_\sigma = 0 \tag{25}$$

(III-1-2) の計算

$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ は外しておく：

$$\Big[(\partial_\beta \ell_\mu)\ell_\rho + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\rho) + (\partial_\mu \ell_\beta)\ell_\rho + \ell_\beta(\partial_\mu \ell_\rho) - (\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\beta - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)\Big]\ell_\alpha(\partial_\nu \ell_\sigma)$$

$$= (\partial_\beta \ell_\mu)\ell_\rho\ell_\alpha(\partial_\nu \ell_\sigma) + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\rho)\ell_\alpha(\partial_\nu \ell_\sigma) + (\partial_\mu \ell_\beta)\ell_\rho\ell_\alpha(\partial_\nu \ell_\sigma) + \ell_\beta(\partial_\mu \ell_\rho)\ell_\alpha(\partial_\nu \ell_\sigma)$$
$$-(\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\beta\ell_\alpha(\partial_\nu \ell_\sigma) - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)\ell_\alpha(\partial_\nu \ell_\sigma)$$

これに $\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ を掛けて添字の上げ下げを行う：

$$(\partial_\beta \ell_\mu)\underbrace{\ell^\alpha\ell_\alpha}_{0}(\partial_\nu \ell_\sigma)\eta^{\beta\sigma} + \ell_\mu\underbrace{(\partial_\beta \ell_\rho)\ell^\rho}_{0}(\partial_\nu \ell_\sigma)\eta^{\beta\sigma} + (\partial_\mu \ell_\beta)\underbrace{\ell^\alpha\ell_\alpha}_{0}(\partial_\nu \ell_\sigma)\eta^{\beta\sigma}$$

$$+\ell_\beta\underbrace{(\partial_\mu \ell_\rho)\ell^\rho}_{0}(\partial_\nu \ell_\sigma) - (\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\alpha\underbrace{\ell^\sigma(\partial_\nu \ell_\sigma)}_{0}\eta^{\alpha\rho} - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)\ell^\rho(\partial_\nu \ell_\sigma)\eta^{\beta\sigma}$$

$$= -\ell_\mu\underbrace{\ell^\rho(\partial_\rho \ell_\beta)}_{v_\beta}(\partial_\nu \ell_\sigma)\eta^{\beta\sigma} = -\ell_\mu v_\beta\eta^{\beta\sigma}(\partial_\nu \ell_\sigma) = -\ell_\mu v^\sigma(\partial_\nu \ell_\sigma)$$

$$= -\ell_\mu(-A\underbrace{\ell^\sigma)(\partial_\nu \ell_\sigma)}_{0} = 0$$

よって

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\left[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\rho)+\partial_\mu(\ell_\beta\ell_\rho)-\partial_\rho(\ell_\mu\ell_\beta)\right]\ell_\alpha(\partial_\nu\ell_\sigma)=0 \tag{26}$$

<u>(III-2) の計算</u>

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\left[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\rho)+\partial_\mu(\ell_\beta\ell_\rho)-\partial_\rho(\ell_\mu\ell_\beta)\right]\partial_\alpha(\ell_\sigma\ell_\nu)$$
$$=\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\left[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\rho)+\partial_\mu(\ell_\beta\ell_\rho)-\partial_\rho(\ell_\mu\ell_\beta)\right][\underbrace{(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\nu}_{\text{(III−2−1)}}+\underbrace{\ell_\sigma(\partial_\alpha\ell_\nu)}_{\text{(III−2−2)}}]$$

(III-2-1) の計算

$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ は外しておく：

$$\left[(\partial_\beta\ell_\mu)\ell_\rho+\ell_\mu(\partial_\beta\ell_\rho)+(\partial_\mu\ell_\beta)\ell_\rho+\ell_\beta(\partial_\mu\ell_\rho)-(\partial_\rho\ell_\mu)\ell_\beta-\ell_\mu(\partial_\rho\ell_\beta)\right](\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\nu$$
$$=(\partial_\beta\ell_\mu)\ell_\rho(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\nu+\ell_\mu(\partial_\beta\ell_\rho)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\nu+(\partial_\mu\ell_\beta)\ell_\rho(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\nu+\ell_\beta(\partial_\mu\ell_\rho)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\nu$$
$$-(\partial_\rho\ell_\mu)\ell_\beta(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\nu-\ell_\mu(\partial_\rho\ell_\beta)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\nu$$

これに $\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ を掛けて添字の上げ下げを行う：

$$\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\mu)\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell_\sigma)}_{v_\sigma}\ell_\nu+\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\rho)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu+\eta^{\beta\sigma}(\partial_\mu\ell_\beta)\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\alpha\ell_\sigma)}_{v_\sigma}\ell_\nu$$
$$+\eta^{\alpha\rho}(\partial_\mu\ell_\rho)\underbrace{\ell^\sigma(\partial_\alpha\ell_\sigma)}_{0}\ell_\nu-\eta^{\alpha\rho}(\partial_\rho\ell_\mu)\underbrace{\ell^\sigma(\partial_\alpha\ell_\sigma)}_{0}\ell_\nu-\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho\ell_\beta)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu$$
$$=\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\mu)v_\sigma\ell_\nu+\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\rho)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu+\eta^{\beta\sigma}(\partial_\mu\ell_\beta)v_\sigma\ell_\nu$$
$$-\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho\ell_\beta)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu$$
$$=(\partial_\beta\ell_\mu)(-A\ell_\sigma)\eta^{\beta\sigma}\ell_\nu+\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\rho)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu+(\partial_\mu\ell_\beta)(-A\ell_\sigma)\eta^{\beta\sigma}\ell_\nu$$
$$-\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho\ell_\beta)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu$$
$$=-A\ell^\beta(\partial_\beta\ell_\mu)\ell_\nu+\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\rho)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu-A\underbrace{\ell^\beta(\partial_\mu\ell_\beta)}_{0}\ell_\nu$$
$$-\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho\ell_\beta)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu$$
$$=A^2\ell_\mu\ell_\nu+\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\rho)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu-\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho\ell_\beta)(\partial_\alpha\ell_\sigma)\ell_\mu\ell_\nu \tag{27}$$

(III-2-2) の計算

$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ は外しておく：

$$\Big[(\partial_\beta \ell_\mu)\ell_\rho + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\rho) + (\partial_\mu \ell_\beta)\ell_\rho + \ell_\beta(\partial_\mu \ell_\rho) - (\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\beta - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)\Big]\,\ell_\sigma(\partial_\alpha \ell_\nu)$$

$$\begin{aligned}&= (\partial_\beta \ell_\mu)\ell_\rho\ell_\sigma(\partial_\alpha \ell_\nu) + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\rho)\ell_\sigma(\partial_\alpha \ell_\nu) + (\partial_\mu \ell_\beta)\ell_\rho\ell_\sigma(\partial_\alpha \ell_\nu)\\ &\quad + \ell_\beta(\partial_\mu \ell_\rho)\ell_\sigma(\partial_\alpha \ell_\nu) - (\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\beta\ell_\sigma(\partial_\alpha \ell_\nu) - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)\ell_\sigma(\partial_\alpha \ell_\nu)\end{aligned}$$

これに $\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ を掛けて添字の上げ下げを行う：

$$\begin{aligned}&\underbrace{\ell^\beta(\partial_\beta \ell_\mu)}_{v_\mu}\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\alpha \ell_\nu)}_{v_\nu} + \underbrace{\ell^\beta(\partial_\beta \ell_\rho)}_{v_\rho}(\partial_\alpha \ell_\nu)\ell_\mu\eta^{\alpha\rho} + \underbrace{\ell^\beta(\partial_\mu \ell_\beta)}_{0}\,\ell^\alpha(\partial_\alpha \ell_\nu)\\ &+ \underbrace{\ell^\sigma\ell_\sigma}_{0}(\partial_\mu \ell_\rho)(\partial_\alpha \ell_\nu)\eta^{\alpha\rho} - (\partial_\rho \ell_\mu)\,\underbrace{\ell_\beta\ell^\beta}_{0}(\partial_\alpha \ell_\nu) - \ell_\mu\,\underbrace{\ell^\beta(\partial_\rho \ell_\beta)}_{0}(\partial_\alpha \ell_\nu)\eta^{\alpha\rho}\\ &= A^2\ell_\mu\ell_\nu + (-A\ell_\rho)(\partial_\alpha \ell_\nu)\ell_\mu\eta^{\alpha\rho} = A^2\ell_\mu\ell_\nu - A\ell^\alpha(\partial_\alpha \ell_\nu)\ell_\mu\\ &= 2A^2\ell_\mu\ell_\nu. \end{aligned} \tag{28}$$

<u>(III-3) の計算</u>

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\Big[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\rho) + \partial_\mu(\ell_\beta\ell_\rho) - \partial_\rho(\ell_\mu\ell_\beta)\Big]\left[-\partial_\sigma(\ell_\alpha\ell_\nu)\right]$$

$$= -\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}\Big[\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\rho) + \partial_\mu(\ell_\beta\ell_\rho) - \partial_\rho(\ell_\mu\ell_\beta)\Big]\Big[\underbrace{(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\nu}_{\text{(III}-3-1)} + \underbrace{\ell_\alpha(\partial_\sigma \ell_\nu)}_{\text{(III}-3-2)}\Big]$$

(III-3-1) の計算

$-\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ は外しておく：　最後このマイナスに注意！

$$\Big[(\partial_\beta \ell_\mu)\ell_\rho + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\rho) + (\partial_\mu \ell_\beta)\ell_\rho + \ell_\beta(\partial_\mu \ell_\rho) - (\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\beta - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)\Big]\,(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\nu$$

$$\begin{aligned}&= (\partial_\beta \ell_\mu)\ell_\rho(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\nu + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\rho)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\nu + (\partial_\mu \ell_\beta)\ell_\rho(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\nu + \ell_\beta(\partial_\mu \ell_\rho)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\nu\\ &\quad - (\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\beta(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\nu - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\nu\end{aligned}$$

これに $\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ を掛けて添字の上げ下げを行う：

$$= (\partial_\beta \ell_\mu)\,\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\sigma \ell_\alpha)}_{0}\,\ell_\nu\eta^{\beta\sigma} + \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta \ell_\rho)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\mu\ell_\nu + (\partial_\mu \ell_\beta)\,\underbrace{\ell^\alpha(\partial_\sigma \ell_\alpha)}_{0}\,\ell_\nu\eta^{\beta\sigma}$$

$$+\eta^{\alpha\rho}(\partial_\mu \ell_\rho)\underbrace{\ell^\sigma(\partial_\sigma \ell_\alpha)}_{v_\alpha}\ell_\nu - (\partial_\rho \ell_\mu)\underbrace{\ell^\sigma(\partial_\sigma \ell_\alpha)}_{v_\alpha}\ell_\nu \eta^{\alpha\rho} - \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho \ell_\beta)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\mu \ell_\nu$$

$$= \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta \ell_\rho)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\mu \ell_\nu + \eta^{\alpha\rho}(\partial_\mu \ell_\rho)(-A\ell_\alpha)\ell_\nu - (\partial_\rho \ell_\mu)(-A\ell_\alpha)\ell_\nu \eta^{\alpha\rho}$$

$$-\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho \ell_\beta)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\mu \ell_\nu$$

$$= \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta \ell_\rho)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\mu \ell_\nu - A\underbrace{\ell^\rho(\partial_\mu \ell_\rho)}_{0}\ell_\nu + A\ell^\rho(\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\nu - \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho \ell_\beta)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\mu \ell_\nu$$

$$= -A^2\ell_\mu \ell_\nu + \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta \ell_\rho)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\mu \ell_\nu - \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho \ell_\beta)(\partial_\sigma \ell_\alpha)\ell_\mu \ell_\nu. \quad (29)$$

(III-3-2) の計算
$-\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ は外しておく：　最後このマイナスに注意！

$$\Big[(\partial_\beta \ell_\mu)\ell_\rho + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\rho) + (\partial_\mu \ell_\beta)\ell_\rho + \ell_\beta(\partial_\mu \ell_\rho) - (\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\beta - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)\Big]\ell_\alpha(\partial_\sigma \ell_\nu)$$

$$= (\partial_\beta \ell_\mu)\ell_\rho \ell_\alpha(\partial_\sigma \ell_\nu) + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\rho)\ell_\alpha(\partial_\sigma \ell_\nu) + (\partial_\mu \ell_\beta)\ell_\rho \ell_\alpha(\partial_\sigma \ell_\nu) + \ell_\beta(\partial_\mu \ell_\rho)\ell_\alpha(\partial_\sigma \ell_\nu)$$

$$-(\partial_\rho \ell_\mu)\ell_\beta \ell_\alpha(\partial_\sigma \ell_\nu) - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)\ell_\alpha(\partial_\sigma \ell_\nu)$$

これに $\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}$ を掛けて添字の上げ下げを行う：

$$\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta \ell_\mu)\underbrace{\ell^\alpha \ell_\alpha}_{0}(\partial_\sigma \ell_\nu) + \eta^{\beta\sigma}\ell_\mu\underbrace{(\partial_\beta \ell_\rho)\ell^\rho}_{0}(\partial_\sigma \ell_\nu) + \eta^{\beta\sigma}(\partial_\mu \ell_\beta)\underbrace{\ell^\alpha \ell_\alpha}_{0}(\partial_\sigma \ell_\nu)$$

$$+\ell^\sigma\underbrace{(\partial_\mu \ell_\rho)\ell^\rho}_{0}(\partial_\sigma \ell_\nu) - (\partial_\rho \ell_\mu)\ell^\sigma \ell^\rho(\partial_\sigma \ell_\nu) - \ell_\mu(\partial_\rho \ell_\beta)\ell^\rho(\partial_\sigma \ell_\nu)\eta^{\beta\sigma}$$

$$= -\underbrace{\ell^\rho(\partial_\rho \ell_\mu)}_{v_\mu}\underbrace{\ell^\sigma(\partial_\sigma \ell_\nu)}_{v_\nu} - \underbrace{\ell^\rho(\partial_\rho \ell_\beta)}_{v_\beta}(\partial_\sigma \ell_\nu)\eta^{\beta\sigma}\ell_\mu$$

$$= -A^2\ell_\mu \ell_\nu. - (-A\ell_\beta)\eta^{\beta\sigma}(\partial_\sigma \ell_\nu)\ell_\mu = -A^2\ell_\mu \ell_\nu + A\ell^\sigma(\partial_\sigma \ell_\nu)\ell_\mu$$

$$= -2A^2\ell_\mu \ell_\nu \quad (30)$$

以上，まずは (7.15b) の後半部分をまとめる．
(III-1) の結果は (25) と (26) で　　　　　　0
(III-2) の結果は (27) と (28) で各々

$$A^2\ell_\mu \ell_\nu + \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta \ell_\rho)(\partial_\alpha \ell_\sigma)\ell_\mu \ell_\nu - \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho \ell_\beta)(\partial_\alpha \ell_\sigma)\ell_\mu \ell_\nu$$

$$2A^2\ell_\mu \ell_\nu.$$

(III-3) の結果は (29) と (30) で各々，$(-1\times)$ を行い

$$A^2\ell_\mu\ell_\nu - \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\rho)(\partial_\sigma\ell_\alpha)\ell_\mu\ell_\nu + \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho\ell_\beta)(\partial_\sigma\ell_\alpha)\ell_\mu\ell_\nu.$$

$$2A^2\ell_\mu\ell_\nu$$

(27) と (29) の $\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\rho)(\partial_\alpha\ell_\sigma)$ と $\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho\ell_\beta)(\partial_\sigma\ell_\alpha)$ はそれぞれ

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\rho)(\partial_\alpha\ell_\sigma) = (\partial_\beta\ell^\alpha)(\partial_\alpha\ell^\beta)$$

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho\ell_\beta)(\partial_\sigma\ell_\alpha) = (\partial_\rho\ell^\sigma)(\partial_\sigma\ell^\rho) = (\partial_\beta\ell^\alpha)(\partial_\alpha\ell^\beta)$$

ここで，最後の等号では $\rho \to \beta$，$\sigma \to \alpha$ の入れ替えを行った．よって，これら二つは同じものである．

次に同様のマイナスの項は (29) では

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell_\rho)(\partial_\sigma\ell_\alpha) = \eta^{\beta\sigma}(\partial_\beta\ell^\alpha)(\partial_\sigma\ell_\alpha)$$

一方，(27) では

$$\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\rho\ell_\beta)(\partial_\alpha\ell_\sigma) = \eta^{\alpha\rho}(\partial_\rho\ell^\sigma)(\partial_\alpha\ell_\sigma) = \eta^{\sigma\rho}(\partial_\rho\ell^\alpha)(\partial_\sigma\ell_\alpha) = \eta^{\sigma\beta}(\partial_\beta\ell^\alpha)(\partial_\sigma\ell_\alpha)$$

ここで 2 番目の等号では $\sigma \to \alpha$，$\alpha \to \sigma$ の入れ替えを行い，3 番目の等号では $\rho \to \beta$ の入れ替えを行った．その結果前のものと同じになることが分かる．

よって (III) の結果はすなわち (7.15b) の後半の結果は

$$\Big[6A^2 + 2(\partial_\beta\ell^\alpha)(\partial_\alpha\ell^\beta) - 2\eta^{\sigma\beta}(\partial_\beta\ell^\alpha)(\partial_\sigma\ell_\alpha)\Big]\,\ell_\mu\ell_\nu.$$

更に，(7.15b) の先頭の 2 を 1 としたことにより，(7.15b) 後半の結果は $(1/2)\times$ としなければならない．よって，(III) の結果は

$$\Big[3A^2 + (\partial_\beta\ell^\alpha)(\partial_\alpha\ell^\beta) - \eta^{\sigma\beta}(\partial_\beta\ell^\alpha)(\partial_\sigma\ell_\alpha)\Big]\,\ell_\mu\ell_\nu. \tag{31}$$

となるので，最終的に前半の結果 (24) と加えると，(7.24) が得られる．ただし，(24) で

$$-2LA + 2\ell^\alpha(\partial_\alpha A) = 2\partial_\alpha\ell^\alpha)A + 2\ell^\alpha(\partial_\alpha A) = 2\partial_\alpha(\ell^\alpha A)$$

とする．

□

（本文に戻る）　(7.24) はスカラー方程式

$$2\partial_\alpha(\ell^\alpha A) - A^2 + (\partial_\beta \ell^\alpha)(\partial_\alpha \ell^\beta) - (\partial_\beta \ell^\alpha)(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\alpha) = 0. \tag{7.25}$$

を意味している．

そこでまず，(7.20) と (7.22) を使って第 3 項を簡単にする．

$$\begin{aligned}(\partial_\beta \ell^\alpha)(\partial_\alpha \ell^\beta) = \partial_\alpha\left[(\partial_\beta \ell^\alpha)\ell^\beta\right] - (\partial_\alpha\partial_\beta \ell^\alpha)\ell^\beta = \partial_\alpha(-A\ell^\alpha) + (\partial_\beta L)\ell^\beta \\ = \partial_\alpha[(L-A)\ell^\alpha] + L^2.\end{aligned} \tag{7.26}$$

導出：

$$\partial_\alpha(-A\ell^\alpha) + (\partial_\beta L)\ell^\beta = \partial_\alpha(-A\ell^\alpha) + \partial_\alpha(L\ell^\alpha) - L\partial_\alpha \ell^\alpha = \partial_\alpha([L-A]\ell^\alpha) + L^2$$

□

（本文に戻る）　同様に，4 番目の項は (7.9) を使って

$$(\partial_\beta \ell^\alpha)(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\alpha) = \partial_\beta(\ell^\alpha \eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\alpha) - \ell^\alpha\partial_\beta(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\alpha) = -\ell^\alpha\partial_\beta(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\alpha), \tag{7.27}$$

m の一次のオーダーの方程式をもっと簡単にする事ができる：(7.23) を展開する．

$$\begin{aligned}&-\ell_\mu\partial_\beta(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\nu) - \ell_\nu\partial_\beta(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\mu) + 2(\eta^{\beta\alpha}\partial_\alpha \ell_\mu)(\partial_\beta \ell_\nu) \\ &= [\partial_\mu(L+A)]\ell_\nu + [\partial_\nu(L+A)]\ell_\mu + (L+A)(\partial_\nu \ell_\mu + \partial_\mu \ell_\nu).\end{aligned} \tag{7.28}$$

導出：

(7.23) の左辺

$$\begin{aligned}-\Box(\ell_\mu\ell_\nu) = -\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta(\ell_\mu\ell_\nu) = -\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\left[(\partial_\beta \ell_\mu)\ell_\nu + \ell_\mu(\partial_\beta \ell_\nu)\right] \\ = -\eta^{\alpha\beta}\left[(\partial_\beta \ell_\mu)(\partial_\alpha \ell_\nu) + \ell_\nu(\partial_\alpha\partial_\beta \ell_\mu) + (\partial_\alpha \ell_\mu)(\partial_\beta \ell_\nu) + \ell_\mu(\partial_\alpha\partial_\beta \ell_\nu)\right]\end{aligned}$$

ここで括弧 [　] 内の 2 番目と 4 番目は

$$-\ell_\nu(\partial_\alpha\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta \ell_\mu) - \ell_\mu(\partial_\alpha\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta \ell_\nu) = -\ell_\nu(\partial_\beta\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\mu) - \ell_\mu(\partial_\beta\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\nu)$$

最後で，$\alpha \to \beta,\ \ \beta \to \tau$ の添字の表記替えを行った．これで，(7.28) 左辺の第 1 項と第 2 項が得られた．

更に，括弧 [　] 内第 1 項と第 3 項は

$$-\eta^{\alpha\beta}\left[(\partial_\beta \ell_\mu)(\partial_\alpha \ell_\nu) + (\partial_\alpha \ell_\mu)(\partial_\beta \ell_\nu)\right]$$

$$= -\Big[\eta^{\alpha\beta}(\partial_\beta \ell_\mu)(\partial_\alpha \ell_\nu) + \eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \ell_\mu)(\partial_\beta \ell_\nu)\Big]$$

$$= -\Big[\eta^{\beta\alpha}(\partial_\alpha \ell_\mu)(\partial_\beta \ell_\nu) + \eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \ell_\mu)(\partial_\beta \ell_\nu)\Big] = -2(\eta^{\beta\alpha}\partial_\alpha \ell_\mu)(\partial_\beta \ell_\nu)$$

2 番目の等号の後括弧 [ ] 内第 1 項で $\alpha \to \beta$, $\beta \to \alpha$ の添字の表記替えを行った．こうして，(7.28) 左辺の第 3 項が得られた．

(7.28) 右辺は明らか．

□

（本文に戻る） (7.28) に ℓ^μ を掛けて縮約すると

$$-\ell_\nu \ell^\mu \partial_\beta(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\mu) = [\partial_\mu(L+A)]\ell^\mu \ell_\nu + (L+A)\underbrace{\ell^\mu(\partial_\mu \ell_\nu)}_{(-A\ell_\nu)}$$

$$= [\partial_\mu(L+A)]\ell^\mu \ell_\nu - (L+A)A\ell_\nu. \tag{7.29}$$

ここで共通因子である ℓ_ν を外すと

$$-\ell^\mu \partial_\beta(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\mu) = [\partial_\mu(L+A)]\ell^\mu - (L+A)A$$

$$= \partial_\mu[(L+A)\ell^\mu] - (\partial_\mu \ell^\mu)(L+A)\ell^\mu - (L+A)A$$

$$= \partial_\mu[(L+A)\ell^\mu] + L^2 - A^2 \tag{7.30}$$

こうして (7.25) の第 4 項すなわち (7.27) は (7.30) で $\mu \to \alpha$ として

$$(\partial_\beta \ell^\alpha)(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\alpha) = -\ell^\alpha \partial_\beta(\eta^{\beta\tau}\partial_\tau \ell_\alpha) = \partial_\alpha[(L+A)\ell^\alpha] + L^2 - A^2 \tag{7.31}$$

となる（Adler では右辺で α とするところを μ のままにしている）．

(7.26) と (7.31) を (7.25) へ代入すると

$$2\partial_\alpha(\ell^\alpha A) - A^2 + \partial_\alpha[(L-A)\ell^\alpha] + L^2 - [\partial_\alpha[(L+A)\ell^\alpha] + L^2 - A^2].$$

$$= -A^2 + \partial_\alpha[(L+A)\ell^\alpha] + L^2 - \partial_\alpha[(L+A)\ell^\alpha] - L^2 + A^2$$

$$= 0, \tag{7.32}$$

となり，m の 1 次のオーダーの式 (7.23) が満たされるならば，m の 2 次のオーダーの式 (7.25) は恒等的に成立している．よって，場の方程式の全内容は (7.23) に含まれている．

4　定常なケースでの場の方程式

定常な場合，すなわち時間依存がない場合，場の方程式を一つの複素関数に対する２つの偏微分方程式へと帰着できる．m の１次のオーダーの式 (7.23) に対する代数計算により単純化がなされる．

以下の式により，3-ベクトル λ_j を導入する：

$$\ell_\mu = \ell_0(1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \tag{7.33}$$

ℓ_μ は平坦な空間のヌルベクトルなので ($\ell_\mu \ell_\nu \eta^{\mu\nu} = 0$)，$\lambda_j$ は平坦な空間の単位ベクトルである：$|\boldsymbol{\lambda}|^2 = 1$．$\lambda_j$ で m の１次のオーダーの式 (7.23) を表すと

$$\nabla^2(\ell_0^2) = 0, \qquad \mu = \nu = 0. \tag{7.34a}$$

$$\nabla^2(\ell_0^2 \lambda_j) = \partial_j[(L + A)\ell_0], \qquad \mu = 0, \quad \nu = j \neq 0. \tag{7.34b}$$

$$\nabla^2(\ell_0^2 \lambda_i \lambda_j) = \partial_j[(L + A)\ell_0 \lambda_i] + \partial_i[(L + A)\ell_0 \lambda_j], \quad \mu = i \neq 0, \;\; \nu = j \neq 0. \tag{7.34c}$$

となる．よって，やるべきことは ℓ_0 と λ_i を求めることである．

導出

(7.23) の左辺は

$$\Box = \partial_0 \partial_0 - \nabla^2$$

であるので，定常であるという仮定より $\mu = \nu = 0$ の場合

$$-\Box(\ell_\mu \ell_\nu) = \nabla^2(\ell_0^2)$$

同じく右辺は時間による偏微分商となるのでゼロである．

$\mu = i \neq 0$，$\nu = j \neq 0$ の場合，(7.23) の左辺は

$$\nabla^2(\ell_0 \ell_j) = \nabla^2(\ell_0 \ell_0 \lambda_j) = \nabla^2(\ell_0^2 \lambda_j)$$

右辺は時間による偏微分商は消えるので j による項のみ．

$\mu = i \neq 0$，$\nu = j \neq 0.$ の場合，左辺右辺ともそのまま．

$\Box$

（本文に戻る）

(7.34a)，(7.34b) を使って (7.34c) を展開すると

$$\partial_j \lambda_i + \partial_i \lambda_j = \frac{2\ell_0}{L + A} \partial_k \lambda_i \partial_k \lambda_j \equiv \frac{1}{p} \partial_k \lambda_i \partial_k \lambda_j, \tag{7.35}$$

このセクションでは繰り返しでる添字については和をとる．(7.35) では k について和をとる．

導出

まず，(7.34b) について

$$\nabla^2(\ell_0^2\lambda_j) = (\nabla^2\ell_0^2)\lambda_j + \ell_0^2(\nabla^2\lambda_j) = \ell_0^2(\nabla^2\lambda_j) = \partial_j[(L+A)\ell_0]$$

これを使い

$$\ell_0^2(\nabla^2\lambda_j)\lambda_i = \partial_j[(L+A)\ell_0\lambda_i] - (L+A)\ell_0(\partial_j\lambda_i) \tag{32}$$

(7.34c) の左辺は

$$\nabla^2(\ell_0^2\lambda_i\lambda_j) = (\nabla^2\ell_0^2)(\lambda_i\lambda_j) + \ell_0^2\nabla^2(\lambda_i\lambda_j) = \ell_0^2\nabla^2(\lambda_i\lambda_j) = \ell_0^2\partial_k\partial_k(\lambda_i\lambda_j)$$

$$= \ell_0^2\partial_k\Big[(\partial_k\lambda_i)\lambda_j + \lambda_i(\partial_k\lambda_j)\Big]$$

$$= \ell_0^2\Big[(\partial_k\partial_k\lambda_i)\lambda_j + (\partial_k\lambda_i)(\partial_k\lambda_j) + (\partial_k\lambda_j)(\partial_k\lambda_i) + (\partial_k\partial_k\lambda_j)\lambda_i\Big]$$

$$= \ell_0^2\Big[(\partial_k\partial_k\lambda_i)\lambda_j + 2(\partial_k\lambda_i)(\partial_k\lambda_j) + (\partial_k\partial_k\lambda_j)\lambda_i\Big]$$

$$= \ell_0^2(\nabla^2\lambda_i)\lambda_j + \ell_0^2(\nabla^2\lambda_j)\lambda_i + 2\ell_0^2(\partial_k\lambda_i)(\partial_k\lambda_j)$$

ここで，先頭の 2 項に (32) を使うと (7.34c) の左辺は

$$\partial_i[(L+A)\ell_0\lambda_j] - (L+A)\ell_0(\partial_i\lambda_j) + \partial_j[(L+A)\ell_0\lambda_i] - (L+A)\ell_0(\partial_j\lambda_i)$$

$$+2\ell_0^2(\partial_k\lambda_i)(\partial_k\lambda_j)$$

一方右辺は

$$\partial_j[(L+A)\ell_0\lambda_i] + \partial_i[(L+A)\ell_0\lambda_j]$$

であるから，左辺の第 1, 3 項と右辺が相殺し

$$-(L+A)\ell_0(\partial_i\lambda_j) - (L+A)\ell_0(\partial_j\lambda_i) + 2\ell_0^2(\partial_k\lambda_i)(\partial_k\lambda_j) = 0$$

を得る．よって，(7.35) が得られた．

□

（本文に戻る）　このように重力場の方程式が (7.34a),(7.34b)，(7.35) によって記述された．

一つのパラメータは含まれて３いるが $\partial_i\lambda_j$ を λ_k の関数として (7.35) を解く．(7.35) を 3×3 行列 M を使って表すと

$$M + M^T = \frac{1}{p}MM^T. \tag{7.36}$$

λ_i の長さは一定なので，$|\boldsymbol{\lambda}|^2 = 1$ であるから

$$\frac{1}{2}\partial_k(\lambda_i\lambda_i) = \lambda_i(\partial_k\lambda_i) = 0, \qquad M^T\boldsymbol{\lambda} = 0. \tag{7.37}$$

$$\lambda_i\partial_i\lambda_0 = -A. \tag{7.38}$$

$\nu = k \neq 0$ とすると

$$\ell_0\lambda_j\partial_j\lambda_k + \lambda_k\lambda_j\partial_j\ell_0 = A\lambda_k. \tag{7.39}$$

これらを組み合わせると

$$(\partial_j\lambda_k)\lambda_j = 0, \qquad M\boldsymbol{\lambda} = 0, \tag{7.40}$$

を得る．

導出

(7.39) がどのようにして得られたか不明．(7.40) 式は異なる方法で得られる．

(7.35) の両辺に λ_j をかけると

$$\lambda_j\partial_j\lambda_i + \underbrace{\lambda_j\partial_i\lambda_j}_{0} = \frac{1}{p}\partial_k\lambda_i\underbrace{\lambda_j\partial_k\lambda_j}_{0} = 0,$$

よって $(\partial_j\lambda_k)\lambda_j = 0$

□

（本文に戻る） $\boldsymbol{\lambda}$ の関数である M に対する式 (7.36), (7.37), (7.40) を，行列計算のみで解こうとする．任意に与えられた点で 3×3 の回転行列 R を考え， $\boldsymbol{\lambda}$ を x 軸に写像する．つまり

$$R\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}', \qquad \boldsymbol{\lambda}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.41}$$

$$M' = RMR^T, \qquad M'^T = RM^TR^T. \tag{7.42}$$

$\boldsymbol{\lambda}'$ の具体的な形から

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}, \qquad N' = \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}, \tag{7.43}$$

推測

　説明が不十分と思う．内山著などを参考にして推測する．
R は直交行列であるから

$$R^T R = RR^T = \boldsymbol{I} \longrightarrow \boldsymbol{\lambda} = R^T \boldsymbol{\lambda}'$$

よって

$$M\boldsymbol{\lambda} = MR^T\boldsymbol{\lambda}' = 0$$

R は直交行列であるから，おおざっぱには $R^T = R^{-1}$ で

$$M' = RMR^T = RMR^{-1} = M$$

と考えても良いが，M' としておく．このように考えた上で，

$$M' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M'\boldsymbol{\lambda}' = R(MR^T\boldsymbol{\lambda}') = RM\boldsymbol{\lambda} = 0$$

同様に

$$M'^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M'^T\boldsymbol{\lambda}' = R(M^TR^T\boldsymbol{\lambda}') = RM^T\boldsymbol{\lambda} = 0$$

ここで (7.37) を使った．
いま，M' を

$$M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

とする

$$M' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} = 0$$

よって，$a = d = g = 0$．一方

$$M'^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

よって，$b = c = 0$ となり，M' は (7.43) の形となる．

$\square$

（本文に戻る）　M', N' は (7.36) に従う．

$$N + N'^T = \frac{1}{p} N' N'^T. \tag{7.44}$$

この式は実行列 $\boldsymbol{I} - (1/p)N'$ がユニタリーであることを示している：

$$U = \boldsymbol{I} - \frac{1}{p} N', \qquad UU^T = U^T U = \boldsymbol{I} \tag{7.45}$$

N' は 2×2 で実であるから，U は proper 回転か improper 回転である，すなわち回転とその逆である．よって

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ |U| &= \begin{cases} 1 & \text{proper} \\ -1 & \text{improper} \end{cases}, \end{aligned} \tag{7.46}$$

ここでは proper 回転のみを扱う．これから N' と M' は

$$\begin{aligned} N' &= p \begin{pmatrix} 1 - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix} \\ M' &= p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.47}$$

$M = R^T M' R$ とすることで元の座標系へ戻すことができる．M' による簡単な形は以下の通りである．

$$M_{ik} = R_{\ell i} M'_{\ell j} R_{jk}$$

$$= p(1-\cos\theta)(R_{2i}R_{2k}+R_{3i}R_{3k})+p\sin\theta(R_{2i}R_{3k}-R_{3i}R_{2k}). \qquad (7.48)$$

導出

馬鹿げているが実際に行列を表現し計算してみる．先ず，$M'R$ から

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

X の 1 行はゼロである．また p は表記しない．

$$\begin{aligned} X_{21} &= R_{21}(1-\cos\theta)+R_{31}\sin\theta, \\ X_{22} &= R_{22}(1-\cos\theta)+R_{32}\sin\theta, \\ X_{23} &= R_{23}(1-\cos\theta)+R_{33}\sin\theta, \\ \\ X_{31} &= -R_{21}\sin\theta+R_{31}(1-\cos\theta), \\ X_{32} &= -R_{22}\sin\theta+R_{32}(1-\cos\theta), \\ X_{33} &= -R_{23}\sin\theta+R_{33}(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

次に $M = R^TX$ として

$$M = R^TX = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= R_{21}X_{21}+R_{31}X_{31} = R_{21}[R_{21}(1-\cos\theta)+R_{31}\sin\theta] \\ &\qquad +R_{31}[-R_{21}\sin\theta+R_{31}(1-\cos\theta)] \\ &= (1-\cos\theta)(R_{21}R_{21}+R_{31}R_{31})+\sin\theta(R_{21}R_{31}-R_{31}R_{21}) \\ M_{12} &= R_{21}X_{22}+R_{31}X_{32} = R_{21}[R_{22}(1-\cos\theta)+R_{32}\sin\theta] \\ &\qquad +R_{31}[-R_{22}\sin\theta+R_{32}(1-\cos\theta)] \\ &= (1-\cos\theta)(R_{21}R_{22}+R_{31}R_{32})+\sin\theta(R_{21}R_{32}-R_{31}R_{22}) \end{aligned}$$

この段階で (7.48) が分かる．

□

（本文に戻る）　R は回転で直交行列であり，また右手系のトライアドベクトルの考えから

$$\begin{aligned} R_{1i}R_{1k}+R_{2i}R_{2k}+R_{3i}R_{3k} &= \delta_{ik}, \\ R_{2i}R_{3k}-R_{3i}R_{2k} &= \epsilon_{ik\ell}R_{1\ell}, \end{aligned} \qquad (7.49)$$

の関係式を得る．(2 番目の関係式がトライアドベクトル, triad of vector の性質らしいが，これに関する情報がない．大げさに言うと日本にはこれに関する情報が欠落しているのでは？　この証明らしきものが内山著にあるので，以下とりあえず，理解無く式だけを並べ記す.）このように，M_{ik} が θ と R の第 1 行，R_{1i} により表現することができた:

$$M_{ik} = p(1-\cos\theta)(\delta_{ik} - R_i R_k) + p\sin\theta\epsilon_{ik\ell}R_\ell, \tag{7.50}$$

ベクトル $\boldsymbol{R}$ を $R_{1i} = R_i$ として (7.41) の第 1 番目の要素を

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 1, \tag{7.51}$$

すなわち

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \cos\alpha = 1, \qquad \alpha = 0 \tag{7.52}$$

であるから $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\lambda}$ もしくは $R_i = \lambda_i$ となる．これから M を以下のように書くことができた.

$$M_{ik} = \partial_k\lambda_i = p(1-\cos\theta)(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k) + p\sin\theta\epsilon_{ik\ell}\lambda_\ell, \tag{7.53}$$

この式は大変有用である；非線形の関係式 (7.35) を $\partial_k\lambda_i$ に対する単純な形で表現するものである．これ以降の進展がこの式に大きくかかっている．

導出

内山著によりこれまでの内容を確認する.

(7.41) より $R\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}'$，これに左から R^T をかけて $R^TR\boldsymbol{\lambda} = R^T\boldsymbol{\lambda}'$，$R^TR = \boldsymbol{I}$ であるら $\boldsymbol{\lambda} = R^T\boldsymbol{\lambda}'$ すなわち

$$\boldsymbol{\lambda} = R^T\boldsymbol{\lambda}' = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \end{pmatrix} = R_{1i}$$

よって

$$\lambda_i = R_{1i} \tag{33}$$

さて $\det(R) = 1$ であるから ϵ_{ijk} を使って

$$1 = \epsilon_{ijk}R_{ai}R_{bj}R_{ck}$$

と表せる．もしくは

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{abc}R_{ai}R_{bj}R_{ck}$$

$$= \lambda_i(R_{2j}R_{3k}-R_{3j}R_{2k})+\lambda_j(R_{2k}R_{3i}-R_{3k}R_{2i})+\lambda_k(R_{2i}R_{3j}-R_{3i}R_{2j}), \quad (34)$$

まず，$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{abc}R_{ai}R_{bj}R_{ck}$ を確認しておく．

$$1 = \epsilon_{123} = \epsilon_{abc}R_{a1}R_{b2}R_{c3} = \epsilon_{123}R_{11}R_{22}R_{33}+\epsilon_{132}R_{11}R_{32}R_{23}+\epsilon_{312}R_{31}R_{12}R_{23}$$

$$+\epsilon_{321}R_{31}R_{22}R_{13} + +\epsilon_{231}R_{21}R_{32}R_{13} + \epsilon_{213}R_{21}R_{12}R_{33}$$

$$= R_{11}R_{22}R_{33}-R_{11}R_{32}R_{23}+R_{31}R_{12}R_{23}-R_{31}R_{22}R_{13}+R_{21}R_{32}R_{13}-R_{21}R_{12}R_{33} \quad (35)$$

つぎに

$$-1 = \epsilon_{132} = \epsilon_{abc}R_{a1}R_{b3}R_{c2} = \epsilon_{123}R_{11}R_{23}R_{32}+\epsilon_{132}R_{11}R_{33}R_{22}+\epsilon_{312}R_{31}R_{13}R_{22}$$

$$+\epsilon_{321}R_{31}R_{23}R_{12} + \epsilon_{231}R_{21}R_{33}R_{12} + \epsilon_{213}R_{21}R_{13}R_{32}$$

$$= R_{11}R_{23}R_{32}-R_{11}R_{33}R_{22}+R_{31}R_{13}R_{22}-R_{31}R_{23}R_{12}+R_{21}R_{33}R_{12}-R_{21}R_{13}R_{32} \quad (36)$$

(35) と (36) とを比較することによりこの関係式が成立することが分かる．

$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{abc}R_{ai}R_{bj}R_{ck}$ を展開する：

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{123}R_{1i}R_{2j}R_{3k} + \epsilon_{132}R_{1i}R_{3j}R_{2k} + \epsilon_{312}R_{3i}R_{1j}R_{2k}$$

$$+\epsilon_{321}R_{3i}R_{2j}R_{1k} + \epsilon_{231}R_{2i}R_{3j}R_{1k} + \epsilon_{213}R_{2i}R_{1j}R_{3k}$$

$$= R_{1i}R_{2j}R_{3k}-R_{1i}R_{3j}R_{2k}+R_{3i}R_{1j}R_{2k}-R_{3i}R_{2j}R_{1k}+R_{2i}R_{3j}R_{1k}-R_{2i}R_{1j}R_{3k}$$

ここで (33) の $\lambda_i = R_{1i}$ をつかって上の式を書き換える

$$= \lambda_i R_{2j}R_{3k} - \lambda_i R_{3j}R_{2k} + R_{3i}\lambda_j R_{2k} - R_{3i}R_{2j}\lambda_k + R_{2i}R_{3j}\lambda_k - R_{2i}\lambda_j R_{3k}$$

$$= \lambda_i(R_{2j}R_{3k} - R_{3j}R_{2k}) + \lambda_j(R_{3i}R_{2k} - R_{2i}R_{3k}) + \lambda_k(R_{2i}R_{3j} - R_{3i}R_{2j})$$

つまり

$$\epsilon_{ijk} = \lambda_i(R_{2j}R_{3k} - R_{3j}R_{2k}) + \lambda_j(R_{3i}R_{2k} - R_{2i}R_{3k}) + \lambda_k(R_{2i}R_{3j} - R_{3i}R_{2j}) \quad (37)$$

ところで $R\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}'$ より

$$R_{1k}\lambda_k = \lambda_k\lambda_k = 1, \quad R_{2k}\lambda_k = 0, \quad R_{3k}\lambda_k = 0. \quad (38)$$

$$R\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}\lambda_1 + R_{12}\lambda_2 + R_{13}\lambda_3 \\ R_{21}\lambda_1 + R_{22}\lambda_2 + R_{23}\lambda_3 \\ R_{31}\lambda_1 + R_{32}\lambda_2 + R_{33}\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(34) の両辺に λ_k をかける（k による縮約）.

$$\epsilon_{ijk}\lambda_k = \lambda_i(R_{2j}\underbrace{R_{3k}\lambda_k}_{0} - R_{3j}\underbrace{R_{2k}\lambda_k}_{0}) + \lambda_j(\underbrace{R_{2k}\lambda_k}_{0}R_{3i} - \underbrace{R_{3k}\lambda_k}_{0}R_{2i})$$
$$+\underbrace{\lambda_k\lambda_k}_{1}(R_{2i}R_{3j} - R_{3i}R_{2j}),$$

よって，(7.49) の第 2 式が示された．内山著でも R が直交変換行列であるという条件だけである．Adler の言う直交行列での the columns form a right-handed triad of vectors imply (7.49) とはこのことか？なお

$$[R_{2i}, R_{3k}] = \epsilon_{ik\ell}R_{1\ell}$$

などと交換子積を使っても表現できる.

$\square$

（本文に戻る）

(7.53) の代数的な内容を考察することで，このセクションの冒頭で述べた，二つの単純な偏微分方程式を導く．そこでまずは (7.53) の p と θ を α と β で書き換える：

$$\partial_k\lambda_i = \alpha(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k) + \beta\epsilon_{ik\ell}\lambda_\ell, \tag{7.54}$$

この α と β がメトリックを素晴らしい方法で決定していく.

$i = k$ とすることで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\lambda} = 2\alpha, \tag{7.55}$$

ϵ_{jki} をかけて i と k で和をとると

$$\nabla\times\boldsymbol{\lambda} = -2\beta\boldsymbol{\lambda}. \tag{7.56}$$

導出

(7.55) は簡単である.

$$\delta_{kk} = 3, \quad \lambda_k\lambda_k = 1, \quad \epsilon_{kk\ell} = 0$$

より，(7.55) が得られる.

(7.56) は簡単だが面倒である.

$$\partial_k\lambda_i\epsilon_{jki} \overset{k\text{ で和}}{=} \partial_1\lambda_i\epsilon_{j1i} + \partial_2\lambda_i\epsilon_{j2i} + \partial_3\lambda_i\epsilon_{j3i}$$

$$\overset{i\text{ で和}}{=} \partial_1\lambda_2\epsilon_{j12} + \partial_1\lambda_3\epsilon_{j13} + \partial_2\lambda_1\epsilon_{j21} + \partial_2\lambda_3\epsilon_{j23} + \partial_3\lambda_1\epsilon_{j31} + \partial_3\lambda_2\epsilon_{j32}$$

$$= (\partial_1\lambda_2 - \partial_2\lambda_1)\epsilon_{j12} + (\partial_3\lambda_1 - \partial_1\lambda_3)\epsilon_{j31} + (\partial_2\lambda_3 - \partial_3\lambda_2)\epsilon_{j23} \tag{39}$$

一方，右辺は

$$\delta_{ik}\epsilon_{jki} \overset{k\text{ で和}}{=} \delta_{i1}\epsilon_{j1i} + \delta_{i2}\epsilon_{j2i} + \delta_{i3}\epsilon_{j3i} \overset{i\text{ で和}}{=} 0$$

$$\lambda_i\lambda_k\epsilon_{jki} \overset{k\text{ で和}}{=} \lambda_k\lambda_k\epsilon_{jkk} = 0$$

次に

$$\begin{aligned}\epsilon_{ik\ell}\lambda_\ell\epsilon_{jki} &= (\epsilon_{ik1}\lambda_1 + \epsilon_{ik2}\lambda_2 + \epsilon_{ik3}\lambda_3)\epsilon_{jki} \\ &\overset{k\text{ で和}}{=} \epsilon_{i21}\lambda_1\epsilon_{j2i} + \epsilon_{i31}\lambda_1\epsilon_{j3i} + \epsilon_{i12}\lambda_2\epsilon_{j1i} + \epsilon_{i32}\lambda_2\epsilon_{j3i} + \epsilon_{i13}\lambda_3\epsilon_{j1i} + \epsilon_{i23}\lambda_3\epsilon_{j2i} \\ &\overset{i\text{ で和}}{=} \epsilon_{321}\lambda_1\epsilon_{j23} + \epsilon_{231}\lambda_1\epsilon_{j32} + \epsilon_{312}\lambda_2\epsilon_{j13} + \epsilon_{132}\lambda_2\epsilon_{j31} + \epsilon_{213}\lambda_3\epsilon_{j12} + \epsilon_{123}\lambda_3\epsilon_{j21} \\ &= -\lambda_1\epsilon_{j23} + \lambda_1\epsilon_{j32} + \lambda_2\epsilon_{j13} - \lambda_2\epsilon_{j31} - \lambda_3\epsilon_{j12} + \lambda_3\epsilon_{j21} \\ &= -2\lambda_1\epsilon_{j23} - 2\lambda_2\epsilon_{j31} - 2\lambda_3\epsilon_{j12} \end{aligned} \tag{40}$$

(39) と (40) でおなじ j の値となるものを取り出すと例えば

$$(\partial_2\lambda_3 - \partial_3\lambda_2) = -2\lambda_1$$

となり，これはベクトル記号で書くと (7.56) である．

□

（本文に戻る）　$\boldsymbol{\lambda}$ のラプラシアンを 2 つの方法で作ってみる．第 1 の方法は (7.54) を x^k で微分する．

$$\nabla^2\boldsymbol{\lambda} = \nabla\alpha - \boldsymbol{\lambda}(\nabla\alpha\cdot\boldsymbol{\lambda}) - 2(\alpha^2+\beta^2)\boldsymbol{\lambda} + \nabla\beta\times\boldsymbol{\lambda}. \tag{7.57}$$

導出

$$\partial_k\lambda_i = \underbrace{\alpha(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k)}_{\text{(I)}} + \underbrace{\beta\epsilon_{ik\ell}\lambda_\ell}_{\text{(II)}}$$

(I) と (II) に分けて計算する．
(I) の計算

$$\partial_k\partial_k\lambda_i = \partial_k[\alpha(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k)] = (\partial_k\alpha)(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k) + \alpha[-(\partial_k\lambda_i)\lambda_k - \lambda_i\partial_k\lambda_k]$$

$$\begin{aligned} &= (\partial_i\alpha) - \lambda_i(\partial_k\alpha)\lambda_k - \alpha(\partial_k\lambda_i)\lambda_k - \alpha(2\alpha)\lambda_i \\ &= \nabla\alpha - (\nabla\alpha\cdot\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\lambda} - 2\alpha^2\boldsymbol{\lambda} - \alpha[\alpha\underbrace{(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k)\lambda_k}_{\text{(I}-1)} + \beta\underbrace{\epsilon_{ik\ell}\lambda_\ell\lambda_k}_{\text{(I}-2)}] \end{aligned} \tag{41}$$

(I-1) の計算

$$(\delta_{ik} - \lambda_i \lambda_k)\lambda_k = \delta_{ik}\lambda_k - \lambda_i \underbrace{\lambda_k \lambda_k}_{1} = \lambda_i - \lambda_i = 0$$

(I-2) の計算

$$\epsilon_{ik\ell}\lambda_\ell \lambda_k = [\epsilon_{ik1}\lambda_1 + \epsilon_{ik2}\lambda_2 + \epsilon_{ik3}\lambda_3]\lambda_k$$

$$\overset{k\text{で和}}{=} \epsilon_{i21}\lambda_1\lambda_2 + \epsilon_{i31}\lambda_1\lambda_3 + \epsilon_{i12}\lambda_2\lambda_1 + \epsilon_{i32}\lambda_2\lambda_3 + \epsilon_{i13}\lambda_3\lambda_1 + \epsilon_{i23}\lambda_3\lambda_2$$

$$= (\epsilon_{i21}\lambda_1\lambda_2 - \epsilon_{i21}\lambda_2\lambda_1) + (\epsilon_{i31}\lambda_1\lambda_3 - \epsilon_{i31}\lambda_3\lambda_1) + (\epsilon_{i32}\lambda_2\lambda_3 - \epsilon_{i32}\lambda_3\lambda_2) = 0$$

よって (I) の結果は

$$\nabla\alpha - (\nabla\alpha \cdot \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\lambda} - 2\alpha^2\boldsymbol{\lambda} \tag{42}$$

(II) の計算

$$\partial_k(\beta\epsilon_{ik\ell}\lambda_\ell) = \underbrace{(\partial_k\beta)\epsilon_{ik\ell}\lambda_\ell}_{(\mathrm{II}-1)} + \beta \underbrace{\epsilon_{ik\ell}\partial_k\lambda_\ell}_{(\mathrm{II}-2)}$$

(II-1) の計算

$$(\partial_k\beta)\epsilon_{ik\ell}\lambda_\ell = (\partial_k\beta)[\epsilon_{ik1}\lambda_1 + \epsilon_{ik2}\lambda_2 + \epsilon_{ik3}\lambda_3]$$

$$\overset{k\text{で和}}{=} (\partial_2\beta)\epsilon_{i21}\lambda_1 + (\partial_3\beta)\epsilon_{i31}\lambda_1 + (\partial_1\beta)\epsilon_{i12}\lambda_2 + (\partial_3\beta)\epsilon_{i32}\lambda_2$$

$$+ (\partial_1\beta)\epsilon_{i13}\lambda_3 + (\partial_2\beta)\epsilon_{i23}\lambda_3$$

$$= \epsilon_{i21}[(\partial_2\beta)\lambda_1 - (\partial_1\beta)\lambda_2] + \epsilon_{i31}[(\partial_3\beta)\lambda_1 - (\partial_1\beta)\lambda_3] + \epsilon_{i32}[(\partial_3\beta)\lambda_2 - (\partial_2\beta)\lambda_3]$$

$$= (\nabla\beta) \times \boldsymbol{\lambda} \tag{43}$$

(II-2) の計算

$$\epsilon_{ik\ell}\partial_k\lambda_\ell = \epsilon_{ik1}\partial_k\lambda_1 + \epsilon_{ik2}\partial_k\lambda_2 + \epsilon_{ik3}\partial_k\lambda_3$$

$$\overset{k\text{で和}}{=} \epsilon_{i21}\partial_2\lambda_1 + \epsilon_{i31}\partial_3\lambda_1 + \epsilon_{i12}\partial_1\lambda_2 + \epsilon_{i32}\partial_3\lambda_2 + \epsilon_{i13}\partial_1\lambda_3 + \epsilon_{i23}\partial_2\lambda_3$$

$$= \epsilon_{i21}(\partial_2\lambda_1 - \partial_1\lambda_2) + \epsilon_{i13}(\partial_1\lambda_3 - \partial_3\lambda_1) + \epsilon_{i32}(\partial_3\lambda_2 - \partial_2\lambda_3)$$

$$= \nabla \times \boldsymbol{\lambda} = -2\beta\boldsymbol{\lambda} \tag{44}$$

よって (II) の結果は (43) と (44) より

$$(\nabla\beta) \times \boldsymbol{\lambda} - 2\beta^2\boldsymbol{\lambda} \tag{45}$$

(42) と (45) より (7.57) が得られる．

□

（本文に戻る）　ベクトルの公式と (7.56) より

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\lambda}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\lambda}}_{2\alpha}) - \nabla^2 \boldsymbol{\lambda} \overset{(7.56)}{=} -2(\nabla \times \beta \boldsymbol{\lambda}). \tag{7.58}$$

(7.58) を $\nabla^2 \boldsymbol{\lambda}$ について解くと

$$\nabla^2 \boldsymbol{\lambda} = 2\nabla\alpha + 2(\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda}) - 4\beta^2 \boldsymbol{\lambda} \tag{7.59}$$

導出
(7.58) より

$$\nabla^2 \boldsymbol{\lambda} = 2\nabla\alpha + 2(\nabla \times \beta\boldsymbol{\lambda}) = 2\nabla\alpha + 2(\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda}) + 2\beta(\underbrace{\nabla \times \boldsymbol{\lambda}}_{-2\beta\boldsymbol{\lambda}})$$
$$= 2\nabla\alpha + 2(\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda}) - 4\beta^2 \boldsymbol{\lambda}$$

□

（本文に戻る） $\nabla^2 \boldsymbol{\lambda}$ に対する (7.57) と (7.59) を等値して

$$\nabla\alpha = -\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}(\nabla\alpha \cdot \boldsymbol{\lambda}) - 2(\alpha^2 - \beta^2)\boldsymbol{\lambda}, \tag{7.60}$$

これは，最終的に次の非常に重要な方程式を導く：

$$\nabla\alpha \cdot \boldsymbol{\lambda} = \beta^2 - \alpha^2, \tag{7.61a}$$

$$\nabla\alpha = (\beta^2 - \alpha^2)\boldsymbol{\lambda} - \nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda}, \tag{7.61b}$$

導出
(7.61a) は (7.60) に $\boldsymbol{\lambda}$ をかけて内積をとる．
(7.61b) は (7.61a) を (7.60) に代入することで得られる．

□

（本文に戻る）　(7.61) と同様の式が β についても得られる．(7.56) から $\beta\boldsymbol{\lambda}$ のダイバージェンスはゼロである．よって

$$\nabla \cdot (\beta\boldsymbol{\lambda}) = \beta(\nabla \cdot \boldsymbol{\lambda}) + \nabla\beta \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0, \tag{7.62}$$

(7.55) から

$$\nabla\beta\cdot\boldsymbol{\lambda}=-2\alpha\beta, \tag{7.63}$$

となり，(7.61a) に類似する．次に (7.61b) と $\boldsymbol{\lambda}$ とのベクトル積をつくる．それを $\nabla\beta$ について解くと

$$\nabla\beta=\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\beta)+(\nabla\alpha\times\boldsymbol{\lambda}), \tag{7.64}$$

を得る．

導出

(7.61b) に $\boldsymbol{\lambda}$ をベクトル積

$$\nabla\alpha\times\boldsymbol{\lambda}=(\beta^2-\alpha^2)\underbrace{\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\lambda}}_{0}-(\nabla\beta\times\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\lambda} \tag{46}$$

ここで**ベクトルの公式**

$$1)\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

を，上の式 (46) 右辺最後の項を以下のように入れ換えて適用する

$$\begin{aligned}-(\nabla\beta\times\boldsymbol{\lambda})\times&=\boldsymbol{\lambda}\times(\nabla\beta\times\boldsymbol{\lambda})=-\boldsymbol{\lambda}\times(\boldsymbol{\lambda}\times\nabla\beta)\\&=-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\beta)\boldsymbol{\lambda}+(\underbrace{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}}_{1})\nabla\beta\end{aligned}$$

これを式 (46) 右辺最後の項に戻すと (7.64) が得られる．

□

（本文に戻る）　さらに (7.63) を使うと

$$\nabla\beta=-2\alpha\beta\boldsymbol{\lambda}+(\nabla\alpha\times\boldsymbol{\lambda}), \tag{7.65}$$

を得るが，これは (7.61b) に類似する．

(7.61) と (7.63)，(7.65) は非常に重要で，複素関数 $\gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$ を導入することでさらに凝縮した形で表せる：

$$\nabla\gamma\cdot\boldsymbol{\lambda}=-\gamma^2, \tag{7.66a}$$

$$\nabla\gamma=-\gamma^2\boldsymbol{\lambda}+\mathrm{i}(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda}). \tag{7.66b}$$

確認

$$(\nabla\alpha+\mathrm{i}\nabla\beta)\cdot\boldsymbol{\lambda}=-(\alpha+\mathrm{i}\beta)^2=\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta\mathrm{i}$$

次に

$$
\begin{aligned}
\nabla\alpha + \mathrm{i}\nabla\beta &= (\beta^2-\alpha^2)\boldsymbol{\lambda} - 2\alpha\beta\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda} + \mathrm{i}(\nabla\alpha + \mathrm{i}\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda} \\
&= (\beta^2-\alpha^2)\boldsymbol{\lambda} - \nabla\beta\times\boldsymbol{\lambda} + \mathrm{i}\left[-2\alpha\beta\boldsymbol{\lambda} + \nabla\alpha\times\boldsymbol{\lambda}\right]
\end{aligned}
$$

□

（本文に戻る）　この γ の導入は非常に重要であることを強調しておく．この導入によりアインシュタインの場の方程式を極端に単純化し，そして Kerr 解とシュワルツシルド解との関係を非常にわかりやすくしている．γ はメトリックを決定する．つまり ℓ_0 と λ_i を決定する．第 1 の微分方程式は (7.66b) から γ のラプラシアン方程式を作ることにより得られる．途中 (7.55) と (7.56) を使う：

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\gamma &= -\gamma^2\nabla\cdot\boldsymbol{\lambda} - 2\gamma\nabla\gamma\cdot\boldsymbol{\lambda} + \mathrm{i}\nabla\cdot(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda}) \\
&= -2\alpha\gamma^2 + 2\gamma^3 - \mathrm{i}\nabla\gamma\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\lambda}) \\
&= -2\alpha\gamma^2 + 2\gamma^3 - 2\beta\gamma^2\mathrm{i} \\
&= -2\gamma^2(\alpha + \mathrm{i}\beta - \gamma) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{7.67}
$$

確認

以下の 2 つの**ベクトルの公式**を使う．

$$
2)\ \ \nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}), \qquad 3)\ \ \nabla\times(\nabla f) = 0
$$

問題は 1 行目の右辺最後の項 $\nabla\cdot(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})$ だけである．

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda}) &\overset{\text{公式 }2}{=} (\nabla\times\nabla\gamma)\cdot\boldsymbol{\lambda} - \nabla\gamma\cdot(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda}) \overset{\text{公式 }3}{=} -\nabla\gamma\cdot(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda}) \\
&\overset{(7.56)}{=} +2\beta\nabla\gamma\cdot\boldsymbol{\lambda} \overset{(7.66\mathrm{a})}{=} -2\beta\gamma^2
\end{aligned}
$$

□

（本文に戻る）　このように γ は複素調和関数である．第 2 の微分方程式は (7.66b) の 2 乗から得られる．途中 (7.66a) を使う．

$$
(\nabla\gamma)^2 = \gamma^4 - (\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})^2 = \gamma^4 - ((\nabla\gamma)^2 - \gamma^4) = \gamma^4, \tag{7.68}
$$

導出
この式では省略した書き方を行っている．また以下の 2 つの**ベクトルの公式**を使う：

4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$,　　5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

注意しなければならないのは (7.66b) を使ってはならない．証明しようとしている問題に，その問題の性質を使ったことになる．

$$\begin{aligned}(\nabla\gamma)^2&=\Big[-\gamma^2\boldsymbol{\lambda}+\mathrm{i}(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})\Big]\cdot\Big[-\gamma^2\boldsymbol{\lambda}+\mathrm{i}(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})\Big]\\&=\gamma^4\underbrace{(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda})}_{1}-2\mathrm{i}\underbrace{(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\lambda}}_{\text{計算 I}}-\underbrace{(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})\cdot(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})}_{\text{計算 II}}\end{aligned}$$

計算 I

$$\mathrm{i}(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\lambda}\overset{\text{公式 4)}}{=}(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\lambda})\cdot\nabla\gamma=0$$

計算 II

$$(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})\cdot(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})\overset{\text{公式 5)}}{=}(\nabla\gamma\cdot\nabla\gamma)(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda})-(\nabla\gamma\cdot\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\gamma)=(\nabla\gamma)^2-\gamma^4$$

計算 I と計算 II の結果を元に戻すと

$$(\nabla\gamma)^2=\gamma^4-((\nabla\gamma)^2-\gamma^4)=-(\nabla\gamma)^2+2\gamma^4$$

よって $(\nabla\gamma)^2$ を左辺へ移項して (7.68) が得られる．

□

（本文に戻る）　これら 2 つの微分方程式が γ を決定する．しかしながら，最大限に明確にしたいので，より便利な $\omega=1/\gamma$ により (7.68) を書き直し，(7.67) を繰り返すと

$$\nabla^2\gamma=0,\quad(\nabla\omega)^2=1,\ \ \omega=\frac{1}{\gamma},\tag{7.69}$$

確認

$$\nabla\omega=\nabla\left(\frac{1}{\gamma}\right)=-\frac{1}{\gamma^2}\nabla\gamma$$

よって

$$(\nabla\omega)^2=\frac{1}{\gamma^4}(\nabla\gamma)^2=1.$$

$\square$

（本文に戻る）　λ に対する (7.66) を ω で書き直すことができて，それは今の目的のためには γ よりは便利なのである．(7.66) を ω で書き直すと

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\omega = \boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\omega^* = 1, \qquad \nabla\omega = \boldsymbol{\lambda} + \mathrm{i}(\nabla\omega\times\boldsymbol{\lambda}) \tag{7.70}$$

確認

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\omega = \boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \boldsymbol{\lambda}\cdot\left(\frac{-1}{\gamma^2}\right)\nabla\gamma = \frac{-1}{\gamma^2}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\gamma) = 1$$

複素共役に関してはまず γ^* について (7.66a) を確認しておく：
左辺

$$\nabla\gamma^*\cdot\boldsymbol{\lambda} = \nabla(\alpha - \mathrm{i}\beta)\cdot\boldsymbol{\lambda} = \nabla\alpha\cdot\boldsymbol{\lambda} - \mathrm{i}\nabla\beta\cdot\boldsymbol{\lambda}$$

右辺

$$-(\gamma^*)^2 = -(\alpha - \mathrm{i}\beta)^2 = -(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta\mathrm{i}$$

両辺の実部と虚部を比較すると (7.61a) と (7.63) が成立している．よって

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\gamma^* = -(\gamma^*)^2$$

が成立する．これから

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\omega^* = \boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\gamma^*}\right) = \boldsymbol{\lambda}\cdot\left(\frac{-1}{(\gamma^*)^2}\right)\nabla\gamma^* = \frac{-1}{(\gamma^*)^2}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\gamma^*) = \frac{-1}{(\gamma^*)^2}[-(\gamma^*)^2] = 1$$

$\nabla\omega = \boldsymbol{\lambda} + \mathrm{i}(\nabla\omega\times\boldsymbol{\lambda})$ についても同様.

$\square$

（本文に戻る）　こうして，以下の式を得る：

$$\nabla\omega\times\nabla\omega^* = -\mathrm{i}[\nabla\omega + \nabla\omega^*] + B\boldsymbol{\lambda}, \tag{7.71}$$

ここで B の具体的な形は必要ない.
導出
ここでも以下の**ベクトルの公式**を使う：

6)　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = |\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{d}|\boldsymbol{c} - |\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|\boldsymbol{d}, \qquad |\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}| = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

$$\nabla\omega\times\nabla\omega^* = [\boldsymbol{\lambda} + \mathrm{i}(\nabla\omega\times\boldsymbol{\lambda})]\times[\boldsymbol{\lambda} - \mathrm{i}(\nabla\omega^*\times\boldsymbol{\lambda})]$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\lambda}}_{0} + \mathrm{i} \underbrace{(\nabla\omega \times \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\lambda}}_{\text{計算 I}} - \mathrm{i} \underbrace{\boldsymbol{\lambda} \times (\nabla\omega^* \times \boldsymbol{\lambda})}_{\text{計算 II}} + \underbrace{(\nabla\omega \times \boldsymbol{\lambda}) \times (\nabla\omega^* \times \boldsymbol{\lambda})}_{\text{計算 III}}$$

計算 I

$$\begin{aligned}(\nabla\omega \times \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\lambda} \times (\nabla\omega \times \boldsymbol{\lambda}) &\overset{\text{公式 1)}}{=} -(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})\nabla\omega + \underbrace{(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla\omega)}_{(7.70)} \boldsymbol{\lambda} \\ &= -\nabla\omega + \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \tag{47}$$

計算 II

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda} \times (\nabla\omega^* \times \boldsymbol{\lambda}) &\overset{\text{公式 1)}}{=} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda})\nabla\omega^* - \underbrace{(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla\omega^*)}_{(7.70)} \boldsymbol{\lambda} \\ &= \nabla\omega^* - \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \tag{48}$$

計算 III

$$\begin{aligned}(\nabla\omega \times \boldsymbol{\lambda}) \times (\nabla\omega^* \times \boldsymbol{\lambda}) &\overset{\text{公式 6)}}{=} \underbrace{|\nabla\omega \ \ \boldsymbol{\lambda} \ \ \boldsymbol{\lambda}|}_{0} \nabla\omega^* - |\nabla\omega \ \ \boldsymbol{\lambda} \ \ \nabla\omega^*| \boldsymbol{\lambda} \\ &= [(\nabla\omega \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot \nabla\omega^*] \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \tag{49}$$

よって (47)，(48)，(49) より

$$\nabla\omega \times \nabla\omega^* = -\mathrm{i}[\nabla\omega + \nabla\omega^*] + \underbrace{(2\mathrm{i} + [(\nabla\omega \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot \nabla\omega^*])}_{B} \boldsymbol{\lambda}$$

□

（本文に戻る） B の式としての (7.71) を解くには (7.71) に $\nabla\omega$ をかけて (7.70) を使えばよい：

$$B = \mathrm{i}[1 + \nabla\omega \cdot \nabla\omega^*]. \tag{7.72}$$

確認

$$(\nabla\omega \times \nabla\omega^*) \cdot \nabla\omega = -\mathrm{i}[\nabla\omega + \nabla\omega^*] \cdot \nabla\omega + B\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla\omega$$

上の式の左辺：

$$(\nabla\omega \times \nabla\omega^*) \cdot \nabla\omega = -(\nabla\omega^* \times \nabla\omega) \cdot \nabla\omega \overset{\text{公式 4)}}{=} -(\nabla\omega \times \nabla\omega) \cdot \nabla\omega^* = 0$$

右辺

$$-\mathrm{i}[\underbrace{\nabla\omega\cdot\nabla\omega}_{(7.69)}+\nabla\omega^*\cdot\nabla\omega]+B\underbrace{\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\omega}_{(7.70)}=-\mathrm{i}[1+\nabla\omega^*\cdot\nabla\omega]+B$$

よって (7.72) が得られる．

□

（本文に戻る）　こうして最終的に $\boldsymbol{\lambda}$ は (7.71) から以下のように求められる：

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{\nabla\omega+\nabla\omega^*-\mathrm{i}\nabla\omega\times\nabla\omega^*}{1+\nabla\omega\cdot\nabla\omega^*}. \tag{7.73}$$

残っているのは γ を使って ℓ_0 を求めることである．関数 ℓ_0 は (7.34a) と (7.34b) を満たしていなければならない．これから

$$\ell_0^2=\mathrm{Re}(\gamma)=\alpha,. \tag{7.74}$$

またはその倍数が (7.34c) の解と一致するこれらの方程式の唯一の解であることを示す.

(7.69) から α が調和関数であり，よって直ちにこれが (7.34a) を満たしていることがわかる．

$\ell_0^2=\alpha$ が (7.34b) の解であることを示すために，試しに $\ell_0^2=\alpha$ として (7.34b) の左辺を計算してみる．

$$\nabla^2(\alpha\lambda_j)=\alpha\nabla^2\lambda_j+2(\partial_k\alpha)(\partial_k\lambda_j) \tag{7.75}$$

一方，同じ式が (7.54) と (7.59) を使うと

$$\nabla^2(\alpha\lambda_j)=4\alpha\nabla\alpha+\underbrace{2\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\boldsymbol{\lambda}}_{!!!!}+2\alpha(\nabla\beta\times\boldsymbol{\lambda})+2\beta(\nabla\alpha\times\boldsymbol{\lambda}), \tag{7.76}$$

となる．ただし，

Adler の原著では右辺第 2 項が $2\alpha(\alpha^2+\beta^2)\boldsymbol{\lambda}$ とされ v 誤植である！

面倒な計算なのでおおもとに間違いがあると非常に厳しい．原著に記さ

れた最終結果を得るには (7.76) で訂正したものである必要がある．

導出

(7.75) 右辺第 1 項は

$$\alpha\nabla^2\lambda_j = 2\alpha\nabla\alpha + 2\alpha(\nabla\beta\times\boldsymbol{\lambda}) - 4\alpha\beta^2\boldsymbol{\lambda} \tag{50}$$

(7.75) 右辺第 2 項は (7.54) を使って

$$\begin{aligned}&2(\partial_k\alpha)\Big[\alpha(\delta_{jk}-\lambda_j\lambda_k)+\beta\epsilon_{jk\ell}\lambda_\ell\Big]\\ &=\underbrace{2(\partial_k\alpha)\alpha\delta_{jk}}_{\text{計算 I}}-\underbrace{2\alpha(\partial_k\alpha)\lambda_k\lambda_j}_{\text{計算 II}}+\underbrace{2(\partial_k\alpha)\beta\epsilon_{jk\ell}\lambda_\ell}_{\text{計算 III}}\end{aligned}$$

計算 I

$$2(\partial_k\alpha)\alpha\delta_{jk} = 2(\partial_j\alpha)\alpha\delta_{jj} = 2\alpha\nabla\alpha. \tag{51}$$

計算 II

$$\begin{aligned}-2(\partial_k\alpha)\lambda_k\lambda_j &= -2\alpha\underbrace{(\nabla\alpha\cdot\boldsymbol{\lambda})}_{(7.61a)}\lambda_j = -2\alpha(\beta^2-\alpha^2)\lambda_j\\ &= 2\alpha(\alpha^2-\beta^2)\lambda_j\end{aligned} \tag{52}$$

計算 III

すでに何度も出てきているので省略：

$$2(\partial_k\alpha)\beta\epsilon_{jk\ell}\lambda_\ell = 2\beta(\nabla\alpha\times\boldsymbol{\lambda}) \tag{53}$$

(50)，(51)，(52)，(53) を加えると (7.76) を得る．

□

（本文に戻る）　(7.61b) と (7.65) を使うと

$$\nabla^2(\alpha\boldsymbol{\lambda}) = 2\alpha\nabla\alpha + 2\beta\nabla\beta = \nabla(\alpha^2+\beta^2), \tag{7.77}$$

を得る．

導出

(7.76) 右辺の第 1 項の $4\alpha\nabla\alpha$ から $2\alpha\nabla\alpha$ を引き出し，(7.61b) により書き換えると

$$2\alpha\nabla\alpha = 2\alpha(\beta^2-\alpha^2)\boldsymbol{\lambda} - 2\alpha(\nabla\beta\times\boldsymbol{\lambda}) \tag{54}$$

また (7.76) 右辺の $2\alpha(\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda})$ を (7.65) により

$$2\beta(\nabla\alpha \times \boldsymbol{\lambda}) = 2\beta(\nabla\beta + 2\alpha\beta\boldsymbol{\lambda}) = 2\beta\nabla\beta + 4\alpha\beta^2\boldsymbol{\lambda} \tag{55}$$

(54) と (55) を (7.76) の右辺の対応する項に代入すると

$$2\alpha\nabla\alpha + \Big[2\alpha(\beta^2 - \alpha^2)\boldsymbol{\lambda} - 2\alpha(\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda})\Big] + 2\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)\boldsymbol{\lambda} + 2\alpha(\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda})$$

$$+ \Big[2\beta\nabla\beta + 4\alpha\beta^2\boldsymbol{\lambda}\Big] = 2\alpha\nabla\alpha + 2\beta\nabla\beta$$

となり，(7.77) が得られた．これからも分かるように (7.76) 右辺の第 2 項は $2\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)\boldsymbol{\lambda}$ であることが分かる．

□

（本文に戻る）　次に (7.34b) の右辺がいま得た (7.77) 右辺となっているかを確認する必要がある．$\alpha = p(1 - \cos\theta)$，$\beta = p\sin\theta$ であるから

$$(\alpha^2 + \beta^2 = 2p(1 - \cos\theta) = 2p\alpha. \tag{7.78}$$

(7.35) での p の定義より

$$p = \frac{L + A}{2\ell_0}. \tag{7.79}$$

これより $L + A$ と α, β との関係が分かる：

$$L + A = \frac{\ell_0}{\alpha}(\alpha^2 + \beta^2). \tag{7.80}$$

$\ell_0^2 = \alpha$ であるから (7.34b) の右辺は

$$\partial_j[(L + A)\ell_0] = \partial_j\left[\frac{\ell_0^2}{\alpha}(\alpha^2 + \beta^2)\right] = \partial_j(\alpha^2 + \beta^2). \tag{7.81}$$

こうして $\ell_0^2 = \alpha$ が解であることが分かった．これに定数をかけた関数も解であることは簡単にわかる．

5　シュワルツシルド解と Kerr 解

定常で縮退したメトリックに対する Einstein の場の方程式を解きたい．その方程式が極端に単純化され (7.69)，(7.73)，(7.74) となった．(7.69) の最も簡単な解は

$$\gamma = \alpha = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{7.82}$$

である．(7.73)，(7.74) より

$$\ell_0^2 = \frac{1}{r}, \qquad \lambda_1 = \frac{x}{r}, \;\; \lambda_2 = \frac{y}{r}, \;\; \lambda_3 = \frac{z}{r}. \tag{7.83}$$

導出

$\omega = r$ である．ただし基底ベクトルを省略して書く．

$$\nabla\omega = \partial_i \omega \quad \partial_1 r = \partial_1 \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{r}$$

また，

$$\nabla\omega = \nabla\omega^*, \qquad \therefore\;\; \nabla\omega + \nabla\omega^* = 2\nabla\omega, \qquad \nabla\omega \times \nabla\omega^* = 0,$$

$$\text{分母}: \qquad 1 + \underbrace{\nabla\omega\cdot\nabla\omega^*}_{1} = 2$$

したがって，(7.73) から λ_i が得られる．

$\square$

（本文に戻る） (7.84) と (7.85) 略

//

Kerr 解に移る．中心を z 軸の虚数方向ずらすことを考える：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\mathrm{i}a)^2}}, \tag{7.86}$$

これが Kerr 解を表している．

この関数から (7.73) と (7.74) を使って，ℓ_0^2 と λ_i を求める事ができる．まず ω を実部と虚部に分ける：

$$\omega = \rho + \mathrm{i}\sigma = \sqrt{r^2 - a^2 - 2az\mathrm{i}}, \qquad r^2 = x^2+y^2+z^2. \tag{7.87}$$

これを 2 乗したのち，実部と虚部から

$$\rho^2 - \sigma^2 = r^2 - a^2, \qquad \sigma = -\frac{az}{\rho}. \tag{7.88}$$

この二つの式から

$$\rho^4 - \rho^2(r^2-a^2) - a^2z^2 = 0.. \tag{7.89}$$

確認

$$\rho^2 - \left(-\frac{az}{\rho}\right)^2 = r^2 - a^2$$

$\square$

（本文に戻る） 解の公式より

$$\rho^2 = \frac{r^2 - a^2}{2} + \left[\frac{(r^2 - a^2)^2}{4} + a^2 z^2\right]^{1/2}. \tag{7.90}$$

ただしここで $\pm$ のプラスを選択した．なぜなら $r \gg a$ のときに，$\rho \to r$ である必要がある．これは (7.87) に対する必要性である．γ と $\ell_0^2 = \mathrm{Re}(\gamma)$ を得ることは簡単である：

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\rho + \mathrm{i}\sigma} = \frac{\rho}{\rho^2 + \sigma^2} - \mathrm{i}\frac{\sigma}{\rho^2 + \sigma^2}, \\ \ell_0^2 &= \mathrm{Re}(\gamma) = \frac{\rho}{\rho^2 + \sigma^2} = \frac{\rho^2}{\rho^4 + a^2 z^2}. \end{aligned} \tag{7.91}$$

(7.73) からベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ を求めるために，(7.78) により $\nabla\omega$ を計算する：

$$\nabla\omega = \frac{\mathbf{r} - \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\omega} \tag{7.92}$$

ここで $\hat{\mathbf{k}}$ は z 軸 $(0, 0, z)$ に沿った単位 3 次元ベクトルである．

導出

x, y, z 軸の基底ベクトルをそれぞれ $\hat{\mathbf{i}}$，$\hat{\mathbf{j}}$，$\hat{\mathbf{k}}$ とすると

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}}\partial_1 + \hat{\mathbf{j}}\partial_2 + \hat{\mathbf{k}}\partial_3 = \hat{\mathbf{i}}\partial_x + \hat{\mathbf{j}}\partial_y + \hat{\mathbf{k}}\partial_z$$

で表される．よって $\nabla\omega$ の場合，例えば

$$\partial_x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - 2\mathrm{i}az} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - 2\mathrm{i}az}} = \frac{x}{\omega}$$

また

$$\partial_z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - 2\mathrm{i}az} = \frac{z - \mathrm{i}a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - 2\mathrm{i}az}} = \frac{z - \mathrm{i}a}{\omega}$$

よって

$$\nabla\omega = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} - \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\omega} = \frac{\mathbf{r} - \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\omega}, \qquad \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

$\square$

（本文に戻る）　これを (7.73) へ代入すると

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{2[\rho\mathbf{r} - a\sigma\hat{\mathbf{k}} + a(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{k}})]}{|\omega|^2 + r^2 + a^2}. \tag{7.93}$$

導出
(7.73) 分子の和の部分

$$\nabla\omega + \nabla\omega^* = \frac{\mathbf{r} - \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\omega} + \frac{\mathbf{r} + \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\omega^*} = \frac{\mathbf{r} - \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\rho + \mathrm{i}\sigma} + \frac{\mathbf{r} + \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\rho - \mathrm{i}\sigma}$$

$$= \frac{(\rho - \mathrm{i}\sigma)(\mathbf{r} - \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}})}{\rho^2 + \sigma^2} + \frac{(\rho + \mathrm{i}\sigma)(\mathbf{r} + \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}})}{\rho^2 + \sigma^2}$$

$$= \frac{\rho\mathbf{r} - \mathrm{i}\sigma\mathbf{r} - \mathrm{i}\rho a\hat{\mathbf{k}} - a\sigma\hat{\mathbf{k}} + \rho\mathbf{r} + \mathrm{i}\sigma\mathbf{r} + \mathrm{i}\rho a\hat{\mathbf{k}} - a\sigma\hat{\mathbf{k}}}{\rho^2 + \sigma^2}$$

$$= \frac{2\rho\mathbf{r} - 2a\sigma\hat{\mathbf{k}}}{\rho^2 + \sigma^2}$$

(7.73) 分子ベクトル積の部分

$$-\mathrm{i}\nabla\omega \times \nabla\omega^* = -\mathrm{i}\frac{\mathbf{r} - \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\omega} \times \frac{\mathbf{r} + \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\omega^*}$$

$$= -\mathrm{i}\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{r} - \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{r} + \mathrm{i}a\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{k}} + a^2\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}}{\rho^2 + \sigma^2}$$

$$= -\mathrm{i}\frac{+\mathrm{i}a\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{k}} + \mathrm{i}a\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{k}}}{\rho^2 + \sigma^2} = -\mathrm{i}\frac{2\mathrm{i}a\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{k}}}{\rho^2 + \sigma^2}$$

$$= \frac{2a\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{k}}}{\rho^2 + \sigma^2}$$

(7.73) 分母

$$1 + \nabla\omega\cdot\nabla\omega^* = 1 + \frac{\mathbf{r} - \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\omega}\cdot\frac{\mathbf{r} + \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}}{\omega^*}$$

$$= 1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - \mathrm{i}a\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r} + \mathrm{i}a\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{k}} + a^2\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}}}{\omega\omega^*}$$

$$= \frac{|\omega|^2 + r^2 + a^2}{\rho^2 + \sigma^2}$$

以上の結果をまとめることで (7.93) が得られる．

□

（本文に戻る）　さらに (7.87) と (7.90) に注意することで

$$
\begin{aligned}
|\omega|^2 &= \sqrt{(r^2-a^2)^2+4a^2z^2} = 2\rho^2-(r^2-a^2), \\
|\omega|^2+r^2+a^2 &= 2(\rho^2+a^2)
\end{aligned}
\tag{7.94}
$$

確認

$$\omega\omega^* = \sqrt{(r^2-a^2)-2\mathrm{i}az}\cdot\sqrt{(r^2-a^2)+2\mathrm{i}az} = \sqrt{(r^2-a^2)^2+4a^2z^2}$$

(7.90) の両辺を 2 倍すると

$$2\rho^2 = (r^2-a^2)+\sqrt{(r^2-a^2)+4a^2z^2}$$

よって

$$\sqrt{(r^2-a^2)+4a^2z^2} = 2\rho^2-(r^2-a^2)$$

これより，第 1 式が示せた．これを使い

$$|\omega|^2+r^2+a^2 = 2\rho^2-(r^2-a^2)+r^2+a^2 = 2(\rho^2+a^2)$$

□

（本文に戻る）　これらにより $\boldsymbol{\lambda}$ が以下の非常に単純な形

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\rho}{\rho^2+a^2}\left[\mathbf{r}+\frac{a^2z}{\rho^2}\hat{\mathbf{k}}+\frac{a}{\rho}(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{k}})\right] \tag{7.95}$$

で得られる．
右辺第 2 項では (7.88) を使って σ を消去している．成分の形で表すと

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\rho x+ay}{\rho^2+a^2}, \\
\lambda_2 &= \frac{\rho y-ax}{\rho^2+a^2}, \\
\lambda_3 &= \frac{z}{\rho},
\end{aligned}
\tag{7.96}
$$

導出
$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1\hat{\mathbf{i}} + \lambda_2\hat{\mathbf{j}} + \lambda_3\hat{\mathbf{k}}$ である．また $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ である．
よって

$$a\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{k}} = a(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) \times \hat{\mathbf{k}} = ax(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}) + ay(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}})$$

$$= -ax(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}) + ay(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}) = -ax\hat{\mathbf{j}} + ay\hat{\mathbf{i}}$$

であるから

$$\lambda_1\hat{\mathbf{i}} = \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}\left(x\hat{\mathbf{i}} + \frac{ay}{\rho}\hat{\mathbf{i}}\right) = \frac{\rho x + ay}{\rho^2 + a^2}\hat{\mathbf{i}},$$

λ_2 も同様.
λ_3 については

$$\lambda_3\hat{\mathbf{k}} = \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}\left(z + \frac{a^2 z}{\rho^2}\right)\hat{\mathbf{k}} = \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}\left(\frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2}\right)z\hat{\mathbf{k}} = \frac{z}{\rho}\hat{\mathbf{k}}$$

□

（本文に戻る） r が a よりずっと大きい場合，Kerr 解はシュワルツシルド解に接近する．

(7.5) と (7.33) で定義した量から Kerr の線要素を表示しておく：

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2$$

$$-\frac{2m\rho^3}{\rho^4 + a^2 z^2}\left[\mathrm{d}x^0 + \frac{\rho}{a^2 + \rho^2}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) + \frac{a}{a^2 + \rho^2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) + \frac{z}{\rho}\mathrm{d}z\right]^2. \tag{7.97}$$

これが 1963 年に Kerr によって得られた形である．原著に誤植あり．右辺 [ ] 内第 3 項で修正済み．この誤植は次のセクションでの計算に大きな影響を及ぼす！

6 他の座標系

縮退したメトリックテンソル (7.5) はシュワルツシルド解の Eddington 形式を Kerr 解 (7.97) へ一般化するための便利なテンソルである．我々はこれが回転する物体の軸対称な重力場を表していることを示す．

我々は動径座標として，r よりも (7.87) で導入した ρ を選択する．より具体的には (7.90) で与えられている．角度座標 θ としては極座標

$$\cos\theta = \frac{z}{\rho}, \tag{7.98}$$

をとる．次に角度座標 φ として，エレガントな複素形式

$$(\rho - \mathrm{i}a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta = x + \mathrm{i}y, \tag{7.99}$$

とする（この形についてはこのセクションの最後に触れる）．最後に時間座標として以下の形を選択する：

$$u = x^0 + \rho, \tag{7.100}$$

線素 (7.97) を新しい座標で表現してみる．平坦な空間の部分は (7.98) と (7.99) から以下のように簡単に得られる：

$$\mathrm{d}z^2 = (\cos\theta\mathrm{d}\rho - \rho\sin\theta\mathrm{d}\theta)^2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 &= |\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y)|^2 = |\mathrm{d}(\rho - \mathrm{i}a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta|^2\\ &= (\sin\theta\mathrm{d}\rho + a\sin\theta\mathrm{d}\varphi + \rho\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2 + (\rho\sin\theta\mathrm{d}\varphi - a\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2,\end{aligned} \tag{7.101}$$

導出

$\mathrm{d}z^2$ 原著に誤植あり（修正済み：$+ \to -$）．

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}(\rho\cos\theta) = \cos\theta\mathrm{d}\rho - \rho\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

より．

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = |\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y)|^2 = (\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y)$$

これにならって

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}[(\rho - \mathrm{i}a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta]\\ &\qquad = (\mathrm{d}\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta + (\rho - \mathrm{i}a)(\mathrm{i}\mathrm{d}\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta + (\rho - \mathrm{i}a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(\cos\theta\mathrm{d}\theta)\end{aligned}$$

上の式の複素共役を作らが，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ については共役をとると消えるので，とった形を再度記しておく：

$$\sin\theta(\mathrm{d}\rho) + \mathrm{i}(\rho - \mathrm{i}a)\sin\theta(\mathrm{d}\varphi) + (\rho - \mathrm{i}a)\cos\theta(\mathrm{d}\theta)$$

これの複素共役は

$$\sin\theta(\mathrm{d}\rho) - \mathrm{i}(\rho+\mathrm{i}a)\sin\theta(\mathrm{d}\varphi) + (\rho+\mathrm{i}a)\cos\theta(\mathrm{d}\theta)$$

よって,

$$[\sin\theta(\mathrm{d}\rho) + \mathrm{i}(\rho-\mathrm{i}a)\sin\theta(\mathrm{d}\varphi) + (\rho-\mathrm{i}a)\cos\theta(\mathrm{d}\theta)]$$
$$\times[\sin\theta(\mathrm{d}\rho) - \mathrm{i}(\rho+\mathrm{i}a)\sin\theta(\mathrm{d}\varphi) + (\rho+\mathrm{i}a)\cos\theta(\mathrm{d}\theta)]$$

これを展開すると

(1) $\sin^2\theta(\mathrm{d}\rho)^2 + \mathrm{i}(\rho-\mathrm{i}a)\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho) + (\rho-\mathrm{i}a)\sin\theta\cos\theta(\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho)$

(2) $-\mathrm{i}(\rho+\mathrm{i}a)\sin^2\theta(\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi) + (\rho^2+a^2)\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2 - \mathrm{i}(\rho^2+a^2)\sin\theta\cos\theta(\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi)$

(3) $\sin\theta\cos\theta(\rho+\mathrm{i}a)(\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta) + \mathrm{i}(\rho^2+a^2)\sin\theta\cos\theta(\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta) + (\rho^2+a^2)\cos^2\theta(\mathrm{d}\theta)^2$

(1)+(2)+(3) より

$$\sin^2\theta(\mathrm{d}\rho)^2 + 2a\sin^2\theta(\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi) + 2\rho\sin\theta\cos\theta(\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta) + (\rho^2+a^2)\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2$$
$$+(\rho^2+a^2)\cos^2\theta(\mathrm{d}\theta)^2 \tag{56}$$

これは (7.101) 最右辺を 2 乗したものと同じである.

□

（本文に戻る）

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}|x+\mathrm{i}y|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{d}[(\rho^2+a^2)\sin^2\theta]$$
$$= (\rho^2+a^2)\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta + \rho\sin^2\theta\mathrm{d}\rho, \tag{7.102a}$$
$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = -\mathrm{Im}[(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}(x-\mathrm{i}y)]$$
$$= -\mathrm{Im}\left\{[(\rho-\mathrm{i}a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta]\mathrm{d}[(\rho+\mathrm{i}a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\theta]\right\}$$
$$= (\rho^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi + a\sin^2\theta\mathrm{d}\rho, \tag{7.102b}$$
$$z\mathrm{d}z = \rho\cos^2\theta\mathrm{d}\rho - \rho^2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta, \tag{7.102c}$$

確認

(7.102a)

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)$$

一方

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\mathrm{d}[(\rho-\mathrm{i}a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta(\rho+\mathrm{i}a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\theta]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{d}[(\rho^2+a^2)\sin 2\theta]$$

よって (7.102a) が示された.
(7.102b)

$$-\mathrm{Im}\left\{(\rho-\mathrm{i}a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta\cdot\mathrm{d}\left[(\rho+\mathrm{i}a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\sin\theta\right]\right\}$$

$$= -\mathrm{Im}\left\{(\rho-\mathrm{i}a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta\left[\sin\theta\mathrm{d}\rho - \mathrm{i}(\rho+\mathrm{i}a)\sin\theta\mathrm{d}\varphi + (\rho+\mathrm{i}a)\cos\theta\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right\}$$

$$= -\mathrm{Im}\left\{(\rho-\mathrm{i}a)\sin\theta\left[\sin\theta\mathrm{d}\rho - \mathrm{i}(\rho+\mathrm{i}a)\sin\theta\mathrm{d}\varphi + (\rho+\mathrm{i}a)\cos\theta\mathrm{d}\theta\right]\right\}$$

$$= -\mathrm{Im}\left\{(\rho-\mathrm{i}a)\sin^2\theta\mathrm{d}\rho - \mathrm{i}(\rho^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi + (\rho^2+a^2)\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right\}$$

より (7.102b) が示せた.
(7.102c) は明らか.

□

（本文に戻る）

$$\frac{2m\rho^3}{\rho^4+a^2z^2} = \frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}, \qquad \mathrm{d}x^0 = \mathrm{d}u - \mathrm{d}\rho, \tag{7.103}$$

(7.101)ー(7.103) を (7.97) へ代入すると新しい座標系での線素を得る：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \left(1-\frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}u^2 - (\rho^2+a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2 \\ &\quad - \left[(\rho^2+a^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}\right]\mathrm{d}\varphi^2 - 2\mathrm{d}u\mathrm{d}\rho \\ &\quad - \frac{4m\rho a\sin^2\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi - 2a\sin^2\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.\end{aligned} \tag{7.104}$$

導出

(7.104) の導出であるが，これ以前の式に誤植があり苦労した（Kerr 解 (7.97) のクロスターム）．(7.101) により

$$\mathrm{d}z^2 = \cos^2\theta\mathrm{d}\rho^2 - 2\rho\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta + \rho^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta^2$$

これと (56) より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\\
&=\sin^2\theta(\mathrm{d}\rho)^2+2a\sin^2\theta(\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi)+2\rho\sin\theta\cos\theta(\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta)+(\rho^2+a^2)\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2\\
&+(\rho^2+a^2)\cos^2\theta(\mathrm{d}\theta)^2+\cos^2\theta(\mathrm{d}\rho)^2-2\rho\cos\theta\sin\theta(\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta)+\rho^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\theta)^2\\
&=(\mathrm{d}\rho)^2+(\rho^2+a^2\cos^2\theta)(\mathrm{d}\theta)^2+(\rho^2+a^2)\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2+2a\sin^2\theta(\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi),
\end{aligned}
\tag{57}
$$

一方．(7.97) の括弧 [ ] 内は (7.102) を使って

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{d}u-\mathrm{d}\rho)+\frac{\rho}{\rho^2+a^2}\Big[(\rho^2+a^2)\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta+\rho\sin^2\theta\mathrm{d}\rho\Big]\\
&+\frac{a}{\rho^2+a^2}\Big[(\rho^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi+a\sin^2\theta\mathrm{d}\rho\Big]+\cos^2\theta\mathrm{d}\rho-\rho\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\\
&=(\mathrm{d}u-\mathrm{d}\rho)+\rho\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2+a^2}\mathrm{d}\rho+a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi+\frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2+a^2}\mathrm{d}\rho\\
&\qquad+\cos^2\theta\mathrm{d}\rho-\rho\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\mathrm{d}u-\mathrm{d}\rho+\frac{\rho^2+a^2}{\rho^2+a^2}\sin^2\theta\mathrm{d}\rho+a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi+\cos^2\theta\mathrm{d}\rho\\
&=\mathrm{d}u+a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
\tag{58}
$$

よって，(7.97) 右辺の括弧 [ ] の項は (58) と (7.103) より

$$
\begin{aligned}
&\frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}(\mathrm{d}u+a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi)^2\\
&=\frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}(\mathrm{d}u)^2+\frac{4ma\rho\sin^2\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi+\frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}(\mathrm{d}\varphi)^2,
\end{aligned}
\tag{59}
$$

これら (57) と (59) を使うと (7.97) は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2&=(\mathrm{d}u-\mathrm{d}\rho)^2-(\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2-\frac{2m\rho^3}{\rho^4+a^2z^2}\Big[\quad ***\quad\Big]^2\\
&=(\mathrm{d}u)^2-2\mathrm{d}u\mathrm{d}\rho+(\mathrm{d}\rho)^2-\Big[(\mathrm{d}\rho)^2+(\rho^2+a^2\cos^2\theta)(\mathrm{d}\theta)^2\\
&\qquad+(\rho^2+a^2)\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2+2a\sin^2\theta(\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi)\Big]\\
&-\left[\frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}(\mathrm{d}u)^2+\frac{4ma\rho\sin^2\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi+\frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}(\mathrm{d}\varphi)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right)(\mathrm{d}u)^2 - 2\mathrm{d}u\mathrm{d}\rho - (\rho^2 + a^2\cos^2\theta)(\mathrm{d}\theta)^2 \\
&- \left[(\rho^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right](\mathrm{d}\varphi)^2 - 2a\sin^2\theta(\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi) \\
&- \frac{4ma\rho\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

が得られる．これは (7.104) である．

□

（本文に戻る）　(7.104) の線素は φ に依存しないことから軸対称であることが分かる．この線素を更に簡略化できる．我々は最終的に Kerr 解が何か回転する物体が形成する，いわば物体のまわりで引きずられている時空を表していることを示したい．(4.83) で示したように，線素は平坦な空間のメトリックテンソルの中に一つの非対角項 $\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t$ を含んでいる形をしている．これが回転を意味している．以下，線素をより簡単にするために，(7.104) から $\mathrm{d}u\mathrm{d}\rho$ や $\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi$ を消去する座標系を導入しよう．

線素 (7.104) を次のように書く：

$$
\mathrm{d}s^2 = g_{00}\mathrm{d}u^2 + g_{22}\mathrm{d}\theta^2 + g_{33}\mathrm{d}\varphi^2 + 2g_{03}\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi + 2g_{01}\mathrm{d}u\mathrm{d}\rho + 2g_{13}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi, \tag{7.105}
$$

以下の座標変換を考える：

$$
\begin{aligned}
c\hat{t} &= u - A(\rho), \qquad \mathrm{d}u = c\mathrm{d}\hat{t} + A'\mathrm{d}\rho \\
\hat{\varphi} &= \varphi - B(\rho), \qquad \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\hat{\varphi} + B'\mathrm{d}\rho,
\end{aligned} \tag{7.106}
$$

(7.106) を (7.105) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= g_{00}c^2\mathrm{d}\hat{t}^2 + (g_{00}{A'}^2 + g_{33}{B'}^2 + 2g_{01}A' + 2g_{13}B' + 2g_{03}A'B')\mathrm{d}\rho^2 \\
&+ g_{22}\mathrm{d}\theta^2 + g_{33}\mathrm{d}\hat{\varphi}^2 + 2g_{03}c\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}\hat{\varphi} \\
&+2\underbrace{(A'g_{03} + B'g_{33} + g_{13})}_{0}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\hat{\varphi} + 2\underbrace{(A'g_{00} + B'g_{03} + g_{01})}_{0}c\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}\rho,
\end{aligned} \tag{7.107}
$$

確認

(1) $g_{00}\mathrm{d}u^2 = g_{00}c^2\mathrm{d}\hat{t}^2 + 2g_{00}A'c\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}\rho + g_{00}{A'}^2\mathrm{d}\rho^2$

(2) $g_{33}\mathrm{d}\varphi^2 = g_{33}(\mathrm{d}\hat{\varphi} + B'\mathrm{d}\rho)^2 = g_{33}(\mathrm{d}\hat{\varphi}^2 + 2B'\mathrm{d}\hat{\varphi}\mathrm{d}\rho + {B'}^2\mathrm{d}\rho^2)$

$$= g_{33}\mathrm{d}\hat{\varphi}^2 + 2g_{33}B'\mathrm{d}\hat{\varphi}\mathrm{d}\rho + g_{33}{B'}^2\mathrm{d}\rho^2$$

(3) $2g_{01}\mathrm{d}u\mathrm{d}\rho = 2g_{01}c\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}\rho + 2g_{01}A'\mathrm{d}\rho^2$

(4) $2g_{03}\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi = 2g_{03}(c\mathrm{d}\hat{t} + A'\mathrm{d}\rho)(\mathrm{d}\hat{\varphi} + B'\mathrm{d}\rho)$

$$= 2g_{03}c\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}\hat{\varphi} + 2g_{03}A'\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\hat{\varphi} + 2g_{03}B'c\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}\rho + 2g_{03}A'B'\mathrm{d}\rho^2$$

(5) $2g_{13}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 2g_{13}\mathrm{d}\rho(\mathrm{d}\hat{\varphi} + B'\mathrm{d}\rho) = 2g_{13}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\hat{\varphi} + 2g_{13}B'\mathrm{d}\rho^2$

(1) から (5) までで，$\mathrm{d}\rho^2$ の項を集めると

$$g_{00}{A'}^2 + g_{33}{B'}^2 + 2g_{01}A' + 2g_{03}A'B' + 2g_{13}B'$$

同じく $\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\hat{\varphi}$ の項を集めると

$$2g_{33}B + 2g_{03}A' + 2g_{13}$$

同じく $c\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}\rho$ の項を集めると

$$2g_{00}A' + 2g_{01} + 2g_{03}B'$$

□

（本文に戻る）　$\mathrm{d}\rho^2$ と $c\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}\rho$ の係数がゼロとなることから，二つの方程式より A', B' を決定すればよい.

$$\begin{aligned} A' &= \frac{g_{33}g_{01} - g_{03}g_{13}}{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}} = \frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho}, \\ B' &= \frac{g_{00}g_{13} - g_{03}g_{01}}{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}} = \frac{-a}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho}, \end{aligned} \tag{7.108}$$

確認

$$\begin{aligned} g_{00} &= \left(1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right), \\ g_{33} &= -\left[(\rho^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right], \\ g_{01} &= -1, \\ g_{03} &= -\frac{2ma\rho\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}, \\ g_{13} &= -a\sin^2\theta \end{aligned}$$

A' の分子 $g_{33}g_{01} - g_{03}g_{13}$ の計算

$$g_{33}g_{01} - g_{03}g_{13} = -\left[(\rho^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2 \sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right] \cdot (-1)$$

$$-\left(-\frac{2ma\rho\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right)(-a\sin^2\theta) = (\rho^2 + a^2)\sin^2\theta$$

B' の分子 $g_{00}g_{13} - g_{03}g_{01}$ の計算

$$g_{00}g_{13} - g_{03}g_{01} = \left(1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right)(-a\sin^2\theta) - \left(-\frac{2ma\rho\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right)(-1)$$

$$= -a\sin^2\theta$$

分母 $g_{03}^2 - g_{00}g_{33}$ の計算

$$g_{03}^2 - g_{00}g_{33} = \frac{4m^2a^2\rho^2\sin^4\theta}{(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)^2}$$

$$-\left(1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right)(-1)\left[(\rho^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right]$$

$$= \left(1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right)(\rho^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}$$

$$= (\rho^2 + a^2)\sin^2\theta - \frac{2m\rho(\rho^2 + a^2)\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}$$

$$= (\rho^2 + a^2)\sin^2\theta - \frac{2m\rho^3\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} - \frac{2m\rho a^2(1 - \sin^2\theta)\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}$$

$$= (\rho^2 + a^2)\sin^2\theta - \frac{2m\rho^3\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} - \frac{2m\rho a^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}$$

$$= (\rho^2 + a^2)\sin^2\theta - 2m\rho\frac{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta$$

$$= (\rho^2 + a^2 - 2m\rho)\sin^2\theta$$

この分母の計算に 2，3 時間費やした．最初の計算方針が間違っていた．分母の計算から始めたが収拾がつかず，分子の計算に切り替え，その結果から分母の形を推測した．上の計算での第 4 番目と 5 番目あたりの変形に気づくのがポイントであろう．予想外の面倒な計算だった．

□

（本文に戻る）　A', B' が ρ だけの関数であることは重要である．A, B を知るにはこれを積分する必要があるが，その形は今の目的には必要ではない．今や線素は (7.107) で 2 項が消去されている．今の関係を使って更に簡単化できる．すなわち (7.107) の $\mathrm{d}\rho^2$ の係数を以下のように変形することができる：

$$
\begin{aligned}
& g_{00}{A'}^2 + g_{33}{B'}^2 + 2g_{01}A' + 2g_{13}B' + 2g_{03}A'B' \\
= & A' \underbrace{(A'g_{00} + B'g_{03} + g_{01})}_{0} + B' \underbrace{(A'g_{03} + B'g_{33} + g_{13})}_{0} + g_{01}A' + g_{13}B' \\
& = g_{01}A' + g_{13}B',
\end{aligned} \tag{7.109}
$$

これを考慮すると (7.107) は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = & \left(1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right) c^2\mathrm{d}\hat{t}^2 - \frac{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho}\mathrm{d}\rho^2 \\
& -(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2 - \left[(\rho^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\right]\mathrm{d}\varphi^2 \\
& -2\frac{2m\rho a\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}c\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned} \tag{7.110}
$$

ここでたった一つの非対角項であるクロスターム $\mathrm{d}\hat{t}\mathrm{d}\hat{\varphi}$ が回転に対応している．

確認　$\mathrm{d}\rho^2$ の係数

$$
\begin{aligned}
g_{01}A' + g_{13}B' &= -1 \cdot \frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho} - a\sin^2\theta \cdot \frac{-a}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho} \\
&= -\frac{\rho^2 + a^2(1 - \sin^2\theta)}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho}
\end{aligned}
$$

□

(7.99) の座標変換について

本文には「エレガントな変換」とあるが，知らぬ者にとってはかなり奇妙な変換である．これについてだいぶ前 (2008 年）にネット上でのやり取りがあるので，それを参考にして，確認しておきたい．toorisugari no

Hiro さんという方からの情報である．

$$(\rho - \mathrm{i}a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta = x + \mathrm{i}y, \tag{7.99}$$

左辺を実部と虚部に分け，右辺と比較すると

$$\begin{cases} x = (\rho\cos\varphi + a\sin\varphi)\sin\theta, \\ y = (\rho\sin\varphi - a\cos\varphi)\sin\theta. \end{cases}$$

を得る．これから

$$x^2 + y^2 = (\rho^2 + a^2)\sin^2\theta$$

が得られるので，$\cos\theta = z/\rho$ により

$$\frac{x^2}{\rho^2 + a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 + a^2} + \frac{z^2}{\rho^2} = 1$$

となる式が得られ，x, y 方向に扁平な物体をイメージさせる．

更に上の式を書き換えると

$$\begin{cases} x = \sqrt{\rho^2 + a^2}\cos(\varphi - \delta)\sin\theta, \\ y = \sqrt{\rho^2 + a^2}\sin(\varphi - \delta)\sin\theta, \end{cases}$$

となる．ただし

$$\sin\delta = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}, \qquad \cos\delta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}.$$

z まで含めて書くと

$$\begin{cases} x = \sqrt{\rho^2 + a^2}\sin\theta\cos(\varphi - \delta), \\ y = \sqrt{\rho^2 + a^2}\sin\theta\sin(\varphi - \delta), \\ z = \qquad \rho \qquad \cos\theta. \end{cases}$$