

多孔性媒質の透過率

伊藤榮信

1985年3月30日

更新日: 2011年7月9日

概要

本論文では多孔性媒質の透過率 (permeability) について論じる。多孔性媒質の例としては粒状層や繊維状物質などがあげられる。透過率は多孔性媒質の巨視的な性質であるが、簡単に言えば、多孔性媒質内での流体の流れ易さの尺度である。

従って透過率を考えるとと言う事は多孔性媒質内の流れを解析することとなるが、多孔性媒質内の流路の複雑性を考えるとその中の流れの詳細な理論解析は極端に困難である。そのため多孔性媒質内の平均流を考えるのが一般的である。

多孔性媒質としての粒状層は同一形状の同じ大きさの球をランダムに配置した集合として、また繊維状物質は同一形状の円柱をランダムに配置した集合体としてモデル化することが可能である。このモデル化により多孔性媒質内の空隙 (空隙率 ϵ) というよりはむしろ単位体積中の固体の体積 (体積濃度 c) というイメージが強くなる。

このように粒状層や繊維状物質に対し、固体の体積濃度 c と透過率 k との間にはどのような関係式が成立するかを見出すのが本研究の目的である。

なお、体積濃度 c と空隙率 ϵ との間には $c = 1 - \epsilon$ が成立する。

さて、Brinkman は遅い流れを表す Stokes 方程式と多孔性媒質内の流れを表す経験式 Darcy 則 (Darcy 抵抗) をあわせた微分方程式をつくり、これを多孔性媒質内平均流の方程式 (Brinkman 方程式) とした。次に一様な媒質内に球状領域をくりぬき、そこに一つの球を設置し (試験球) その周りの流れは Brinkman 方程式を解くことで求めた。得られた流れから、球に加わる力を計算し、それが媒質中に仮想的に分布する抵抗力と等しくなるという条件から透過率を導出した。

Brinkman の結果は低体積濃度 c では実験値と合うものの、 $c = 2/3$ で透過率がゼロとなる。これは空隙 ($\epsilon = 1/3$) がまだあるにもかかわらず流れが通過しないということを意味している。

Lundgren (1972) は多孔性媒質を球の集合体でモデル化し、これに統計的手法を適用し Brinkman 方程式と同じ方程式を理論的に導出した。それは Darcy 抵抗が、粘性的流れ場の中に、球の平均数 (もしくは体積濃度) に比例する大きさで分布するという方程式である。しかしながら事実上試験球の大きさを無視したため、Brinkman と同じ結果となった。

試験球の大きさを反映するためには、半径 a の試験球周りという条件付平均を考える必要がある。試験球まわりのある点に接する球の平均数は、試験球に大きさがあるため、試験球の中心に近づくにつれて減少する。すなわちこの領域では Darcy 抵抗分布が変化する。この特別な領域を中間

層と呼んでいる。従って、より現実に近い透過率を求めるには、この領域を考慮し計算すべきである。

この条件付平均から導かれる方程式を修正 Brinkman 方程式と呼ぶ。この修正 Brinkman 方程式が本論文の基礎方程式となる。この基礎方程式、つまり修正 Brinkman 方程式を解くことは難しく、ここではその近似解を得るために Galerkin 法を使った。得られた近似解から透過率を計算するためにはこれまでどおり自己無撞着条件を使った：流れの中に分布すると仮定された Darcy 抵抗と試験球が周囲の流体から受ける力とが等しくなるという条件である。球の集合体でモデル化した粒状層に対しここで得られた結果は体積濃度のほぼ全域で、また特に $c = 2/3$ 付近でも実験結果とよく一致する。従って本論文の主たる結果は 3.1 で表され、 $c = 2/3$ で発散するというパラドックスも解決できたことになる。ただし、このグラフでの縦軸は透過率の逆数で表している。

繊維状物質を表現するための円柱状棒の集合体の場合、典型的な 2 つの流れが考えられる：その第一は円柱の軸に沿った流れであり；第二は円柱軸に直交する流れである。ここでもそれぞれの場合に中間層を考慮した。その結果、 $c > 0.5$ の領域では円柱を直交して通過する流れに対する透過率は球のそれよりも小さいことが判明した。

1985 年 3 月 30 日

追加版に対する序

本論文を最初に公表してから 26 年が経過した。この間にコンピュータは長足の進歩を遂げた。その結果、安価で強力なパーソナルコンピュータ (PC と略) を手にすることができ、更にはその上で動くこれまた強力な表計算ソフトが出現した。本論文作成当時の 1985 年において、近似解を得るための Galerkin 法は、今と比べ性能が非常にプアーなポケット計算機 (CASIO FX-702P, ¥39,800 言語 BASIC) により行った。その為、精度の良い近似解を見出すことは計算時間的にも非常に難しかったが、今や強力な PC と表計算ソフト (Microsoft 社 Excel) により、より精度の良い近似解を容易に探すことが可能となった。球の場合と円筒に沿う流れの場合に対しては 26 年前の結果と同じであるが、円筒を横断する流れに対する近似解については修正せざるを得なかった。

セクション 3.3 と 4.4 はこの追加版に新たに加えた節である。これらのセクションでは試行関数のパラメタスタディを実行しその結果を載せた。また、この追加版の付録 E には試験球周りの速度プロフィールを球の各体積濃度毎に表示した。

東日本大震災後の

2011 年 5 月 4 日

E-mail:3115770601Ajcom.home.ne.jp, A ->@

球を充填したケースでの透過率の論文は現時点で以下の書籍・論文で引用されています。

1) P. M. Adler, A. Nadim, H. Brenner; “Rheological models of suspensions” - Advances in chemical engineering, 1990 - Elsevier

“In the same vein, **Itoh(1983)** employed Eq.(5.5) [$\mathcal{F} = \mu\alpha^2 < \mathbf{U} >$] to calculate α using the same self-consistent argument, but with the inclusion of an intermediate fluid layer around the test sphere. Theoretical results compared well with experimental results.”

2) A. J. C. Ladd, “Hydrodynamic transport coefficients of random dispersions of hard spheres”, - The Journal of chemical physics, 1990
“The transport properties of a random dispersion of hard spheres has been a subject of theoretical interest for a long time (Happel and Brenner,1986). Properties of particular interest are:

- The permeability of a fixed array of spheres (Brinkman,1947; Tam, 1969,**Itoh, 1983**; Kim and Russel,1985),
- The single-particle and collective mobility coefficients (sedimentation velocity) ...
- The viscosity ...”

3) Donald A. Drew, Stephen L. Passman, “Theory of multicomponent fluids”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997

4) S. Haussener, I. Jerjen, P. Wyss and A. Steinfeld, “Tomography-based determination of effective heat and mass transport properties of complex multi-phase media”, Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer, JANUARY 2012, Vol. 134

“**Itoh(1983)** determined the permeability of a random array of rigid spheres accounting for the so called intermediate layer, a particular state formed around a test sphere.”

5) Mark F. Hurwitz, “Drag in a Porous Medium: An Example of the Use of Ensemble Averaged Hydrodynamic Potentials.” , 89 - 97, 1998. 等々

目次

第 1 章	はじめに	3
1.1	浸透現象と Darcy 則	3
1.2	多孔性媒質のモデル	5
1.3	統計平均による理論	7
1.4	繊維状物質	10
1.5	粒子の集合に対する流れ	11
第 2 章	統計平均による扱い	12
2.1	統計平均 (アンサンブル平均)	12
2.2	基礎方程式	14
2.3	付加力 \mathcal{F} に対する仮定 と中間層の存在	18
2.4	自己無撞着条件	20
2.5	透過率と修正 Brinkman 方程式	22
第 3 章	球をランダムに配列した集合体の透過率	24
3.1	中間層を無視した場合の透過率	24
3.2	中間層を考慮した場合の透過率	27
3.3	試行関数のパラメタスタディ	33
第 4 章	円柱をランダムに配列した集合体の透過率	35
4.1	円柱軸方向流れの透過率	36
4.2	円柱軸に直交する流れの透過率	39
4.3	円柱軸直交流れ試行関数のパラメタスタディ	44
第 5 章	最後に	46
付録 A	Darcy 則	51
付録 B	試験球周りの空洞モデル	53
付録 C	2次元 Brinkman 方程式の解	55
付録 D	Galerkin 法の精度確認	59

付 録 E 試験球周りの速度パターン	63
E.1 常微分方程式におけるステイフネス問題の回避	63
E.2 体積濃度に対する速度プロフィール	66

第1章 はじめに

1.1 浸透現象と Darcy 則

粒状層（もしくは多孔性媒質内）を透過する流れ現象は自然界ならびに工業生産設備において重要な役割を果たしている。石油工学，土質工学，地下水学，衛生工学など多くの分野において多孔性媒質内の流体の浸透現象を目にしている。例えば，油層からオイルがポンプで引き上げられる時のオイルの流れ，地下上層部での地下水の流れまた井戸への流れなどである。また，地学においては土壌を透過する流れは様々な農業問題において重要とな。例えば天然もしくは灌漑用水により供給された水の排水など。一方で，化学工学では浸透現象の応用が見られる。化学反応を生成



図 1.1: 吸着もしくは脱着塔.

するため，多くの工業設備には特殊な形状をした，または固体をつぶしたものを充填した塔が設置されている：この中を原材料が流れると同時にお互いの間で化学反応を起こす。この装置は気体と液体の吸着もしくは脱着を目的とした収縮装置としても作用している。（参考，図 1.1）

Darcy 則は粒状床や多孔性媒質内を通過する流れの研究に広く用いられている。この法則は流量が粒状層内の圧力降下に比例すると言うものである。その係数は粒状層の透過率と言う。透過率は一般的にはテンソル量となるが，媒質が一様で等方的であるならば，スカラーとなる。このよう

な媒質に対し Darcy 則は

$$\frac{Q}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.1)$$

となる。ここで k はこの媒質固有の透過率であり、 μ は流体の粘性、 dp/dx は流路に沿った圧力勾配であり、 Q は断面積が A である面を通過する流量である。Darcy 則の原形については付録 A に記した。以降、固有の透過率という用語を単に透過率と呼ぶ。

一方、管内を通過する層流の細心な実験により Hagen (1839) と Poiseuille (1840) は次の式を確立した：

$$\frac{Q}{A} = -\frac{d^2}{32\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.2)$$

ここで、 d と A は各々管の直径と断面積を表している、 dp/dx はそれに沿った圧力勾配、 Q は流量を表している。

1.2 多孔性媒質のモデル

透過率 k とは流体の多孔性物質内の通過し「易さ」の尺度である。それは媒質の巨視的な性質であり輸送現象を特性付けるものである, [1],[2]. 長い間, 透過率と多孔性媒質の空隙率 (porosity), 固体の体積比 (volume concentration), 組成物の大きさの分布, さらには組成物の充填法や方向性との間の関係式を見出す様々な試みが成されてきた [3],[4]. これらの相関の中で, 透過率と空隙率との関係がもっとも重要なものである。そこで理論的にこの相関式を作り上げるために, 多孔性媒質を理論モデルによって表現する。これらのモデルは数学的に扱えるものである。その関係式を見出す毛細管モデルとは最も単純な方法であり, 以下に述べる「抵抗理論」による手法はそのもう一つの方法である。

(a) 毛細管モデル

空孔の平均直径 \bar{d} の真直ぐな毛細管モデルを考え, それを束ねて片面から流体が進入しもう一方から流出すると言う多孔性媒質モデルを仮定する。このような毛細管がこのモデルの単位面積当たり n 本あるとすると, 単位面積当たりの流れ, q , は Hagen-Poiseuille の法則により:

$$q = -\frac{n\pi\bar{d}^4}{128\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.3)$$

で与えられる。ここで μ いつもの粘性で, dp/dx は毛細管に沿った圧力勾配である。流れは同様に Darcy's law (1.1) で表現されるから, よって $k = \epsilon d^2/32$, ここで ϵ 空隙率であり $\epsilon = n\pi d^2/4$ を使った。しかしながら, 平行に並ぶ毛細管からなるモデルでは一方向のみの透過率であることは明らかであり, 従って, この結果は, 実際に観測されるような, 多孔性媒質の透過率と空隙率との関係を正しくは表現していない。

真直ぐで平行なタイプのモデルでは, 各毛細管は直径の変化の無い粒状層と仮定されていることに相当する。この仮定は現実からはかけ離れている。より現実的なモデルとしてねじれた毛細管モデルが仮定された。何故なら空孔を通過する流線の跡はねじれているだろうと考えられるからである。流れの道筋の平均長さ, L_E , は多孔性媒質の長さ L より大きい。しかしながらこのモデルでは, 付加的なパラメタ (ねじれ率 $T = L_E/L$) をモデルの中に導入しなければならない。未知のパラメタ T の導入は非常に都合が悪い。

(b) 透過率に対する抵抗理論

この方法は最初に Emersleben(1924) によって始められた。この理論では, 多孔性物質の固体部分は粘性流体の流れに対し抵抗として作用する。固体の各部分への流体の抵抗は Navier-Stokes 方程式により計算され, この全抵抗は多孔性媒質が流れに与える抵抗に等しいと考える。

Brinkman(1947) は障害物の形状を球と考えた。一様で等方的な多孔性媒質に対して、彼は高濃度に詰められた粒子群を通過する遅い流れを考えた。こうして彼は粒子群内に設置された粒子に作用する力が多孔性媒質内に埋められた固体粒子に作用する力であるかのように計算した。Brinkman は多孔性物質を修正された Stokes 方程式で以下のように表した：

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U} - \frac{\mu}{k} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

ここで (1.4) 式左辺の p は流体の圧力であり、 \mathbf{U} は流体の見かけの速度、そして左辺最後は Darcy 抵抗 (cf., eq.(1.1) と呼ばれている。本論文ではこの方程式 (1.4) を Brinkman 方程式と呼ぶ。Brinkman によって得られた透過率は球のまばらな分布に対しては実験データと合うものであった。しかしながら Brinkman の理論は Darcy 方程式が経験式であるという理由から疑念をもって受け入れられた。更に悪いことには、体積濃度が $c = 2/3$ のとき、透過率がゼロになってしまう (言い換えれば、粒子集合体の間にはまだ空隙があるにもかかわらず、流体はその粒子群に浸透できない)。およそ 20 年後、Tam(1969)[5] は統計平均を使い理論的に Brinkman 方程式を導出した。

もう一つの手法は Brenner(1965) による「セル (cell) 法」と呼ばれる方法で球に作用する抵抗力を得るものである。この理論では、粒状層は何個もの単位セルに分割され、各セルは一つの粒子 (組成粒子) を包含している。

典型的なセルとしては球が仮定され、その直径は単位セルの空隙率は粒状層のものと同じになるように決められる。1セル内の流体は遅い流れの方程式に従う。この単位セル手法では次の仮定が重要となる：各粒子による全攪乱はその粒子が関係するセルの中に閉じ込められる。しかしながらこのモデルではセル上での境界条件の選択に任意性をもってしまう。従って、最良の境界条件の選択の難しさがある。

1.3 統計平均による理論

透過率とは媒質の巨視的な性質である。媒質のこのような巨視的な量を得るためには、ある種の平均を採用しなければならない。統計平均(アンサンブル平均)による方法は流体粒子系の研究に発展した [6]-[11]。この理論では多孔性媒質は球の集まりとして仮定される。ここで球は空間内にランダムにかつ一様、等方的に固定される。そして流体はその中を非常にゆっくりと流れる。Lundgren(1972)[12]による統計平均を第2章で紹介する。抵抗理論の所で述べたように、球に作用する力の計算が重要となる。(試験)球に作用する流体の平均抵抗は統計平均により得られる [12]-[18]。ここでこれらの重要な研究のいくつかを以下におさらいをしてみる。

Tam(1969)[5]は粒子の集まりを Stokes 流中の点源力として扱い、第1(もしくは試験)粒子以外のすべての粒子の位置にわたる統計平均を行うことで Brinkman 方程式を理論的に導出した。平均流の中に試験粒子を入れ、その周りの平均流れを計算することで、彼はその粒子に対する抵抗力の式を得た。しかしながら、この公式も Brinkman のと同じように $c = 2/3$ で同じ欠点をもつものであった。Tam と同じ計算を本論文のセクション 3.1 に記述している。

Howells(1974)[14]は球のランダムな配列を通過する流れの研究を球の体積濃度が小さい ($c \ll 1$) という仮定の下での研究を行っている。彼は連続の式と Brinkman 方程式を満足する点源力の方法を開発した。こうして彼は球の表面上にその点源力を分布させることで球の存在を表した。第2の球が固定されると、試験球に作用する平均抵抗力が、provided $c \ll 1$ のもとで c のべき乗の展開により、2球の相互作用も含めて計算されたのである。抵抗力に対する一つの重要な寄与はそれが Brinkman の結果と同じであること、それともう一つは体積排除効果によるものである；彼はその効果を Faxen の公式 [9] に類似する方法を使って計算している。その結果は $c \ll 1$ で Brinkman の結果と同じである。

Lundgren (1972)[12]は中ぐらいの密度の球の集まりに対する透過率について研究している。彼は Saffman(1971)[19]による統計的定式化を更に進め、未知の付加項をもつ修正 Stokes 方程式を導出した。この付加的な力の項の具体的な表現を $\bar{A} \langle \mathbf{U} \rangle + \bar{B} \nabla^2 \langle \mathbf{U} \rangle$ とした。ここで \bar{A} と \bar{B} は決定すべき未知定数であり、 $\langle \mathbf{U} \rangle$ は統計平均された流速である。球のアンサンブルから、そのメンバーの中である球(つまり、試験球)が同一位置にあるものだけを選び分けサブアンサンブルを作る。このサブアンサンブルによる平均が条件付平均である。(参考, 図.1.2) 試験球周りの条件付平均流れを考えると、その球の周りには球の中心が存在しない領域が発生する。何故なら試験球はそれに重なるような球すべてを排除するからである [20]。半径が a である球の場合、その空洞領域の半径は $2a$

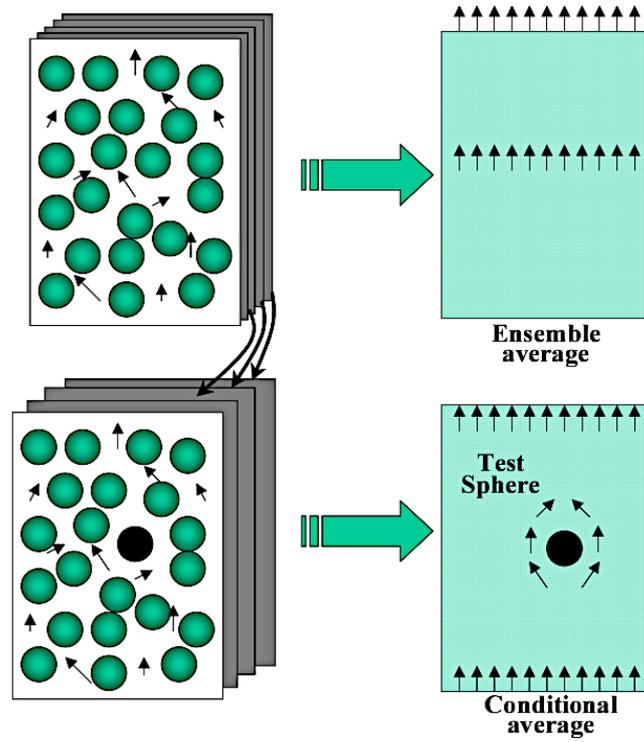


図 1.2: 統計平均（アンサンブル平均）と条件付平均.

である。しかし、計算を簡単化するため Lundgren はその空洞領域を無視し、その代わり未知の有効粘性を導入した。その結果得られた透過率は $c > 0.3$ で急速に増大する理にかなわないものとなった。そして彼はより高い濃度で正しい結果を得るためには各球の周りの空洞領域を考慮しなければならないと注意している。

Buevich and Marcov(1973)[16] はある意味で Lundgren の研究の精緻化を行った。彼らもまた試験球周りのある点に接触する球の平均数が試験球に接近するにつれ減少する特別な領域があることを注意している。彼らはこの領域を中間層と名づけたが、計算においてはこの領域を無視した。よって、彼らの結果も Lundgren のと同じ難点をもつものとなった。

固体による粒状層の体積濃度は一般に大きい。よって、高濃度粒状層の透過率を予測するためには上記空洞領域もしくは中間層を考慮する必要がある。試験球周りの平均流れは Brinkman 方程式により支配され、それには平均流速の 1 次比例する Darcy 抵抗を含んでいる。従って、一様で等方的な媒質に対して、中間層は次の条件を課すことで表現できる：抵

抗力の係数は, c 同様に, 試験球の中心と考えている点との距離に依存する; この層を無視した場合には, その係数は c のみに依存する. 一様で等方的な媒質に対し, セクション 3.2 で, 中間層を考慮した場合の透過率と体積濃度の関係について議論する.

ここで, Neal and Nader(1973)[21]の研究について簡単に触れておく. 彼らはセルモデルを採用し Lundgren により統計的に導出された Brinkman 方程式を使った. 得られた結果は体積濃度の全領域において実験と一致するものである. 彼らは多孔性媒質内の球に作用する抵抗力は $F_{\text{sph}} = 6\pi\mu\mathbf{U}\xi(\alpha, \beta)$ となることを提唱している. ここで μ は流体の粘性, \mathbf{U} はその平均流速, α と β は無次元の定数である. しかしながら, 彼らのメインの結果である $\xi(\alpha, \beta)$ の導出法が不明である.

最後に Prager (1961) [6] による多孔性媒質問題の統計平均による方法について注記しておかなくてはならないだろう. この方法は前述の「抵抗理論」とは異なっている. 彼は流体の流れに対する多孔性媒質の抵抗力をエネルギー散逸が最小となることから算出している. そして, 抵抗力の正しい下限値を得ている. (参照, Oshima[22])

1.4 繊維状物質

布やフェルト，フィルタなど繊維状物質内の浸透にも関心がある．この問題に関する研究は Emersleben(1925) によって行われている．彼は繊維状物質を細い棒 (fiber) を束ねた物と考えた．Emersleben による研究は Scheidegger(1960)[4] に記されている．この問題では2つの典型的な流れが取り上げられる：第1は，円柱状繊維の軸に平行な流れであり（縦方向流れ）；第2の流れは軸に直交する方向の流れ（横方向流れ）である．図1.3を見よ．

本論文では繊維状物質を同一半径の円柱状棒のランダムで一様な集まりとして扱う．こうして，我々は中間層を考慮したもとのその物質の透過率を4章で取り上げる．

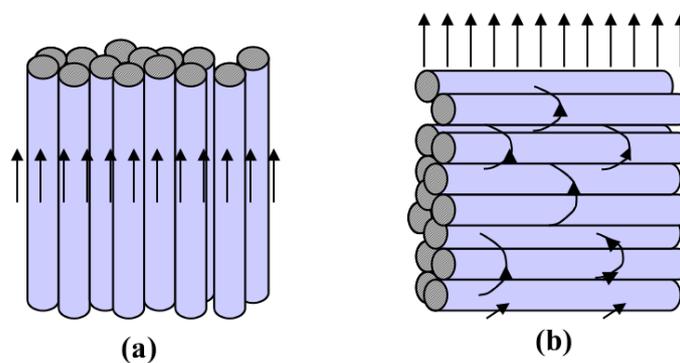


図 1.3: 2つの流れ:(a) 縦方向流れ; (b) 横方向流れ.

1.5 粒子の集合に対する流れ

これまでも述べたように、ここでは粒子の集合体内を通過する非常に遅い流れを扱っている。従って、慣性による影響は無視しているので、その中を通過する流れは粘性流体の方程式で表される。しかしながら、透水速度が大きい場合には慣性力を無視することができないだろう。多孔性媒質内で、流体粒子の進行方向の変化による流線の歪が考えられるからである。更に、透水速度がますます大きくなると媒質内では乱流が発生するであろう。しかしながら、この問題を扱うことは非常に難しいだろうし、これに関する研究も現段階では少ない。

さて、本論文の目的は固体が高濃度に詰められた粒状層の透過率を議論することであるが、一方、低濃度充填（希薄な）システムに関する研究もこれまでの長い間行われている。このような問題では、粒子は流体に対しても運動しているが、粒子と粒子の間の運動も存在する：このような現象を「サスペンション」と呼んでいる [8]；特に、全体的には流体が静止しているような場合、この現象は「沈殿現象」と呼ばれる [9]。中程度の体積濃度では、粒子どうしの接触による固定が、流体の運動により、維持できなくなる：このような場合を「流動化現象」の発生という。これらの問題も確かに興味あることであるが、ここでは扱わない。

第2章 統計平均による扱い

2.1 統計平均 (アンサンブル平均)

剛体的に固定された固体球のランダムな配列を通過する流れを考える。この配列は半径 a の N 個の固体球の集まりである。これらの球が統計的に一様かつ等方的に分布すると仮定してい。流体と球からなるシステム内の任意の点 \mathbf{r} における (速度や圧力などの) 場の変数は (同時刻の) N 個の球の中心の配置により決まる。同一の巨視的境界条件に対するたくさんの流れ場 (realization) は統計集団 (アンサンブル) を生成し、これらの流れ場 (realization) で生起しているある量の値の平均は統計平均 (アンサンブル平均) である。

N 個の球の中心が $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N$ に配置される確率密度関数は $P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$ で記される。規格化条件は

$$\int_{D^N} P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N = 1 \quad (2.1)$$

ここで D は流体と N 個の球からなるシステムの体積であり、 D^N は D の N 重直積である。1 個の球が \mathbf{r}_1 という位置をとる確率は

$$P_1(\mathbf{r}_1) = \int_{D^{N-1}} P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N. \quad (2.2)$$

となる。

次に条件付確率密度関数 $P_{N-1}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1)$ を導入する。これは1つの球の中心が \mathbf{r}_1 にあるとき他の $N-1$ 個の球の中心が $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N$ に位置しているという確率密度である。以下の式はよく知られている：

$$P_{N-1}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1) = \frac{P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{P_1(\mathbf{r}_1)}. \quad (2.3)$$

同様に、2つの球の中心が固定された場合、他の $N-2$ 個が指定された配置となる確率密度関数は

$$P_{N-2}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)}{P_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}, \quad (2.4)$$

で与えられる。ここで P_2 は (2.2) で定義されたのと同様の 2 球の確率密度関数である。

さて、システム内のある量 $G(\mathbf{r})$ の平均を以下のように表そう：

$$\langle G(\mathbf{r}) \rangle = \int_{D^N} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_N. \quad (2.5)$$

ここで $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ は球の中心の配置が $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ であるときの \mathbf{r} における G の値である。これ以降統計平均は $\langle \cdot \rangle$ で表す。球の数密度関数は Dirac の δ 関数を使って以下のように定義される：

$$n(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

従って、(2.5) 式を使うと平均数密度

$$\langle n(\mathbf{r}) \rangle = NP_1(\mathbf{r}), \quad (2.6)$$

を得る。 $G(\mathbf{r})$ の条件付平均は以下で定義される：

$$\langle G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle = \int_{D^{N-1}} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) P_{N-1}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \cdots d\mathbf{r}_N. \quad (2.7)$$

最後に統計平均と $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ に関する微分演算子は連続関数に対して交換することを注意しておく。すなわち

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial G}{\partial x_i} \right\rangle &= \int_{D^N} \frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial x_i} P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \langle G(\mathbf{r}) \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

が成立する。

2.2 基礎方程式

このセクションでは流体と球のシステムに対する統計平均場の方程式を導出する。各球の周りの速度はこの問題では非常に小さいので、流体は非圧縮性であり、方程式内の慣性項を無視することができる。従って、統計集団の各標本に対し流体の速度と圧力は連続の式と Stokes 方程式 (もしくは遅い流れの方程式) によって表現される：

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.9)$$

$$-\nabla p(\mathbf{r}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

ここで \mathbf{u}, p と μ は流体の速度、圧力、粘性である。球面上では粘着条件が課せられる。球内部では以下を定義する、

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \cdots \cdots \text{and} \cdots \cdots \nabla p(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

関数 $H(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ を導入すると便利であり、これは流れ場の 1 標本 (realization) において流体領域を表す¹：

$$H(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \begin{cases} 1 \cdots \cdots \mathbf{r} \in D_{\text{Fluid}}, \\ 0 \cdots \cdots \mathbf{r} \in D_{\text{Solid}}. \end{cases} \quad (2.12)$$

関数 $H(\mathbf{r})$ は具体的には

$$H(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 1 - \sum_{i=1}^N \mathcal{H}(a - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|), \quad (2.13)$$

で与えられる。ここで \mathcal{H} は Heaviside のステップ関数で

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 \cdots \cdots x < 0, \\ 1 \cdots \cdots x \geq 0, \end{cases}$$

で定義される。 $H(\mathbf{r})$ をこの形で定義すると

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \int H(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= 1 - \int \sum_{i=1}^N \mathcal{H}(a - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) P_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= 1 - N \int \mathcal{H}(a - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) P_1(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \\ &= 1 - \int_{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| \leq a} N P_1(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = 1 - \int_{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| \leq a} \langle n(\mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r}_1 \\ &= 1 - c, \end{aligned} \quad (2.14)$$

¹ D_{Fluid} は流体中の点 \mathbf{r} が流体中にあることを意味し、また D_{Solid} は点 \mathbf{r} が固体中にあることを意味する。

を得る。ここで (2.6) を使い、 c は球の体積濃度である。(2.14) 式で $\langle n(\mathbf{r}_1) \rangle$ はシステムの一様性から一定であると仮定できる。

速度 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ の統計平均は

$$\langle H\mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle = \int H(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \mathbf{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N, \quad (2.15)$$

で定義される。ここで $\mathbf{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ は N 個の球が $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ に配置されているときの点 \mathbf{r} における速度である。これからは統計平均による速度 $\langle H\mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle$ を単に $\langle \mathbf{U} \rangle$ と記述する。統計平均された圧力 $\langle Hp(\mathbf{r}) \rangle$ も (2.15) と同様に定義される。

流体中に限った Stokes' の応力テンソルは、

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.16)$$

で定義される。 H を使った平均応力は以下のようになる：

$$\langle HT_{ij} \rangle = -\langle Hp \rangle \delta_{ij} + \mu \left\langle H \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle. \quad (2.17)$$

球の中では $\partial u_i / \partial x_j$ がゼロとなるので

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle &= \left\langle (1 - H + H) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle (1 - H) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle H \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle H \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.18)$$

であることが分かる。従って

$$\left\langle H \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle Hu_i \rangle, \quad (2.19)$$

を得る。ここで (2.8) 式を使った。よって、上記の式を使うと、平均 Stokes' 応力テンソル

$$\langle HT_{ij} \rangle = -\langle Hp \rangle \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right), \quad (2.20)$$

を得る。

これらの結果を以下のように利用する。(2.18) 式と (2.19) 式、そして連続の式から以下の式が得られる

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (2.21)$$

一方, Stokes' 方程式は Stokes 応力テンソル (2.16) により $\mathbf{0} = \text{div}\mathbf{T}$ と書くことができるので

$$\begin{aligned} (\text{div}\mathbf{T})_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i = 0, \end{aligned}$$

となる. ここで, 繰り返し現れる添字については添字の値すべてについて和をとるので, 連続の式は

$$\mathbf{0} = \langle H \text{div}\mathbf{T} \rangle = \text{div} \langle H\mathbf{T} \rangle - \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \cdot \nabla H \rangle, \quad (2.22)$$

となる. ここで右辺の最後の項はその点が固体境界上にある統計集団内の標本からの寄与である. 更に, (2.20) 式を使うと, 以下の式が得られる:

$$-\nabla \langle Hp(\mathbf{r}) \rangle + \mu \nabla^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle - \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \cdot \nabla H \rangle = \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

上の式の最後の項 $\langle \mathbf{T} \cdot \nabla H \rangle$ をより具体的に書くために

$$\nabla H(\mathbf{r}) = \nabla \left\{ 1 - \sum_{i=1}^N \delta(a - \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|) \right\} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \delta(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\| - a). \quad (2.24)$$

を使うと

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T} \cdot \nabla H \rangle &= \sum_{i=1}^N \int_{D^N} \mathbf{T} \cdot \nabla H P_N d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_N \\ &= N \int_D \delta(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| - a) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|} P_1(\mathbf{r}_1) \left\{ \int_{D^{N-1}} \mathbf{T} P_{N-1} d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_N \right\} d\mathbf{r}_1 \\ &= \int_D \langle n(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|} \delta(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| - a) d\mathbf{r}_1 \\ &= \langle n(\mathbf{r}) \rangle \int_D \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle d\mathbf{r}_1, \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる. ここで (2.3) 式と (2.6) 式が使われている. (2.25) 式の体積積分をデルタ関数により面積分に変えると

$$\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{T} \cdot \nabla H \rangle = \int_{S_1} \langle n \rangle \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle \cdot \mathbf{n}_1 dS, \quad (2.26)$$

となる. 上で $\mathbf{n}_1 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|$ であり, S_1 は \mathbf{r}_1 に位置する半径 a の球上の面である. 以降, 力 $\vec{\mathcal{F}}$ を付加力と呼ぶ.

$\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle$ に対する方程式は、上記のプロセスで P_N を条件付確率で置き換えれば得られる。試験球の周りの条件付平均方程式は

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle = 0, \quad (2.27)$$

であり、

$$-\nabla \langle H p(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle + \mu \nabla^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle - \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \cdot \nabla H \rangle = \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

である。なお $\mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$ は試験球が \mathbf{r}_1 にあるときの点 \mathbf{r} における応力である。(2.28) 式の左辺の最後の項 $\langle \mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \cdot \nabla H \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \cdot \nabla H \rangle &= N \int_D \delta(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\| - a) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|} P_1(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1) \\ &\times \left\{ \int_{D^{N-2}} \mathbf{T}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) P_{N-2}(\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N \right\} d\mathbf{r}_2 \\ &= \langle n(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle \int_{S_2} \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle \cdot \mathbf{n}_2 dS = \vec{\mathcal{F}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1), \end{aligned} \quad (2.29)$$

と、より具体的な形に書くことができる。ここで $\mathbf{n}_2 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|$ であり、 $\langle n(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle$ は試験球の周りの平均数密度、 $\mathbf{T}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は球が \mathbf{r}_1 と \mathbf{r}_2 に配置された場合の \mathbf{r} における応力テンソルである。この式は、 \mathbf{r}_1 にある球の存在のため密度場 $\langle n(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle$ が非一様となるため、(2.25) 式とは異なる。(2.29) 式の応力 $\langle \mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle$ は $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle$ に依存する。この速度は二つの球の位置が指定された場合の平均速度場でありその値は未知である。我々はこの方法を $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle$ に対しても続けることができる。しかしながらその式は $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \rangle$ に依存する抵抗力を含み、その速度は3個の球が特定された配置にあるものである。これを続けるならばいわゆる階層方程式となってしまう、これを打ち切るためには何らかの仮定が必要であり、それについては次のセクションで行う。

2.3 付加力 \mathcal{F} に対する仮定 と中間層の存在

遅い流れの場合，付加的な力 \mathcal{F} の次元を以下のように表せる：

$$|\mathcal{F}| \approx \mu U / L^2 \quad (2.30)$$

ここで L はシステム内の特徴的な長さであり， U は代表速度， μ は流体の粘性である．

Lundgren[12] と Buevich & Marcov[16] によれば， $\mathcal{F}(\mathbf{r})$ と $\mathcal{F}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$ は各々 $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle$ と $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle$ の 1 次式で表される．よって，(2.30) 式をもとに汎関数 $\mathcal{F}[\langle \mathbf{U} \rangle]$ の最も簡単な形を以下に提案する：

$$\mathcal{F} = \mu \alpha^2(c) \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle . \quad (2.31)$$

ここで α は c に依存する未知の定数であり，次元 L^{-1} をもつ．(α^{-1} は遮蔽距離と言われる．) $\mathcal{F}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$ の関数形を論議する前に，ここで以

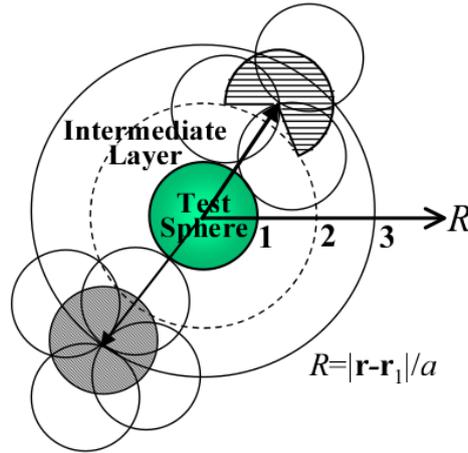


図 2.1: 試験球周りの中間層.

下の事実を説明する必要がある．§ .2.1 で述べたように， \mathbf{r}_1 に位置する試験球の存在はその周りにある場に拘束を与える (図 2.1 を見よ)．領域 $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| \geq 3a$ において，試験球は点 \mathbf{r} に接触する球に対して何の影響も及ぼさない．この点に接触する球の中心の軌跡は点 \mathbf{r} に中心をもつ半径 a の球となる．一方，領域 $a \leq \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| < 3a$ では，試験球の存在がその周りの点 \mathbf{r} に接触する球に影響を及ぼすようになる．したがって，点 \mathbf{r} に接触する球の中心の軌跡は \mathbf{r} を中心とする完全な球とはならない．この球状の表面積の大きさは $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|$ に依存する．我々はこの領域を中間層と呼

び，図 2.1 に示した．

よって，領域 $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| \geq 3a$ では付加力 $\mathcal{F}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$ 内の $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle$ の係数は $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle$ の係数と同じになるが，領域 $a \leq \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| < 3a$ での係数はその点での体積濃度 c に依存する²．こうして $\mathcal{F}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$ の形を以下のように仮定する：

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) = \begin{cases} \mu\alpha^2 Q_S(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|) \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle, & a \leq \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| < 3a, \\ \mu\alpha^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle, & \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| \geq 3a, \end{cases} \quad (2.32)$$

ここで Q_S は中間層の半径方向依存性を表している．試験球周りの上記二つの領域の違いは点 \mathbf{r} に接触する球の平均数の違いである．しかるに，その違いは半径 a の球の表面積 $4\pi a^2$ に対する \mathbf{r} に中心をもつ球状面積比で定義した Q_S で表現できるだろう．このように試験球をとりまく点 \mathbf{r} に接触する球の中心の軌跡を考慮すると（試験球は他の球と重なり合うことはなく，球の集合体は一様で等方的であるとする），

$$Q_S(R) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R^2 - 3}{2R} \right), \quad (2.33)$$

と定義することができる．ここで $R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|/a$ である．

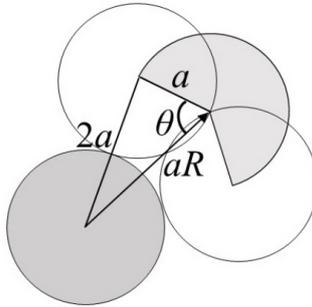


図 2.2: 点 R に接する球の中心が作る表面積に関して

補：ベクトル $a\mathbf{R}$ の先端に接する球の中心が作る球面の一部の面積を求めるためには以下の θ が必要となる（開き角 $\theta' = \pi - \theta$ ）．上の $a, 2a, aR$ の辺からなる三角形に対して余弦定理より

$$2R \cos \theta = R^2 - 3$$

²領域 $a \leq \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| < 3a$ での点 \mathbf{r} における体積濃度は $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|$ に依存する．

2.4 自己無撞着条件

前のセクションにおいて付加力の具体的な形を仮定することによって方程式の無限階層問題を解決した。しかしながら、その結果、未知の量 $\alpha(c)$ を導入することになった。しかし未知量 α は次のプロセスを実行することで決定できる。応力 $\langle H\mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle$ は基礎方程式 (2.27) と (2.28) の解である $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle$ と $\langle Hp(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle$ により表現できる。この応力を球面上で積分することによって、試験球に作用する抵抗力 $\mathbf{f}(\mathbf{r}_1)$ が得られる。球の集合の一様性から、抵抗力 $\mathbf{f}(\mathbf{r}_1)$ は点 \mathbf{r}_1 に依存しない。よって、球の数密度 n により単位体積中のすべての球に対する力の和は $n\mathbf{f}$ となる。

一方、付加力 $\mathcal{F}(\mathbf{r})$ は単位体積あたりの平均抵抗力に相当する。したがって、 $\mathcal{F}(\mathbf{r})$ が $n\mathbf{f}$ に等しくなることを要請する：

$$n\mathbf{f} = \mu\alpha^2 \langle \mathbf{U} \rangle. \quad (2.34)$$

こうして、未知量 α が決定される。この要請を自己無撞着条件と言う。

ここでは α の別の決め方について考えてみよう。システムの一様性から、応力 $\langle H\mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle$ は球の中心 \mathbf{r}_1 には依存しない。よって、以下の関係式が成立する：

$$\int_{S_1} \langle H\mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_S \langle H\mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{f}(\mathbf{r}_1),$$

ここで S_1 は点 \mathbf{r} に接触する球の中心が生成する軌跡であり、 S は試験球の表面である (参考, 図 2.3)。よって、(2.25) と (2.31) 式から

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{r}) &= n \int_{S_1} \langle H\mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle \cdot \mathbf{n}_1 dS = n \int_S \langle H\mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle \cdot \mathbf{n} dS \\ &= n\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mu\alpha^2 \langle \mathbf{U} \rangle, \end{aligned}$$

を得る。これは (2.34) と同じ条件となる。

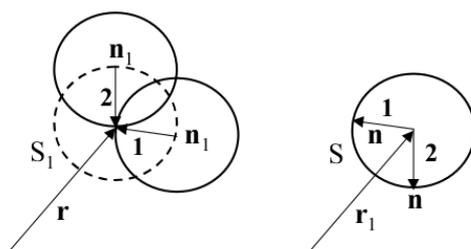


図 2.3: 点 \mathbf{r} に接する球の中心が作る軌跡表面, S_1 , and 試験球表面, S .

2.5 透過率と修正 Brinkman 方程式

本論文の目的は透過率を理論的に予測しそれを実験値と比較することである。従って、基礎方程式 (2.21) と (2.23) に現れる物理的意味について述べなければならない。透過率に関する実験では体積平均速度 \mathbf{U} を測定する。この \mathbf{U} を断面積で積分すれば、単位時間当たりその断面を通過する平均流量となり、(1.1) 式の \mathbf{Q} に相当する。しかるに、統計的に様なシステムに対する通常のエルゴード性と体積平均が等しくなることを当然仮定している (参考, Batchelor[8] § 3) ので、統計平均速度 $\langle \mathbf{U} \rangle$ は体積平均速度 $\bar{\mathbf{U}}$ に等しいと言える。よって、平均速度 $\langle \mathbf{U} \rangle$ を測定することが可能である。

一方、統計平均圧力 $\langle Hp(\mathbf{r}) \rangle$ を直接測定することはできない。そこで

$$\bar{p}(\mathbf{r}) = \frac{\langle Hp(\mathbf{r}) \rangle}{\langle H \rangle} = \frac{\langle Hp(\mathbf{r}) \rangle}{(1-c)}. \quad (2.35)$$

を導入する。平均圧力 $\bar{p}(\mathbf{r})$ は考えている点 \mathbf{r} が流体中にある統計標本のみによる平均量である。よって、平均圧 \bar{p} は物理的に測定可能な量である。流体は断面の流体部分 S_f を通して運動量を注入する。この圧力による運動量は

$$\bar{p}S_f = \bar{p}(1-c)S,$$

によって与えられる。ここで S はシステムの断面である (参考, 図 2.4)。一方、断面 S に作用する総圧は $\langle Hp \rangle S$ となる。 S を通過する運動量

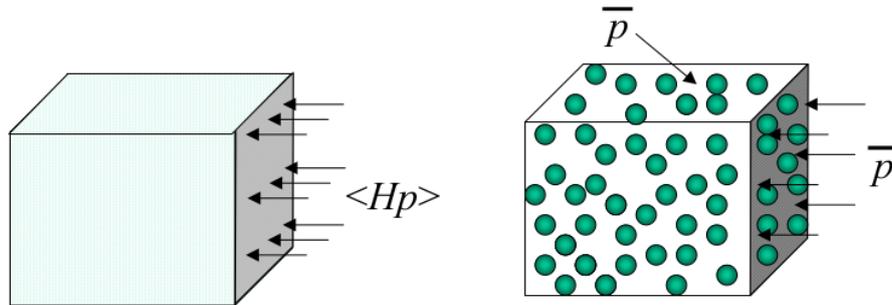


図 2.4: 平均ろ過圧力 $\langle Hp \rangle$ と空隙内平均圧 \bar{p} [19].

流束はそれに作用する総圧力であるから

$$\bar{p}(1-c)S = \langle Hp \rangle S.$$

が得られる.

測定可能な量 $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle$ と $\bar{p}(\mathbf{r})$ により, 方程式 (2.23) を書き換えると

$$-\nabla(1-c)\bar{p}(\mathbf{r}) + \mu\nabla^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle - \mu\alpha^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

となる. さらに, $\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle$ が一定値 \mathbf{U}_0 であるとする, 式 (2.36) は以下のようになる:

$$-\nabla\bar{p}(\mathbf{r}) - \mu\frac{\alpha^2\mathbf{U}_0}{1-c} = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

この式 (2.37) と類似する式は De Wiest[23] にも見られる. (1.1) 式を思い出し, Q/A を U_0 で書き換えると, 透過率 k :

$$k = \frac{1-c}{\alpha^2} = \frac{(1-c)a^2}{B^2}, \quad (2.38)$$

が得られる. なお α が次元 L^{-1} であることより, B は無次元量となる. 従って, 我々の問題は B の値を決定する問題へと帰着された.

ここでこのセクションをまとめる. 平均流と条件付き平均流が従う方程式, さらに連続の式と平均 Stokes 応力テンソルを記す.

平均流れ場に対する連続の式, Brinkman 方程式, 応力テンソルを $(1-c)\bar{p}$ を使って表すと

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle = 0, \quad (2.39)$$

$$-\nabla(1-c)\bar{p}(\mathbf{r}) + \mu\nabla^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle - \mu\alpha^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{0}, \quad (2.40)$$

$$\langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle = -(1-c)\bar{p}\mathbf{I} + \mu(\nabla \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle + \tilde{\nabla} \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle), \quad (2.41)$$

である. ここで \mathbf{I} は 1 のダイアディックであり, δ_{ij} に相当する. また $\nabla \langle \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{r}) \rangle$ は $\nabla \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle$ の転置である.

同様に, 条件付流れの場に対する連続の式と, (修正)Brinkman 方程式, 応力テンソルを $(1-c)\bar{p}$ を使って表すと

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle = 0, \quad (2.42)$$

$$-\nabla \langle Hp(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle + \mu\nabla^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle - \mu\alpha^2 Q_S \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle = \mathbf{0}, \quad (2.43)$$

$$\langle \mathbf{T}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle = -(1-c) \langle Hp(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle \mathbf{I} + \mu(\nabla \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle + \nabla \langle \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle), \quad (2.44)$$

である. なお, Q_S は中間層を表す.

第3章 球をランダムに配列した集合体の透過率

3.1 中間層を無視した場合の透過率

このセクションでは中間層を無視した場合の透過率を計算する。すなわち、恒等的に $Q_S(r) = 1$ とすることである。よってここでの計算は本質的に Brinkman によるものと同じである。 \mathbf{r}_1 にある試験球の周りの流れ場は

$$\begin{cases} \nabla \cdot \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle = 0, \\ -\nabla \langle Hp(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle + \mu \nabla^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle - \mu \alpha^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3.1)$$

によって表される。また、試験球の中心に原点があるような座標系をとると考えやすい。従って、境界条件は以下のようなになる：

$$\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{O}) \rangle = \mathbf{0}, \quad \text{試験球上で}, \quad (3.2)$$

$$\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{O}) \rangle \rightarrow \mathbf{U}_0 \quad (\text{一定}), \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

方程式 (3.1) を解くためにここでは Felderhof[24]-[27] による解法を採用した。無限遠での速度 \mathbf{U}_0 を z 軸方向にとると、球座標系 (r, θ, ϕ) で

$$\mathbf{U}_0 = U_0 \mathbf{e}_z = U_0 (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta), \quad (3.4)$$

と書くことができる。ここで $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r$ and \mathbf{e}_θ は各軸上の単位ベクトルである。また、無次元の動径距離 $R = r/a$ を導入する。上記 (3.4) 式と同じ角度依存性をもつ速度場 $\langle \mathbf{U}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle$ を仮定する：

$$\langle \mathbf{U}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = U_0 \left\{ \phi(R) \cos \theta \mathbf{e}_r - \left[\phi(R) + \frac{R}{2} \dot{\phi}(R) \right] \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right\}, \quad (3.5)$$

ただし、式中の文字上のドットは R による偏導関数を表している。(3.5) 式が連続の式を満たしていることは重要である。次に、圧力の角度依存性は内積 $(\mathbf{R}, \mathbf{U}_0)$ の形をもつ必要がある¹。よって、圧力は以下のようなになる：

$$\langle Hp(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = -\mu U_0 \frac{B^2}{a} \chi(R) \cos \theta. \quad (3.6)$$

¹これは、運動量方程式が変数分離可能となるために必要となる。

こうして, (3.5) 式と (3.6) 式を (3.1) へ代入することにより $\phi(R)$ と $\chi(R)$ が満たすべき 1 組の方程式を得る:

$$\ddot{\phi} + \frac{4}{R}\dot{\phi} + B^2\dot{\chi} - B^2\phi = 0, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\chi} + \frac{2}{R}\dot{\chi} - \frac{2}{R^2}\chi = 0. \quad (3.8)$$

同様に, 境界条件 (3.2) と (3.3) は ϕ により次のように書き直される:

$$\phi(1) = \dot{\phi}(1) = 0 \quad \text{on the test sphere}, \quad (3.9)$$

$$\phi \rightarrow 1 \quad \text{as } R \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

(3.8) 式の解を得ることは容易であり

$$\chi(R) = C_0 R + \frac{C_1}{R^2}, \quad (3.11)$$

である. ここで C_0 と C_1 は未知の定数である. (3.11) 式を (3.7) 式に代入することによって

$$\phi(R) = C_0 - \frac{2C_1}{R^3} + \frac{2C_2}{R^3}(1 + BR)e^{-BR}, \quad (3.12)$$

が得られる. また C_2 は未知の定数である. 定数 C_0 は条件 (3.10) から, C_1 と C_2 は (3.9) から決められ,

$$C_0 = 1, \quad C_1 = (3 + 3B + B^2)/2B^2, \quad C_2 = 3e^B/2B^2, \quad (3.13)$$

となる.

条件付き平均による応力テンソル (2.44) は ϕ と χ により次のように書かれる:

$$\begin{aligned} \langle H\mathbf{T}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = & \frac{\mu U_0}{a} \left\{ 2\dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R - \frac{1}{2}(R\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}) \sin \theta (\mathbf{e}_R \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_R) \right. \\ & \left. - \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + B^2 \chi \cos \theta \mathbf{I} \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

試験球の表面上で応力を積分することにより抵抗 \mathbf{f}

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{Pressure}} + \mathbf{f}_{\text{Friction}} = \frac{4}{3}\pi\mu a \mathbf{U}_0 (B^2 \chi + \ddot{\phi}) = \frac{4}{3}\pi\mu \mathbf{U}_0 B^2 3C_1, \quad (3.15)$$

が得られる.

(3.13) 式で与えられる C_1 を (3.15) 式へ代入すると, 試験球に作用する力を得ることができる. 最終的には自己無撞着条件 (2.34) を使うことで

B (もしくは α) を決める 2 次方程式が得られる。これは簡単に解くことができ

$$B = \frac{9c + 3\sqrt{8c - 3c^2}}{4 - 6c}, \quad (3.16)$$

となる。ここで $c = 4\pi a^3 n/3$ であることを使った。(2.38) 式と (3.16) 式を使うことにより透過率 k の方程式が以下のように得られる：

$$k = \frac{(1 - c)(3c + 4 - 3\sqrt{8c - 3c^2})a^2}{18c}. \quad (3.17)$$

この式は Brinkman による結果と因子 $(1 - c)$ だけ異なる。

3.2 中間層を考慮した場合の透過率

このセクションでは中間層を考慮した場合の透過率の計算をする [28].
ここでも前のセクションと同じ座標系を使い、また同じ記号を使用する.
条件付流れの場合は次の方程式で表される :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \langle \mathbf{U}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = 0, \\ -\nabla \langle Hp(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle + \mu \nabla^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle - \mu \alpha^2 Q_S(R) \langle \mathbf{U}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3.18)$$

ここで, Q_S は (2.32) 式で定義され (2.33) を使っている. さらに (3.5) 式と (3.6) 式と同じ形の解を仮定している :

$$\langle \mathbf{U}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = U_0 \left\{ \Phi(R) \cos \theta \mathbf{e}_r - \left[\Phi(R) + \frac{R}{2} \dot{\Phi}(R) \right] \sin \theta \mathbf{e}_\theta \right\}, \quad (3.19)$$

$$\langle Hp(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = -\mu U_0 \frac{B^2}{a} \Pi(R) \cos \theta. \quad (3.20)$$

(3.19) 式と (3.20) 式を (3.18) の 2 番目の式に代入すると, 1 組の偏微分方程式を得る

$$\ddot{\Phi} + \frac{4}{R} \dot{\Phi} + B^2 \dot{\Pi} - B^2 Q_S \Phi = 0, \quad (3.21)$$

$$\ddot{\Pi} + \frac{2}{R} \dot{\Pi} - \frac{2}{R^2} \Pi - \dot{Q}_S \Phi = 0. \quad (3.22)$$

境界条件は以下の通りである :

$$\Phi(1) = \dot{\Phi}(1) = 0 \quad \text{on the test sphere}, \quad (3.23)$$

$$\Phi \rightarrow 1 \quad \text{as } R \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

(3.21) 式と (3.22) 式の連立微分方程式の厳密解を得ることは難しい.
したがって, 微分方程式の近似解を得るための直説法を採用する. この方法を実行するためには Φ_t の試行関数を仮定しなければならず, それを以下のように定義する

$$\begin{aligned} \Phi_t = & \underbrace{1 - \frac{5}{2R^3} + \frac{3}{2R^5}}_{\text{satisfy B.C. at } R=1 \text{ and } \infty} + a_1 \underbrace{R^2}_{\Phi=\dot{\Phi}=0 \text{ at } R=1} \underbrace{(R-1)^2}_{\text{becomes } 0, R \rightarrow \infty} \underbrace{e^{-2(R-1)}}_{\text{becomes } 0, R \rightarrow \infty} \\ & + a_2 R^2 (R-1)^2 \left[e^{-6(R-1)} + \frac{1}{10} e^{-3(R-1)} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

この試行関数 (3.25) は恒等的に境界条件 (3.23) と (3.24) を満たしている.
 a_j 項に見られる因子 R^2 は \dot{Q}_S の分母を消去するためにつけた. この分母

の消去により微分方程式 (3.22) を解くことが簡単になる.

領域 $R \geq 3$ では $\dot{Q}_S = 0$ なので, (3.22) 式の解は簡単に見つけられ

$$\Pi_+(R) = R + \frac{\Sigma}{R^2}, \quad (3.26)$$

である. ここで Σ は未知の定数であり, 境界条件 (3.24) が使用されている.

領域 $1 \leq R < 3$ では, 試行関数 (3.25) を (3.22) 式に代入することで²

$$\begin{aligned} \Pi_-(R) &= \Xi R + \frac{S}{R^2} + R \int_1^R \left(-\frac{\tilde{R}^2}{3} \right) \frac{1}{\tilde{R}^2} (-\dot{Q}_S \Phi_t) d\tilde{R} \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \int_1^R \left(-\frac{\tilde{R}^2}{3} \right) \tilde{R} (\dot{Q}_S \Phi_t) d\tilde{R}, \\ &= \Xi R + \frac{S}{R^2} + \frac{1}{16} \left(R^2 - 6 + \frac{5}{R} + \frac{5}{R^2} - \frac{6}{R^3} + \frac{1}{R^5} \right) \\ &+ a_1 \left[\left(\frac{R^4}{2} + \frac{R^3}{2} + \frac{23R^2}{4} + \frac{21R}{2} + \frac{67}{4} + \frac{67}{4R} + \frac{67}{8R^2} \right) \frac{\exp[-2(R-1)]}{8} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5R}{24} - \frac{1483}{192R^2} \right] \\ &+ a_2 \left\{ \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^3}{6} + \frac{55R^2}{36} - \frac{77R}{54} + \frac{82}{6^3} + \frac{164}{6^4 R} + \frac{164}{6^5 R^2} \right) \frac{\exp[-6(R-1)]}{72} \right. \\ &\quad \left. + \frac{16R}{3888} - \frac{4894}{6^7 R^2} \right. \\ &+ \frac{1}{10} \left[\left(R^4 + \frac{4R^3}{3} + \frac{50R^2}{9} + \frac{98R}{27} + \frac{145}{27} + \frac{290}{81R} + \frac{290}{3^5 R^2} \right) \frac{\exp[-3(R-1)]}{36} \right. \\ &\quad \left. + \frac{11R}{3^5} - \frac{1415}{3^7 R^2} \right] \left. \right\}, \quad (3.27) \end{aligned}$$

を得る. ここで Ξ と S は未知の定数である. 定数 S は自己無撞着条件から決めることができる. 試験球に作用する抵抗力 \mathbf{f} は

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_P + \mathbf{f}_F = \frac{4}{3} \pi \mu a \mathbf{U}_0 [B^2 \Pi_-(1) + \ddot{\Phi}_t(1)] = \frac{4}{3} \pi \mu a \mathbf{U}_0 B^2 3S, \quad (3.28)$$

により得られる. [参考, (3.15) 式]. よって (2.34) を使い

$$n \frac{4}{3} \pi \mu a \mathbf{U}_0 B^2 3S = \frac{\mu B^2 \mathbf{U}_0}{a^2}, \quad (3.29)$$

² $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$, で特殊解を u_1 と u_2 とする. Wronskian を $W(u_1, u_2)$ で表示すると, 微分方程式の解は $y = c_1 u_1 + c_2 u_2 + u_1 \int \frac{-R u_2}{W(u_1, u_2)} dx + u_2 \int \frac{R u_1}{W(u_1, u_2)} dx$ となる. ここでの $W(u_1, u_2) = -3/R^3$ である.

を導くことができ、さらに

$$S = \frac{1}{3c} \quad (3.30)$$

を得る。

一方、 Ξ と Σ は $R = 3$ における応力テンソルの連続条件により決めることができる。その一つは応力 $\langle HT(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle$ の $R - R$ 成分の連続条件から得られ

$$\Pi_-(3) = \Pi_+(3), \quad (3.31)$$

となる。ここで (3.25) 式で仮定された $\Phi_t(R)$ を使っている。次に (3.21) 式を考慮すると、条件

$$\dot{\Pi}_-(3) = \dot{\Pi}_+(3). \quad (3.32)$$

を得る。こうして、これら 2 つの式 (3.31) と (3.32) により Ξ と Σ を以下のように決定することができる：

$$\Xi = 1 - \frac{131}{729} - 0.1221a_1 - 0.008062a_2, \quad (3.33)$$

$$\Sigma = \frac{1}{3c} - \frac{55}{27} - 1.5318a_1 - 0.05506a_2.$$

(3.21) 式と a_j には B 以外に未知の定数は無い。(3.21) 式の解を見出すと言う事は $J[\Phi]$ の定常関数 Φ を見つけることと同等である [30]:

$$J[\Phi] = \int_1^R (R^4 \dot{\Phi}^2 + B^2 R^4 Q_s \Phi^2 - 2B^2 R^4 \dot{\Pi}_{\pm} \Phi) dR. \quad (3.34)$$

よって、 Φ_t を Φ の a_j による展開とみなす。係数 a_j は汎関数 $J[\Phi]$ が停留値となるという条件から決定される。すなわち、 $\partial J[\Phi]/\partial a_j = 0$ となることである。計算を簡単化するため Galerkin 法 [31] を使うと (3.34) は以下の方程式となる：

$$\int_1^R \left[-\frac{d}{dR} (R^4 \dot{\Phi}_t^2) + B^2 R^4 Q_s \Phi_t - B^2 R^4 \dot{\Pi}_{\pm} \right] \omega_j dR = 0, \quad (3.35)$$

または

$$\int_1^R L_1(\Phi_t) \omega_j dR = 0, \quad (3.36)$$

上の式で、 $\omega_1 = R^2(R-1)^2 e^{-2(R-1)}$ 、 $\omega_2 = R^2(R-1)^2 [e^{-6(R-1)} + e^{-3(R-1)}/10]$ であり、 $L_1(\Phi)$ は常微分方程式 (3.21) を表す。(3.36) 式を使うことで、 a_j を決定できる。しかしながら Simpson's 1/3 則を使った数値積分計算は簡単だが非常に計算量が多い。動径方向 R の積分領域は

$[1, \infty)$ であり, 数値積分を実施するにはこれを有限の領域 $[1, R_F]$ に限定しなければならない. ここでは $R_F = 100$ とした. 計算結果

$$\begin{cases} a_1 = \left[\left(0.2075 - \frac{0.01714}{c} \right) B^4 + \left(0.9702 - \frac{0.1043}{c} \right) B^2 + 0.002619 \right] / \Lambda, \\ a_2 = \left[\left(10.91 - \frac{2.545}{c} \right) B^4 + \left(21.74 - \frac{2.226}{c} \right) B^2 + 6.929 \right] / \Lambda, \\ \text{where} \\ \Lambda = 0.5520B^4 + 2.699B^2 + 1.600. \end{cases} \quad (3.37)$$

が得られる. (3.25), (3.37) と (3.27) 式を使うことで, $\ddot{\Phi}(1)$ と $\Pi_-(1)$ が得られるので, 試験球に働く力を算出できる. こうして自己無撞着条件を適用すると B を決める方程式として

$$\mathbf{U}_0 \mu c [\Pi_-(1) + \ddot{\Phi}_t(1)] = \mu B^2 \mathbf{U}_0.$$

上の方程式は流れ場の解を使うことによって具体的に書くことができ

$$c \left[\left(\Xi + \frac{1}{3c} \right) + (15 + 2a_1 + 2.2a_2) \right] = B^2,$$

が得られ,

$$\left(c\Xi - \frac{2}{3} \right) B^2 + (15 + 2a_1 + 2.2a_2)c = 0. \quad (3.38)$$

なる方程式が導出される. (3.33) 式と (3.37) 式で与えられる Ξ と a_1 , a_2 を (3.38) に入れ, a_j の分母を払い整理すると, B に関する 6 次の代数方程式

$$B^6 + \frac{6.893 - 32.43c}{M} B^4 + \frac{5.728 - 87.16c}{M} B^2 - \frac{37.87c}{M} = 0,$$

を得る. ここで

$$M = 0.3454 - 0.3395c. \quad (3.39)$$

である.

各 c に対する代数方程式の解を数値的に求め, 表 3.1 に示した. また, 各 c に対し, $\gamma = a/\sqrt{k}$ で定義される無次元量 γ も同様に表 3.1 に示した. つまり, (2.38) によれば

$$\gamma = \frac{a}{\sqrt{k}} = \frac{B}{\sqrt{1-c}} \quad (3.40)$$

となる. さらに, ここで得られた透過率と実験値との比較結果を表 3.2 に示す. γ の実験値との比較は図 3.1 に示した. これにより中間層を考慮して求めた γ (透過率の逆数) が実験結果とよく一致することがわかる. これは本論文の最も重要な結果である.

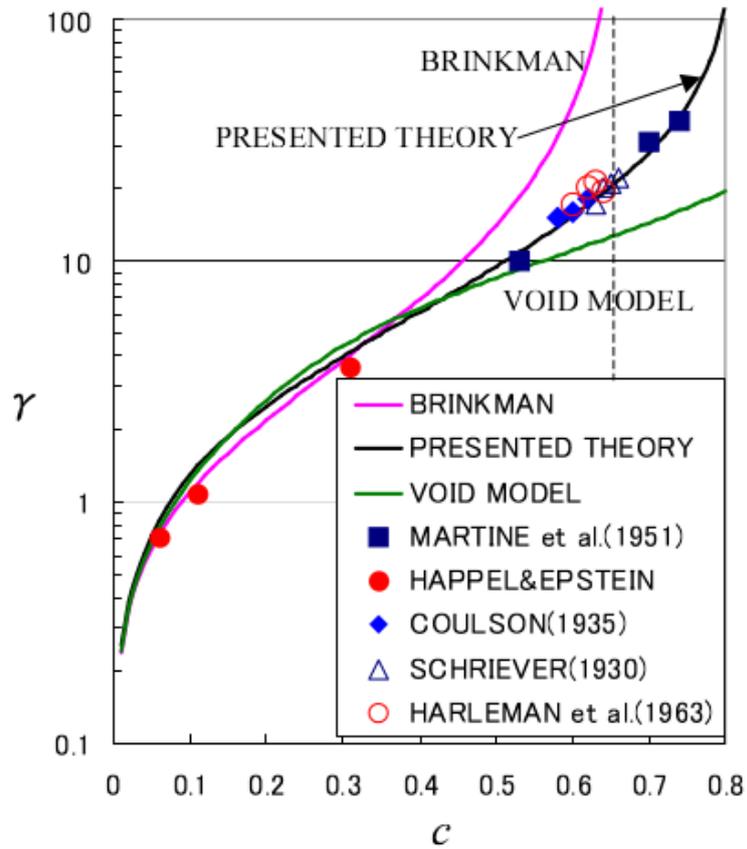


図 3.1: 中間層を考慮して計算した γ と実験結果との比較. BRINKMAN: (3.17) 式による値. VOID MODEL:付録 B (B.10) 式の結果.

表 3.1: いくつかの体積濃度に対する B と γ の値

体積濃度 c	B	γ
0.0001	0.0257	0.0257
0.001	0.0816	0.0816
0.01	0.2667	0.2680
0.05	0.6912	0.7091
0.1	1.181	1.245
0.2	2.477	2.769
0.3	4.099	4.899
0.4	5.766	7.444
0.5	7.543	10.67
0.6	9.605	15.19
0.7	12.25	22.37
0.8	16.17	36.16

表 3.2: ここで得られた透過率と実験値との比較 [Harleman et al.(1963)]

球の平均 直径 d (cm)	体積 濃度 c	透過率 の実験値 k (cm ²)	ここで得られた 透過率 k (cm ²)
0.2	0.60	34.6×10^{-6}	43.3×10^{-6}
0.2	0.62	24.5×10^{-6}	37.4×10^{-6}
0.2	0.63	22.0×10^{-6}	34.7×10^{-6}
0.14	0.62	15.7×10^{-6}	18.3×10^{-6}
0.092	0.63	5.70×10^{-6}	7.35×10^{-6}
0.039	0.64	1.03×10^{-6}	1.23×10^{-6}

3.3 試行関数のパラメタスタディ

前のセクションでは Brinkman の解 (3.12) の B の値を参考にして ω_i 内の A_i の値を決めた, 例えば, Brinkman の解によれば $c = 0.2$ に対しては $B \simeq 1.94$ 程度であり, $c = 0.4$ では $B \simeq 5.19$ 程度になる. そこで前節では $A_1 = 2, A_2 = 6$ とした. しかしながら, 試行関数としてもっとよい A_i と z があるのではないかと考えられる. そこで以下の試行関数の

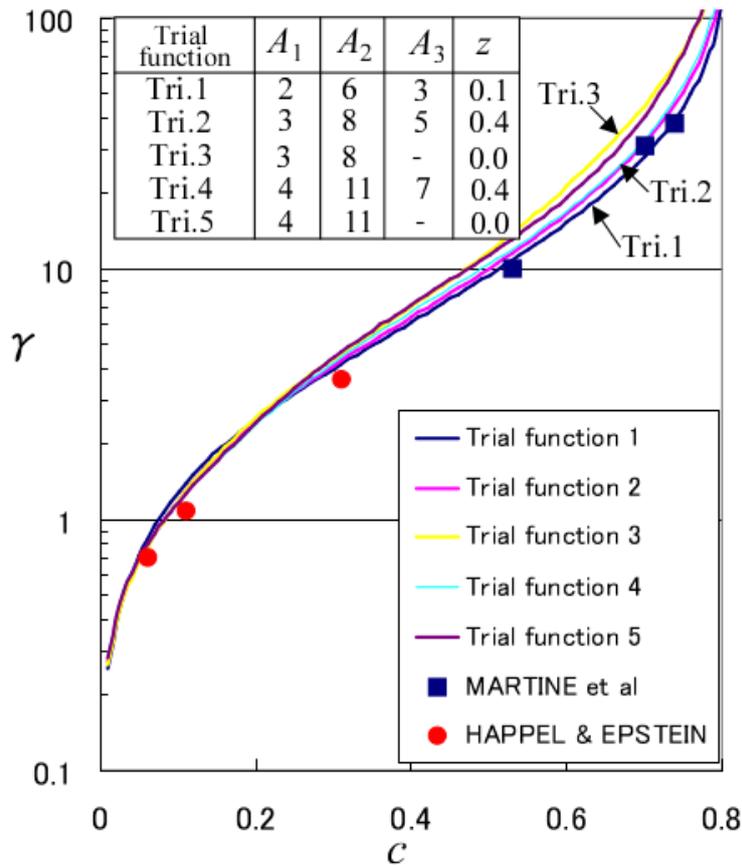


図 3.2: いくつかの試行関数に対する γ の比較.

A_i と z にいくつかの数値の組を与えて Galerkin 計算を実施した.

$$\begin{aligned} \Phi_t = 1 - \frac{5}{2R^3} + \frac{3}{2R^5} + a_1 R^2 (R-1)^2 e^{-A_1(R-1)} \\ + a_2 R^2 (R-1)^2 \left[e^{-A_2(R-1)} + z e^{-A_3(R-1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

これらの試行関数による γ の結果を図 3.2 に示した. なお, A_i' と z の値の組は図の左上に記した. ここで試行関数 1 とは前節で採用した (3.25)

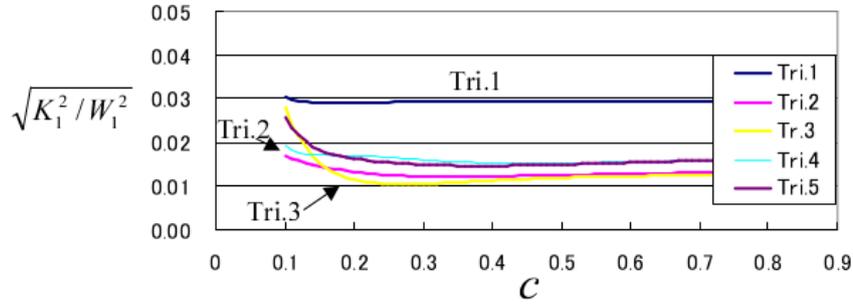


図 3.3: いくつかの試行関数に対する $\sqrt{K_1^2/W_1^2}$ の値.

式である. これらの試行関数の精度を「結論」の章で定義した $\sqrt{K_1^2/W_1^2}$ により確認した. 図 3.3 から見て取れるように, 試行関数 2 と 3 が基礎方程式 (3.21) のもっとも適切な解であると考えられる. 数値上最も良い試行関数 3 は $c > 0.5$ で実験値よりも若干大きめに出ている. しかしながら, 1983 年当時の結果がこれらの解とほぼ一致していることを注記したい.

第4章 円柱をランダムに配列した集合体の透過率

この章では繊維状物質の透過率について議論する。この繊維状物質は円柱をランダムに配列した集合からなるとモデル化する。この場合、この集合を通過する流れのタイプには2通りがある：一つは円柱の軸に沿う流れ (longitudinal flow) であり、もう一つは円柱の軸に直交する流れ (transverse flow) である (図 1.3 を見よ)。

我々はこちらで N 個すべてが半径 a の円柱をランダムに配列した集合体を通過する遅い流れを考えている。しかも、円柱は統計的に一様に分布していると仮定している。流れを2次元問題と限定するために、円柱は剛体的に固定されているとし、その長さは無限大と仮定する。円柱の中心の位置ベクトルは1枚の平面内あるとする；各円柱の軸はこの面に垂直となり、その単位面積当たりの数密度は λ とする。したがって、円柱の体積濃度 c は $\pi\lambda a^2$ である。

円柱の集合を通過する流れは連続の式と Stokes の方程式により表される。円柱の内部では $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\nabla p = 0$ と定義する。ここで \mathbf{u} は流体の速度で p は流体の圧力とする。前章のセクション 3.2 と同じ手続きにより、ランダムな球の配列を通過する流れの方程式と同様の方程式が得られる：

i) 平均流に対し

$$\begin{cases} \nabla \cdot \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle = 0, \\ -\nabla \langle H p(\mathbf{r}) \rangle + \mu \nabla^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle - \mu \alpha^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4.1)$$

ii) 条件付平均流に対し

$$\begin{cases} \nabla \cdot \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle = 0, \\ -\nabla \langle H p(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle + \mu \nabla^2 \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle - \mu \alpha^2 Q_C \langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (4.2)$$

上記の方程式では、セクション 3.2 と同じ記号を使用している。ただし Q_C は円柱に対する中間層の動径方向依存を表す関数である。これは円周 $2\pi a$ に対する \mathbf{r} に中心をもつ半径 a の円弧の比から得られる (図 4.1 を見

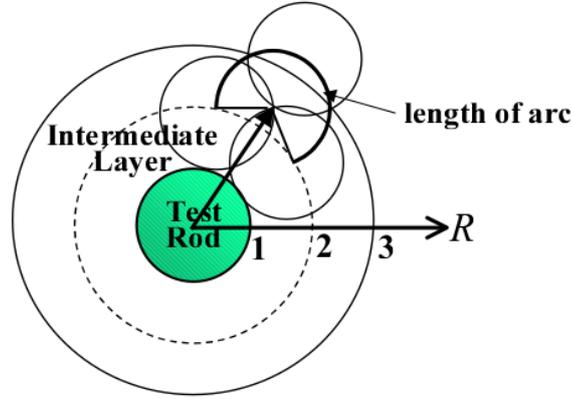


図 4.1: 試験円柱周りの中間層.

よ). よって, 試験円柱周りの円柱の幾何学的配置から

$$Q_C(R) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \arccos \frac{3-R^2}{2R} & \dots \quad (1 \leq R < 3), \\ 1 & \dots \quad (R \geq 3), \end{cases} \quad (4.3)$$

を得る. ここで $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/a$ である.

この場合の自己無撞着条件は次の通りである: λ は円柱の平均数密度であり, \mathbf{f} は円柱に対する抵抗であるので, 単位体積あたりの平均抵抗分布 $\mathcal{F}(\mathbf{r})$ とに

$$\lambda \mathbf{f} = \mathcal{F} = \mu \alpha^2 \langle \mathbf{U} \rangle, \quad (4.4)$$

を要請する.

4.1 円柱軸方向流れの透過率

円柱の軸に沿った流れに対する透過率を議論する. 円筒座標系 (r, θ, z) を考え, z -を試験円柱の軸に合致するようにとる. また, $R = r/a$ で定義される無次元の動径 R を導入する. 方程式 (4.2) に対する境界条件は

$$\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{O}) \rangle = \mathbf{0}, \quad \text{on the test rod}, \quad (4.5)$$

$$\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{O}) \rangle = \mathbf{U}_0 = U_0 \mathbf{e}_z, \quad \text{at infinity}, \quad (4.6)$$

となる．ここで \mathbf{e}_z は z -軸方向の単位ベクトルであり， \mathbf{U}_0 は定ベクトルである．このケースは，流れ場が本質的に1次元となるので比較的単純な状況となる．無限遠での条件を考慮し

$$\langle \mathbf{U}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \rangle = \langle \mathbf{U}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = U_0 \psi(R) \mathbf{e}_z, \quad (4.7)$$

とする．この速度は連続の式を満たしている．こうして，(4.7) 式を運動方程式 (4.2) に代入すると， $\partial \langle Hp \rangle / \partial R = 0, \partial \langle Hp \rangle / \partial \theta = 0$ と

$$\frac{d^2 \psi(R)}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi(R)}{dR} - \alpha^2 a^2 Q_C \psi(R) = \frac{a^2}{\mu U_0} \frac{\partial}{\partial z} \langle Hp \rangle \quad (4.8)$$

を得る．上の方程式から $\partial \langle Hp \rangle / \partial z = \text{constant}$ ，が得られるので圧力を

$$\langle Hp(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = -\mu U_0 \frac{B^2}{a^2} z, \quad (4.9)$$

と書くことができる．ただし， $B = \alpha a$ であり，抵抗には寄与しない任意定数を無視している．(4.9) 式を (4.8) に代入すると以下の式を得る：

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{R} \dot{\psi} - B^2 Q_C \psi + B^2 = 0. \quad (4.10)$$

境界条件を次のように書き換えることができる：

$$\psi(1) = 0, \quad (4.11)$$

$$\psi \rightarrow 1 \quad \text{as} \quad R \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

平均応力テンソルも ψ と圧力 (4.9) により同様に書くことができる：

$$\langle H\mathbf{T}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = \mu U_0 \frac{B^2}{a^2} z \mathbf{I} + \mu \frac{U_0}{a} \dot{\psi} (\mathbf{e}_R \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_R). \quad (4.13)$$

この応力テンソルを円柱表面上で積分することで，円柱単位長さあたりの平均抵抗 \mathbf{f} を得る：

$$\mathbf{f} = \int_S \langle H\mathbf{T} \rangle \cdot \mathbf{n}_1 dS = 2\pi \mu \dot{\psi} \mathbf{U}_0, \quad (4.14)$$

ここで \mathbf{n}_1 は外向きの単位法線ベクトルであり， S は円柱上単位長さあたりの面積である．単位堆積あたりの平均抵抗は $\mu \alpha^2 \mathbf{U}_0$ であるので，自己無撞着条件は

$$\lambda \mathbf{f} = \mu \alpha^2 \mathbf{U}_0,$$

となり，

$$B^2 = 2c\dot{\psi}, \quad (4.15)$$

を得る.

従って, ψ が得られれば, (2.38) 式と (4.15) 式から, (B の値より) 透過率 k が得られる. 第3章で行ったように (4.10) 式の近似解を求めるために直接法を使う. 試行関数 ψ_t を次のように仮定する

$$\psi_t = 1 - \frac{1}{R^2} + \bar{a}_1(R-1)e^{-(R-1)} + \bar{a}_2(R-1)e^{-2(R-1)}. \quad (4.16)$$

この関数は境界条件 (4.11) 式と (4.12) 式を満たすように選択されている. Galerkin 法により係数 a'_j は

$$\int_1^{R_F} L_2(\psi)\bar{\omega}_j dR = 0, \quad (4.17)$$

により決定される. ここで $L_2(\psi)$ は微分方程式 (4.10) を表し, $\bar{\omega}_j$ は $\bar{\omega}_1 = (R-1)\exp[-(R-1)]$ と $\bar{\omega}_2 = (R-1)\exp[-2(R-1)]$ である. また

$$\bar{a}_j\bar{\omega}_j(1) = 0,$$

$$\bar{a}_j\bar{\omega}_j \rightarrow 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty,$$

となることを注記しておく.

$R_F = 100$ とし, 数値計算を実行すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_1 = [-0.0027783B^4 + 0.072309B^2 - 0.025415]/\bar{\Lambda}, \\ \bar{a}_2 = [0.056187B^4 - 0.10352B^2 - 0.0038565]/\bar{\Lambda}, \\ \text{where} \\ \bar{\Lambda} = 0.0054133B^4 + 0.052022B^2 + 0.024289. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

が得られる. (4.15) 式が ψ_t を使い表されるので

$$B^2 = 2c\dot{\psi}_t(1) = 2c(2 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2), \quad (4.19)$$

となり, (4.18) 式をこれに代入し, \bar{a}_j の分母を払うことで, B の6次方程式を代数方程式を得る.

$$B^6 + (9.6100 - 23.732c)B^4 + (4.4869 - 26.909c)B^2 - 7.1330c = 0. \quad (4.20)$$

各 c の値に対するこの方程式の根を表 4.1 に示した.

図 4.2 はここで得られた γ と第3章で得られた球の場合の γ との比較である.

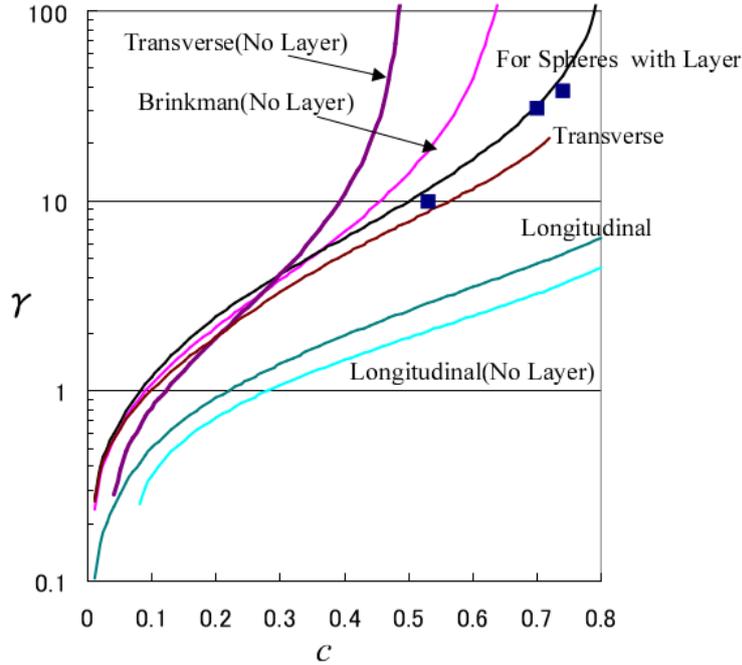


図 4.2: 球に対する γ [28] と円柱に対する γ の比較. ここで “No Layer” は中間層が無い場合を表す. また付録 C も見よ.

4.2 円柱軸に直交する流れの透過率

次に円柱と直交する流れに対する透過率を考える. 基礎方程式と境界条件は (4.1)-(4.6) である. 前のセクションと同じ座標系をここでも使う. 円柱と直交する流れに対しては, 無限遠における速度 \mathbf{U}_0 を次のように書くことができる:

$$\mathbf{U}_0 = U_0(\cos \theta \mathbf{e}_R - \sin \theta \mathbf{e}_\theta), \quad (4.21)$$

ここで, \mathbf{e}_R と \mathbf{e}_θ は各々 R と θ 軸上の単位ベクトルである. (4.21) 式と照らし合わせ, 基礎方程式の解の形を以下のように仮定しよう:

$$\langle \mathbf{U}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = U_0[\Psi(R) \cos \theta \mathbf{e}_R - \{\Psi(R) + R\dot{\Psi}(R)\} \sin \theta \mathbf{e}_\theta], \quad (4.22)$$

と

$$\langle Hp(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = -\mu U_0 \frac{B^2}{a} \Omega \cos \theta. \quad (4.23)$$

表 4.1: いくつかの c に対する B と γ の値.

体積濃度 c	B	γ
0.0001	0.01261	0.01261
0.001	0.03992	0.03994
0.01	0.12780	0.1284
0.05	0.3018	0.3090
0.1	0.4600	0.4848
0.2	0.7742	0.8656
0.3	1.161	1.388
0.4	1.629	2.103
0.5	2.110	2.984
0.6	2.553	4.037
0.7	2.952	5.390
0.8	3.313	7.468
0.9	3.643	11.52

速度 (4.22) 式は連続の式を満たしている. 次に, (4.22) 式と (4.23) 式を運動方程式に代入すると, $\Psi(R)$ と $\Omega(R)$ が満たす連立微分方程式を得る:

$$\ddot{\Psi} + \frac{3}{R}\dot{\Psi} + B^2\dot{\Omega} - B^2Q_C\Psi = 0, \quad (4.24)$$

と

$$\ddot{\Omega} + \frac{1}{R}\dot{\Omega} - \frac{1}{R^2}\Omega - B^2\dot{Q}_C\Psi = 0, \quad (4.25)$$

である. これに境界条件

$$\Psi(1) = \dot{\Psi}(1) = 0, \quad (4.26)$$

$$\Psi \rightarrow 1 \quad \text{as} \quad R \rightarrow \infty. \quad (4.27)$$

が課せられる. Ψ と Ω で表した平均応力テンソルは

$$\begin{aligned} \langle HT(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle &= \mu U_0 \frac{B^2}{a} \Omega \cos \theta \mathbf{I} \\ &+ \mu \frac{U_0}{a} [2\dot{\Psi} \cos \theta \mathbf{e}_R \mathbf{e}_R - (\dot{\Psi} + R\ddot{\Psi}) \sin \theta (\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_R \mathbf{e}_\theta) - \dot{\Psi} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta], \end{aligned} \quad (4.28)$$

となる. 単位長さあたりの抵抗力は

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{Pressure}} + \mathbf{f}_{\text{Friction}} = \mu \mathbf{U}_0 [B^2\Omega(1) + \ddot{\Psi}(1)], \quad (4.29)$$

である。よって、自己無撞着条件は

$$c[B^2\Omega + \ddot{\Psi}] = B^2, \quad (4.30)$$

のように書かれ、基礎方程式 (4.24) と (4.25) の解が求められたという条件の下で、この式から B の値を算出することができる。しかしながら、これまで同様にこの連立常微分方程式の厳密解を得ることは難しい。更に面倒なことが2つ生じている；その一つは関数 \dot{Q}_C が $R = 1$ と $R = 3$ で発散していることである。つまり

$$\dot{Q}_C(R) = \frac{R^2 + 3}{\pi\sqrt{(3-R)(3+R)(R-1)(R+1)}}, \quad (4.31)$$

となるのである。二つ目は常微分方程式の非斉次項 $\dot{Q}_C\Psi$ の好ましくない挙動のため直説法により近似解を求めることができないのである。 $R = 1$ と 3 付近での $\dot{Q}_C\Psi$ の挙動は次のようになる： $\dot{Q}_C \sim (\Delta R)^{-1/2}$ であり、境界条件より $\Psi \sim (\Delta R)^2$ であるから¹、非斉次項 $\dot{Q}_C\Psi$ は $R \rightarrow 1$ で $\dot{Q}_C\Psi \rightarrow 0$ となる。ここで $\Delta R = R - 1$ である。一方、 $\Delta R' = R - 3$ とすると $\dot{Q}_C \sim (\Delta R')^{-1/2}$ で $\Psi \sim 1$ であるから、 $R \rightarrow 3$ で $\dot{Q}_C\Psi \rightarrow \infty$ となる。よって非斉次項は $R = 3$ でのみ特異となることが分かる。しかしながら、この点は条件付平均流れ場という意味で通常の点であると考えられる。このような理由を考慮したうえで、さらに計算を進めるためには \dot{Q}_C を次のように修正する：

$$\dot{Q}_M(R) = 2 \left\{ e^{-8(R-1)} + e^{10(R-3)} + \frac{3}{10} \right\}, \quad (4.32)$$

この関数は $1 < R < 3$ ではほぼ \dot{Q}_C に等しいが、それだけではなく $R = 1$ と 3 で特異とならない。こうして、 $1 \leq R \leq 3$ で特異にならない非斉次項 \dot{Q}_M を得たことになる。 \dot{Q}_C と \dot{Q}_M との比較を図 4.3 に表示した。

さて、試行関数 Ψ_t を

$$\Psi_t = 1 - \frac{5}{3}e^{-2(R-1)} + \frac{2}{3}e^{-5(R-1)} + (R-1)^2 \left\{ \hat{a}_1 e^{-3(R-1)} + \hat{a}_2 e^{-7(R-1)} \right\} \quad (4.33)$$

と仮定する。これは境界条件 (4.26) と (4.27) を満たしている。 \dot{Q}_M と Ψ_t を (4.26) 式に代入することで、(4.25) 式の領域 $1 \leq R < 3$ における解

$$\Omega_- = \hat{\Xi}R + \frac{\hat{S}}{R} + R \int_1^R \frac{\dot{Q}_M\Psi_t}{2} dR' - \frac{1}{R} \int_1^R \frac{R'^2\dot{Q}_M\Psi_t}{2} dR' \quad (4.34)$$

¹ Ψ は $R = 1$ において次のように展開できる： $\Psi(R) \approx a_0 + a_1(R-1) + a_2(R-1)^2 + \dots$ 。しかしながら、境界条件 $\Psi(1) = \dot{\Psi}(1) = 0$ により、 $\Psi \approx a_2(R-1)^2 + o(\Delta R^2)$ である。

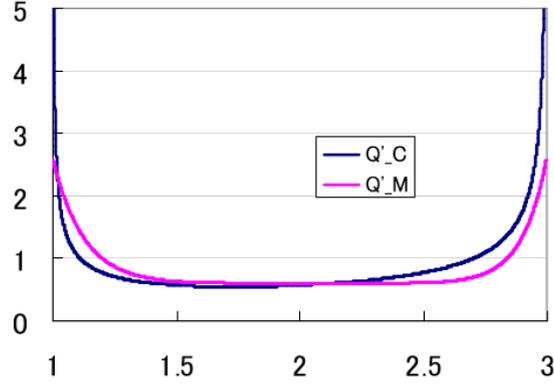


図 4.3: Comparison of \dot{Q}_C with \dot{Q}_M .

を得る．この中の積分は非常に簡単であるが面倒である．領域 $R \geq 3$ に対しては以下ようになる：

$$\Omega_+ = R + \frac{\hat{\Sigma}}{R}. \quad (4.35)$$

上の方程式で $\hat{\Sigma}$, \hat{S} , $\hat{\Sigma}$ は未知の定数である．このうちセクション 3.2 と同じようにまずは \hat{S} を決定することができる：(4.29) 式で与えられる抵抗力 \mathbf{f} を

$$\mathbf{f} = \mu \mathbf{U}_0 \pi 2 \hat{S},$$

と表現することができるので，自己無撞着条件より

$$\hat{S} = \frac{1}{2c}, \quad (4.36)$$

となるのである．一方， $\hat{\Sigma}$ と $\hat{\Sigma}$ は $R = 3$ における応力の連続性から決めることができる．応力 $\langle H\mathbf{T}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle$ の $R - R$ 成分の連続性から

$$\Omega_-(3) = \Omega_+(3), \quad (4.37)$$

が得られる．ここで (4.33) 式で仮定した $\Psi_t(R)$ を使った．応力の他のすべての成分はこの点で連続となる必要があり，したがって (4.24) 式を考えると，以下の条件が得られる：

$$\dot{\Omega}_-(3) = \dot{\Omega}_+(3). \quad (4.38)$$

こうして、(4.37) 式と (4.38) 式から $\hat{\Xi}$ と $\hat{\Sigma}$ を決めることができ

$$\begin{aligned}\hat{\Xi} &= 0.69655 - 0.023576\hat{a}_1 - 0.0023425\hat{a}_2, \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{2c} - 1.9357 - 0.094545\hat{a}_1 - 0.0045444\hat{a}_2.\end{aligned}\tag{4.39}$$

が得られる。

以上で準備が整ったので (4.24) 式の近似解を得るために Galerkin 法を使う。すなわち

$$\int_1^{R_F} L_3(\Psi)\hat{\omega}_j dR = 0,\tag{4.40}$$

ここで $\hat{\omega}_1 = (R-1)^2 \exp[-3(R-1)]$ であり $\hat{\omega}_2 = (R-1)^2 \exp[-7(R-1)]$ である。(参考, $\hat{\omega}_j(1) = 0$ であり $R \rightarrow \infty$ とすることで $\hat{\omega}_j \rightarrow 1$ となることに注意。) $R_F = 100$ と設定し, 計算を実行することで以下の結論を得る:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \frac{1}{\hat{\Lambda}} \left[\left(3.2562 - \frac{1.0718}{c} \right) B^4 + \left(149.73 - \frac{59.567}{c} \right) B^2 - 0.81766 \right], \\ \hat{a}_2 = \frac{1}{\hat{\Lambda}} \left[\left(3.8879 - \frac{7.1466}{c} \right) B^4 + \left(457.06 - \frac{131.78}{c} \right) B^2 - 1009.1 \right], \\ \hat{\Lambda} = (2.6597B^4 + 3.7524B^2 + 0.47142) \times 10^7.\end{cases}\tag{4.41}$$

$\Psi_t(R)$ と $\Omega_-(R)$ を得ることができたので, 抵抗力 \mathbf{f} が得られる。 B を決めるための自己無撞着条件は

$$\left(c\hat{\Xi} - \frac{1}{2} \right) B^2 + c \left[10 + 2(\hat{a}_1 + \hat{a}_2) \right] = 0,\tag{4.42}$$

となる。ここで $\hat{\Xi}$ は (4.39) 式から得られ, \hat{a}_1 と \hat{a}_2 は (4.41) で与えられている。 \hat{a}_j の分母を払い, 整理すると以下の B に関する 6 次の代数方程式を得る:

$$\begin{cases} B^6 + \frac{216.55 - 235.42c}{W} B^4 + \frac{3908.6 - 13527c}{W} B^2 - \frac{25676c}{W} = 0, \\ \text{where} \\ W = 1.0061 - 1.4017c.\end{cases}\tag{4.43}$$

この代数方程式の根と γ をいくつかの c に対し求め, それを表 4.2 に示した。また γ は図 4.2 の中に表示している。

表 4.2: B と γ の値

体積濃度 c	B	γ
0.0001	0.002563	0.002564
0.001	0.008118	0.008118
0.01	0.2604	0.2617
0.1	0.9684	1.021
0.2	1.730	1.934
0.3	2.770	3.310
0.4	4.051	5.230
0.5	5.507	7.788
0.6	7.311	11.56
0.7	10.27	18.74

4.3 円柱軸直交流れ試行関数のパラメタスタディ

セクション 3.3 と同じように、より良い近似解を見出すために以下の試行関数に対するいくつかの Galerkin 計算を行った。

$$\Psi_t = 1 - \frac{5}{3}e^{-2(R-1)} + \frac{2}{3}e^{-5(R-1)} + (R-1)^2 \left\{ a_1 e^{-A_1(R-1)} + a_2 e^{-A_2(R-1)} \right\}. \quad (4.44)$$

いくつかの試行関数による計算による γ の結果を図 4.4 に示した。試行関数に用いた A_i は図の左上に載せた。試行関数 4 は本文中の (4.33) 式であり、まとめの章で定義した $\sqrt{K_3^2/W_3^2}$ の値を最小にするものである。

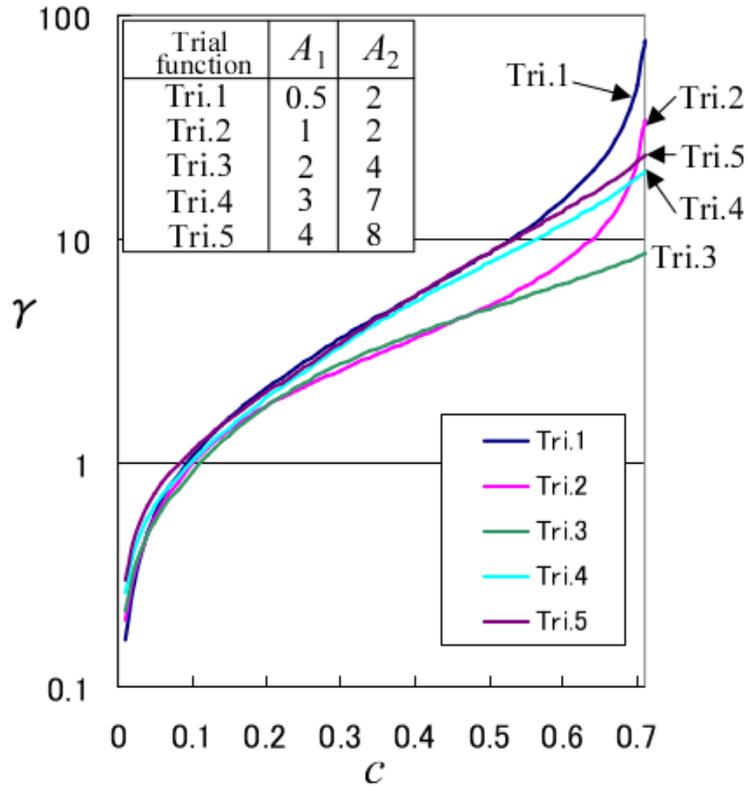


図 4.4: 様々な試行関数に対する γ の比較.

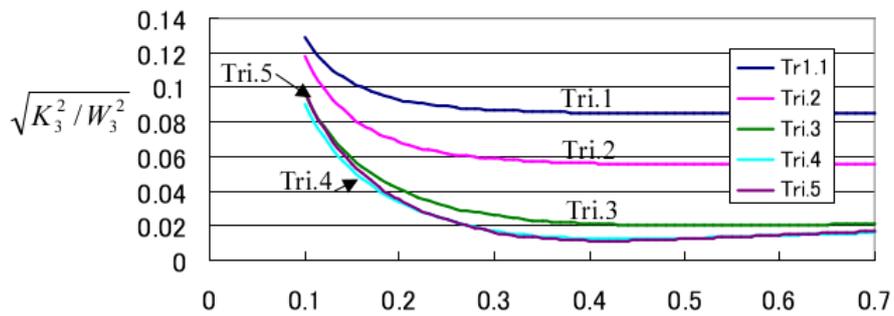


図 4.5: 様々な試行関数に対する $\sqrt{K_3^2/W_3^2}$ の値.

第5章 最後に

第1章で記したように、統計平均による方法を採用しても高濃度に充填された粒状層に対して現実的な透過率を予測することができないという結果になる。すなわち、Brinkmanと同じ結果となることをみた。したがって、統計的な方法ですらこの場合には適用できないかのようにみえる。しかしながら、統計的な手法を用いた理論のもとで Buevich & Marcov により提唱された中間層という概念を導入することによって、現実的な透過率を予測することができた。これはすなわち $c = 2/3$ においても透過率がゼロとならないパラドクスを回避する理論である。言い換えれば、多孔性媒質内に流体が浸透できないことを意味する臨界濃度を中間層を無視した理論による $c = 2/3$ よりも大きいほうにシフトさせたと言える。これは次のような理由からもっともなことである。つまり、条件付平均場における Darcy 抵抗の分布は試験球の周りでは無限遠での分布の強さより小さくなっているからである。(それで流体は多孔性媒質内をよりたやすく通過できる。) 実際、この修正により高密度に充填された粒状層に対し実験とよく一致する結果を得た。

一方、領域 $c < 0.4$ で、無次元量の γ は中間層を無視して得られた γ_{Br} よりも僅かに大きい。これは次のような理由からである。中間層を考慮することで Darcy 抵抗は試験球の周りで減少する。したがって、その周りの平均流の速度が増大し、一方で粘着条件のため球上での速度がゼロとなることは、この場合も当然同じである。よって、球面上での速度勾配が増大する。このことは試験球表面での摩擦力の増大へとつながる。これと同じ効果は試験球周りに抵抗力の空洞領域を作ったモデルの場合にも見られる(付録 B を見よ)。

第4章では繊維状物質のモデルである円柱のランダムな集合に対する透過率を議論し、体積濃度 c の全領域にわたり円柱の軸に沿った流れに対する透過率はそれに直交する流れに対するものより大きいことを導出した。軸に直交する流れの場合、体積濃度 c が大きいほうでは中間層を考慮した透過率はそれを無視した流れよりも大きい。しかしながら、軸に沿う流れでは中間層を考慮した流れに対する透過率は中間層を無視した場合よりも c の全領域で小さい。つまり、軸に沿う流れでは中間層を考慮すると流れにくくなる。これは、体積濃度が低い場合の球に対する透過率が、中間

層を無視した場合のほうが小さくなることと似ている。図 4.3 より、中間層を無視した場合、軸に直交する流れでは無次元量 γ (透過率の逆数) は $c = 1/2$ で発散し (参考, 付録 C), これは球の場合 $c = 2/3$ で発散するのと類似している。

物体が受ける抵抗力は粘性による (摩擦) 抵抗と圧力によるものがある。

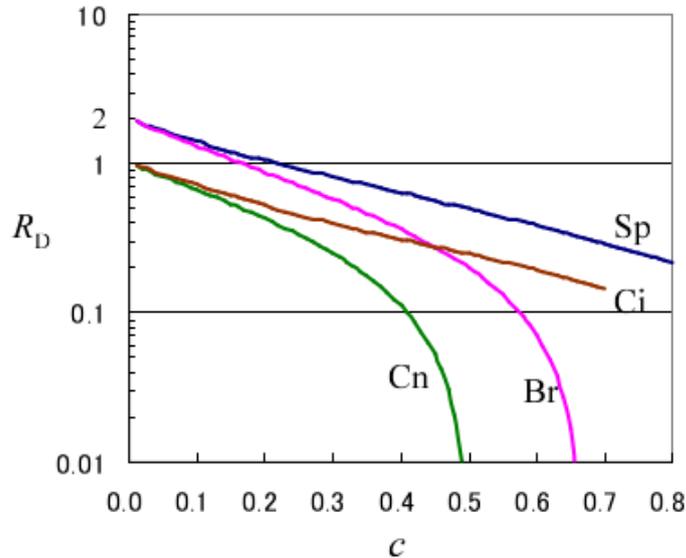


図 5.1: 比, R_D , は粘性抵抗/圧力抵抗. **Sp**: 中間層を考慮した場合の球の充填に対する比, **Br**: 同じ問題の Brinkman による結果, **Ci**: 中間層を考慮した場合の円柱軸に沿う流れでの比, **Cn**: 中間層を無視した場合の円柱軸に沿う流れでの比.

図 5.1 ではこの比 $R_D = (\text{粘性抵抗}) / (\text{圧力による抵抗})$ を示した. Brinkman モデルや球の集合体に対し, 試験物体に働く抵抗は $c \rightarrow 0$; で Stokes 抵抗 $R_D \rightarrow 2$ となることはよく知られている. 一方, 同様に図 5.1 から, 高濃度の球の粒状層に中間層を導入した場合の抵抗力は主に圧力による抵抗となる.

本論文では基礎方程式の近似解を求めるために Galerkin 法を使っている. したがって, この Galerkin 法の精度はどの程度であるかを特定することは重要である. そこで Galerkin 法により Brinkman 方程式の近似解を求め, その解から B の値を求める. それを B_A と記す. この B_A とセクション 3.1 での厳密解から得られた B (それを B_E と記す) とを比較する. これら計算法の簡単な紹介と B_A と B_E がよく一致することを付録 D に記

した。つまり、Galerkin 法による近似解が解であるための必要性を確認したこととなる。

ここで使った近似解 (もしくは試行関数) の収束性についてはまったく議論していない。この疑問については答えようがないからである。何故なら、近似解 (もしくは試行関数) を何らかの直交関数系から選択していないからである。直交関数にこだわり、例えば試行関数を多項式で構成するならば、期待する解を得るにはかなりの高次の多項式を使用しなければならないだろう。しかし、これは (当時の PC の性能を考えると) 計算的に非常に困難である。本論文で採用した試行関数内の指数関数は、高次となる多項式を避けて通ることを可能としている。以上のような理由から、試行関数の選択には細心の注意をもって行わなければならない。第3章と第4章で行った試行関数の選択方法について記しておく：いくつかの適切と思われる試行関数の中から、最大限許容し得る関数として次の式で定義される量 $\sqrt{K_j^2/W_j^2}$ を最小化する関数を採用した。

第3章では、

$$K_1^2 = \int_1^{R_F} \left[\ddot{\Phi}_t + \frac{4}{R} \dot{\Phi}_t + B^2 \dot{\Pi}_\pm - B^2 Q_S \Phi_t \right]^2 dR = \int_1^{R_F} \left\{ L_1[\Phi_t] \right\}^2 dR,$$

$$W_1^2 = \int_1^{R_F} \left[\ddot{\Phi}_t^2 + \frac{16}{R^2} \dot{\Phi}_t^2 + B^4 \dot{\Pi}_\pm^2 + B^4 Q_S^2 \Phi_t^2 \right] dR,$$

を定義する。

次に第4章円柱軸に沿う流れに対しては

$$K_2^2 = \int_1^{R_F} \left\{ L_2[\psi_t] \right\}^2 dR,$$

$$W_2^2 = \int_1^{R_F} \left[\ddot{\psi}_t^2 + \frac{1}{R^2} \dot{\psi}_t^2 + B^4 + B^4 Q_C^2 \psi_t^2 \right] dR,$$

を定義し、また軸に直交する流れに対しては以下の関数を定義した：

$$K_3^2 = \int_1^{R_F} \left\{ L_3[\Psi_t] \right\}^2 dR,$$

$$W_3^2 = \int_1^{R_F} \left[\ddot{\Psi}_t^2 + \frac{1}{R^2} \dot{\Psi}_t^2 + B^4 \dot{\Omega}_\pm^2 + B^4 Q_C^2 \Psi_t^2 \right] dR.$$

これらの値を表 5.1 に示した。

なお、上記の条件はすべて必要条件であって十分条件ではないことを注記しておく。

表 5.1: $\sqrt{K_j^2/W_j^2}$ の値.

体積 濃度 c	$\sqrt{K_1^2/W_1^2}$	$\sqrt{K_2^2/W_2^2}$	$\sqrt{K_3^2/W_3^2}$
0.1	0.028	0.120	0.090
0.2	0.040	0.038	0.033
0.3	0.022	0.033	0.017
0.4	0.015	0.034	0.012
0.5	0.013	0.030	0.013
0.6	0.012	0.025	0.014
0.7	0.012	0.020	0.016
0.8	0.013	0.015	—
0.9	0.013	0.012	—

謝辞

この論文への多くの貴重なコメント並びに長年にわたるご指導に対して元東京都立大学総長楠川絢一教授に感謝いたします。

付録A Darcy則

多孔性媒質内を透過する流れの先駆的な研究は1856年 Darcy によって行われた。彼は図 A.1 に示したような条件の下で、砂で充たされた断面 A の直立するパイプを使い実験を行った。この垂直で真直ぐな充填層を浸透する流れの研究から、Darcy は流量 Q は高さ $h_2 - h_1$ に比例し、流路長さ ΔL には反比例、さらに砂の性質に依存する係数 K に比例すると結論した。(しかしながら彼は砂の性質と同様流体の性質にも依存することを見落とした。) Darcy 則は

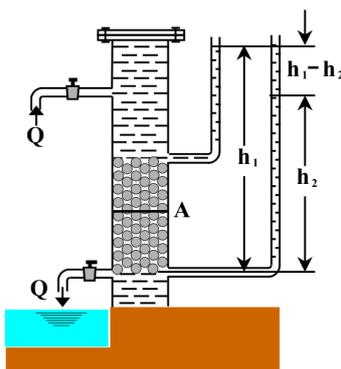


図 A.1: Darcy 則を実証する装置.

$$Q = KA \frac{h_1 - h_2}{\Delta L}, \quad (\text{A.1})$$

と書かれる。ここで k は透過率で h は水頭である。今、 $K = k\rho g/\mu$ とするならば (A.1) 式は

$$\frac{Q}{A} = -\frac{k(\rho gh_2 - \rho gh_1)}{\mu \Delta L} = -\frac{k \Delta P}{\mu \Delta L}, \quad (\text{A.2})$$

となる。ただし ρ は流体の密度であり、 g は重力加速度、 ΔP は圧力降下を表している。上の方程式を単位面積当たりを通過する流量 \mathbf{q} を使いベクトル形式で表すと次のようになる：

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu} \nabla P. \quad (\text{A.3})$$

最後に透過率を測定する最近の実験装置 [23] を図 A.2 に紹介する。この装置では特に球状粒子の形状と大きさに細心の注意が払われている (直径 1[mm] の高精度ステンレス球)。これらの球を内径 50.8[mm] 厚めの真鍮製シリンダーにランダムに詰め、システムに気泡が入らないように水を充たしていく。このシステム内に定常な水流を透過させる；その流量は水流コントローラで制御される。高精度差動マノメータにより周期的に校正された、圧力変換器により圧力差が測定される。

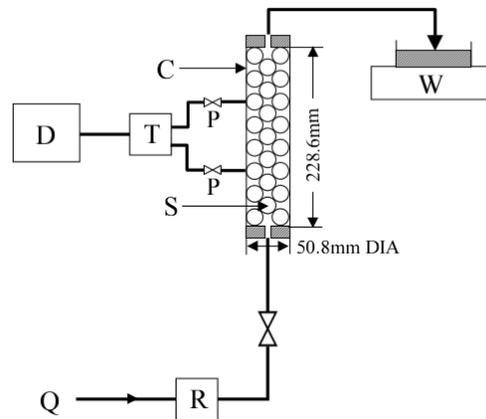


図 A.2: 球の充填層の透過率を測定する装置. C: 真鍮製円筒, S: ステンレス球, Q: 供給水, W: 重量測定, P: 圧力タップ (76.2 mm 間隔), T: 圧力変換器, D: デジタル電圧計, R: 定水量レギュレータ.

付録B 試験球周りの空洞モデル

第1章でも述べたように，条件付確率密度関数 $P(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$ の性質より試験球周りには球の中心が入り込まない空洞領域が形成される：

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) = \begin{cases} 0 & \text{for } a \leq |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| < 2a, \\ 1 & \text{for } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \geq 2a. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

(B.1) により定義される $P(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1) = P(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$ を (2.29) 式へ代入すると以下のことがわかる：

$$\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) = \begin{cases} 0 & \text{for } a \leq |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| < 2a, \\ \vec{\mathcal{F}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) & \text{for } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \geq 2a. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

付加力 $\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1)$ の上記の分布は関数 Q_S により以下のように表現できる：

$$Q_S(R) = \begin{cases} 0 & \text{for } 1 \leq R < 2, \\ 1 & \text{for } R \geq 2a, \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

ただし， $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/a$ である。

ここで我々は第3章と同じ座標系と記号法を使っている．基礎方程式は (2.39)-(2.44) であり，境界条件は (3.2) と (3.3) である． Q_S の定義により，運動方程式は領域 $1 \leq R < 2$ で Stokes 型となり $R \geq 2$ で Brinkman 型となる．したがって，それらの方程式の解を次のように提案する：

$$\begin{cases} \langle \mathbf{U}(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = U_0 \left\{ \phi_{\pm} \cos \theta \mathbf{e}_r - \left[\phi_{\pm} + \frac{R}{2} \dot{\phi}_{\pm} \right] \sin \theta \mathbf{e}_{\theta} \right\}, \\ \langle Hp(\mathbf{R}|\mathbf{O}) \rangle = -\mu U_0 \frac{B^2}{a} \chi_{\pm} \cos \theta, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

なお， ϕ_{-} と χ_{-} は領域 $1 \leq R < 2$ に関するもの， ϕ_{+} と χ_{+} は $R \geq 2$ に関するものである．(B.4) を各々運動方程式に代入すると

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_{-} + \frac{4}{R} \dot{\phi}_{-} + B^2 \dot{\chi}_{-} = 0, \\ \ddot{\chi}_{-} + \frac{2}{R} \dot{\chi}_{-} - \frac{2}{R^2} \chi_{-} = 0, \end{cases} \quad \text{for } 1 \leq R < 2, \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_+ + \frac{4}{R}\dot{\phi}_+ + B^2\dot{\chi}_+ - B^2\phi_+ = 0, \\ \ddot{\chi}_+ + \frac{2}{R}\dot{\chi}_+ - \frac{2}{R^2}\chi_+ = 0, \end{cases} \quad \text{for } R \geq 2, \quad (\text{B.6})$$

となる。また、境界条件は

$$R \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \phi_-(1) = \dot{\phi}_-(1) = 0 \quad \text{と} \quad \phi_+ \rightarrow 1. \quad (\text{B.7})$$

(B.5) と (B.6) 式の解は

$$\begin{cases} \phi_- = \frac{1 - 3R^2 + 2R^3}{3R^3}B^2\bar{S} + \frac{10R^3 - 6R^5 - 4}{60R^3}B^2\bar{T}, \\ \chi_- = \bar{T}R + \frac{\bar{S}}{R^2}, \\ \phi_+ = 1 - \frac{2\bar{C}_1}{R^3} + \frac{2\bar{C}_2}{R^3}(1 + BR)e^{-BR}, \\ \chi_+ = R + \frac{\bar{C}_1}{R^2}, \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

である。ただし \bar{T} , \bar{S} , \bar{C}_1 と \bar{C}_2 は未知の定数である。これらの定数は $R = 2$ における流体の平均体積流量の連続性と平均応力テンソルの連続性により決定され

$$\phi_- = \phi_+, \quad \dot{\phi}_- = \dot{\phi}_+, \quad \chi_- = \chi_+ \quad \text{and} \quad \ddot{\phi}_- = \ddot{\phi}_+.$$

上記の解とこれらの条件により

$$B^2\bar{S} = \frac{2\left(72 + 144B + \frac{631}{5}B^2 + \frac{302}{5}B^3\right)}{96 + 96B + \frac{159}{15}B^2 + \frac{34}{15}B^3} \quad (\text{B.9})$$

が得られる。球に働く抵抗力は (3.15) 式で与えられるので、自己無撞着条件より以下の式を得る：

$$6c \frac{72 + 144B + \frac{631}{5}B^2 + \frac{302}{5}B^3}{96 + 96B + \frac{159}{15}B^2 + \frac{34}{15}B^3} = B^2. \quad (\text{B.10})$$

こうして B に関する 5 次の代数方程式を得る。各 c に対する、この方程式の根を数値的に求めた。無次元量 γ を図 3.1 に示した。

付録C 2次元Brinkman方程式 の解

ここでは中間層を無視した場合に、円柱群を通過する2つの流れに対する無次元量 γ の計算を行う。すなわち $Q_C = 1$ かつ $\dot{Q}_C = 0$ とする。

i) 円柱の軸に沿った流れの場合

(4.10)式から、 ψ を支配する基礎方程式は

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{R}\dot{\psi} + B_L^2 - B_L^2\psi = 0, \quad (\text{C.1})$$

で与えられる。境界条件は円柱上で $\psi(1) = 0$ 、また $R \rightarrow \infty$ で $\psi \rightarrow 1$ となる。方程式(C.1)の解は $\psi_0 = 1$ と $\psi_1 = \tilde{C}_0 K_0(B_L R)$ であることがわかる。ここで $K_0(r)$ は変形Bessel関数であり、 \tilde{C}_0 は任意定数である。こうして以下の境界条件を満たす解が得られる：

$$\psi(R) = \psi_0 + \psi_1 = 1 - \frac{K_0(B_L R)}{K_0(B_L)} \quad (\text{C.2})$$

式(4.14)から、円柱に作用する抵抗力が

$$\mathbf{f} = 2\pi\mu B_L \frac{K_1(B_L)}{K_0(B_L)} \mathbf{U}_0, \quad (\text{C.3})$$

であることがわかる。よって自己無撞着条件より

$$B_L = 2c \frac{K_1(B_L)}{K_0(B_L)}, \quad (\text{C.4})$$

である。 K_0 に対する次の式

$$K_0(B_L) = \int_0^\infty \frac{\cos(B_L t)}{\sqrt{t^2 + 1}} dt,$$

と K_1 ([32],p.188),

$$K_1(B_L) = \frac{1}{B_L} \int_0^\infty \frac{\cos(B_L \sinh t)}{\cosh^2 t} dt, \quad (\text{C.5})$$

を使うならば,

$$\gamma = \sqrt{\frac{B_L^2}{1-c}} = \sqrt{\frac{2c}{(1-c)} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos(B_L \sinh t)}{\cosh^2 t} dt}{\int_0^\infty \frac{\cos(B_L t)}{\sqrt{t^2+1}} dt}}, \quad (\text{C.6})$$

を得る.

ii) 円柱の軸に直交する流れ

この場合には (4.24) 式と (4.25) 式から

$$\ddot{\Psi} + \frac{3}{R}\dot{\Psi} + B_T^2\dot{\Omega} - B_T^2\Psi = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\ddot{\Omega} + \frac{1}{R}\dot{\Omega} - \frac{1}{R^2}\Omega = 0, \quad (\text{C.8})$$

が得られる. 境界条件は円柱上で $\Psi(1) = \dot{\Psi}(1) = 0$ であり, $R \rightarrow \infty$ で $\Psi \rightarrow 1$ へと漸近する. 方程式 (C.8) の解は $\Omega = \tilde{C}_1 R + \tilde{C}_2/R$ である. ただし \tilde{C}_1 と \tilde{C}_2 は未知の定数である. $\dot{\Omega}$ を (C.7) 式に代入すると次の Ψ_0 を得る: $\Psi_0 = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2/R^2$. 今, $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$ とすると, Ψ_1 は

$$\ddot{\Psi}_1 + \frac{3}{R}\dot{\Psi}_1 - B_T^2\Psi_1 = 0, \quad (\text{C.9})$$

を満たす必要がある. さらに, $\Psi_1 = y(R)/R$ とすると (C.9) 式は以下のようなになる:

$$\ddot{y} + \frac{1}{R}\dot{y} - \left(B_T^2 + \frac{1}{R^2}\right)y = 0. \quad (\text{C.10})$$

方程式 (C.10) の解も変形 Bessel 関数で与えられる: $y = \tilde{C}_3 K_1(B_T R)$, ただし \tilde{C}_3 は未知定数. こうして, 境界条件を満たす (C.7) 式の解を得る¹

$$\Psi = \tilde{C}_1 - \frac{\tilde{C}_2}{R^2} + \frac{\tilde{C}_3}{R} K_1(B_T R) \quad (\text{C.11})$$

where

$$\tilde{C}_1 = 1, \quad \tilde{C}_2 = 1 + \frac{2K_1(B_T)}{B_T K_0(B_T)}, \quad \text{and} \quad \tilde{C}_3 = \frac{2}{B_T K_0(B_T)}.$$

Calculation in detail

$$\Psi(1) = 1 - \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3 K_1(B_T) = 0$$

¹我々は変形 Bessel 関数に対する次の公式を使った: (i) $zK'_\nu(z) + \nu K_\nu(z) = -zK_{\nu-1}(z)$, (ii) $K'_0(z) = -K_1(z)$.

$$\dot{\Psi}(1) = 2\tilde{C}_2 - \left\{ K_1(B_T) + \frac{B_T}{2}(K_0(B_T) + K_1(B_T)) \right\} \tilde{C}_3 = 0$$

試験円柱に作用する抵抗は次のように表される：

$$\mathbf{f} = 4\pi\mu\mathbf{U}_0 \left(B_T \frac{K_1}{K_0} + \frac{1}{2} B_T^2 \right).$$

よって、自己無撞着条件より

$$B_T = \frac{4cK_1}{(1-2c)K_0} \quad (\text{C.12})$$

を得る．式 (C.5) を使うなら，

$$\gamma = \sqrt{\frac{4c}{(1-c)(1-2c)} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos(B_T \sinh t)}{\cosh^2 t} dt}{\int_0^\infty \frac{\cos(B_T t)}{\sqrt{t^2+1}} dt}}, \quad (\text{C.13})$$

を得る．式 (C.13) から， $c = 1/2$ で B_T が発散することがわかる．(球の場合，中間層を無視すると， $c = 2/3$ で B は発散する．) 式 (C.6) と (C.13) から γ の値が数値的に計算され，それを図 4.2 に示した．しかしながら，公式 (C.6) と (C.13) の数値積分は難しく，したがって我々は以下の変形 Bessel 関数に対する漸近展開を使った² [33]:

$$K_\nu(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \frac{(\nu^2 - 1)(\nu^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\nu^2 - 1)(\nu^2 - 9)(\nu^2 - 25)}{3!(8z)^3} + \dots \right\} \quad (\text{C.14})$$

こうして $K_0(z)$ に対し，3 次のオーダーまで考慮すると

$$K_0(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 - \frac{1}{8z} + \frac{9}{2!(8z)^2} + \dots \right\}, \quad (\text{C.15})$$

また $K_1(z)$ に対する展開は以下のようなになる：

$$K_1(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{3}{8z} \right). \quad (\text{C.16})$$

図 C.1 は変形 Bessel 関数 (C.15)，(C.16) の積分形 (C.5) との比較を示すものである．

²この漸近展開は <http://dspace.wul.waseda.ac.jp/dspace/bitstream/2065/28483/3/Honbun-4327.pdf> から得ることができる．

また [http://takeno.iee.niit.ac.jp/shige/math/lecture/misc/data/asympt1.pdf#search=新潟工科大学 竹野 Bessel 関数も見よ。](http://takeno.iee.niit.ac.jp/shige/math/lecture/misc/data/asympt1.pdf#search=新潟工科大学%20竹野%20Bessel%20関数%20も%20見よ%20。)

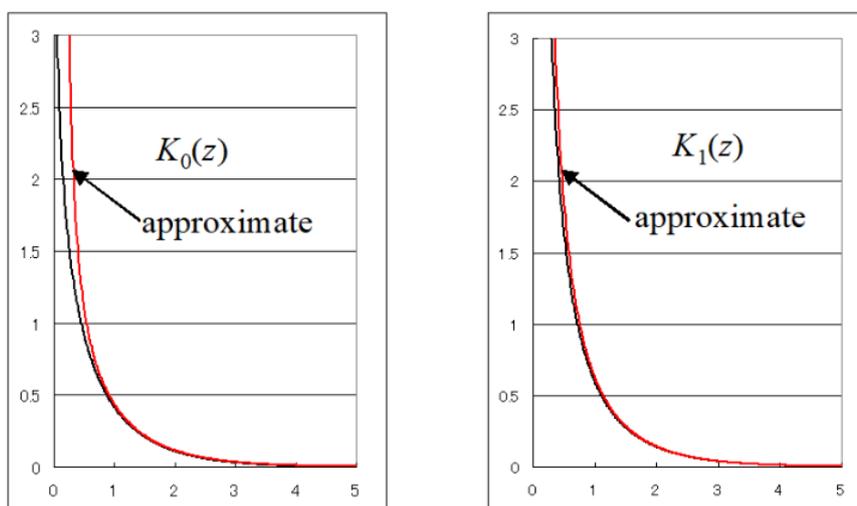


図 C.1: 変形 Bessel 関数の漸近展開 (近似) と積分形によるものとの比較.

付録D Galerkin法の精度確認

ここでは Galerkin の方法を使い Brinkman 方程式 (3.7) を近似的に解き、その近似解から算出した無次元量 B と厳密解から得られた B を比較する。

(i) 試行関数 ϕ_t を次のように仮定する

$$\phi_t = 1 - \frac{5}{2R^3} + \frac{3}{2R^5} + \hat{a}_1(R-1)^2 e^{-2(R-1)} + \hat{a}_2(R-1)^2 e^{-6(R-1)}. \quad (\text{D.1})$$

試行関数 ϕ_t は境界条件 (3.9) と (3.10) とを満たしている。未知の係数 \hat{a}_j は以下の式により決定される

$$\int_1^{R_F} \left(\ddot{\phi} + \frac{4}{R} \dot{\phi} + B^2 \dot{\chi} - B^2 \phi \right) \omega_j dR = 0, \quad (\text{D.2})$$

ここで $\dot{\chi} = 1 - 2/(3cR^3)$ である。よって、第3章と同様、

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \frac{1}{\hat{\Lambda}} \left[\left(1.331 - \frac{0.3642}{c} \right) B^4 + \left(15.09 - \frac{4.618}{c} \right) B^2 + 5.134 \right], \\ \hat{a}_2 = \frac{1}{\hat{\Lambda}} \left[\left(39.49 - \frac{16.31}{c} \right) B^4 + \left(197.4 - \frac{24.97}{c} \right) B^2 + 118.8 \right], \\ \hat{\Lambda} = B^4 + 10.59B^2 + 8.788, \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

として得られる。試験球に働く力が

$$\mathbf{f} = \frac{4}{3} \pi \mu \mathbf{U}_0 \left[\left(1 + \frac{1}{3c} \right) B^2 + 15 + 2(\hat{a}_1 + \hat{a}_2) \right],$$

で与えられるので、自己無撞着の条件式を得る。次に、(D.3) を \hat{a}_j に代入すると B に関する6次方程式を得る：

$$B^6 + \frac{107.2c - 40.41}{c - 2/3} B^4 + \frac{592.5c - 65.00}{c - 2/3} B^2 + \frac{379.7c}{c - 2/3} = 0. \quad (\text{D.4})$$

式(D.4) から得られた B_A と厳密な B_E との比較を図D.1に示した。また各 c に対する $\sqrt{\hat{K}_1^2 / \hat{W}_1^2}$ の値についても図D.2に示した。ここで

$$\hat{K}_1^2 = \int_1^{R_F} \left[\ddot{\phi}_t + \frac{4}{R} \dot{\phi}_t + B^2 \dot{\chi} - B^2 \phi_t \right]^2 dR,$$

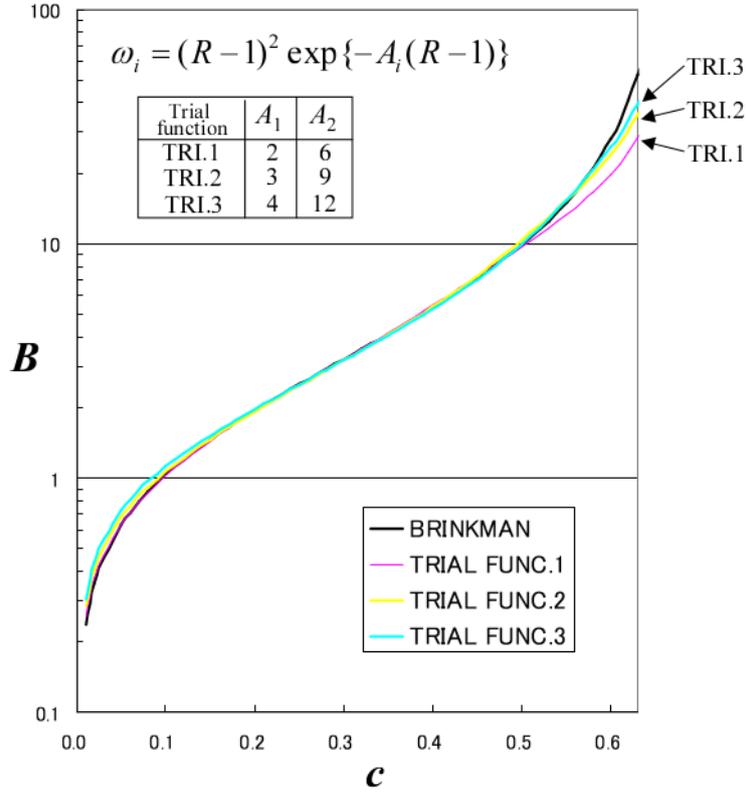


図 D.1: 近似解から算出された B_A と厳密な B_E との比較.

$$\hat{W}_1^2 = \int_1^{R_F} \left[\ddot{\phi}_t^2 + \frac{16}{R^2} \dot{\phi}^2 + B^4 \dot{\chi}^2 + B^4 \phi_t^2 \right] dR,$$

である.

図 D.2 から, すべての試行関数について $c = 0.3$ 付近で $\sqrt{\hat{K}_1^2 / \hat{W}_1^2}$ の値がほぼゼロになることがわかる. このことは $c = 0.3$ 付近で B を表す曲線が Brinkman の曲線と交差することを意味している. つまり, この交点では試行関数から得られる B と厳密解から得られるものと同じになっていることを意味している.

(ii) 試行関数を ϕ_t 以下のように仮定した場合 :

$$\phi_t = 1 - \frac{5}{2R^3} + \frac{3}{2R^5} + \sum_{i=1}^2 \hat{a}_i R^2 (R-1)^2 e^{-A_i(R-1)}. \quad (D.5)$$

試行関数で ω_i に R^2 をかけた形は球の周りに中間層を導入した場合に透過率を計算する試行関数 (3.25) である. 図 D.3 と図 D.4 から, いくつか

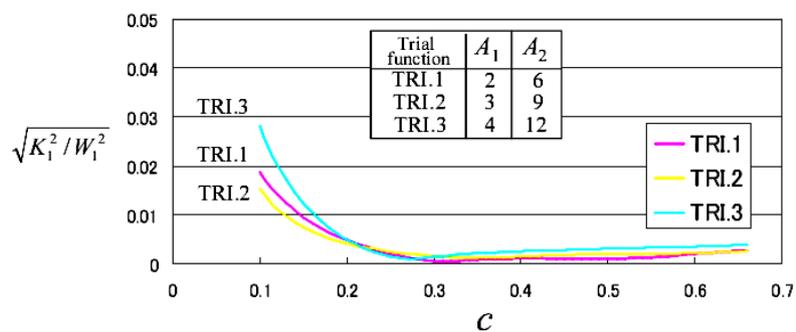


図 D.2: 各 c の値に対する $\sqrt{\hat{K}_1^2 / \hat{W}_1^2}$ の値.

の試行関数 (D.5) による精度計算の結果から判断するに, (D.5) 式のタイプの ω_i でも十分に精度の良い結果を与えることが分かる.

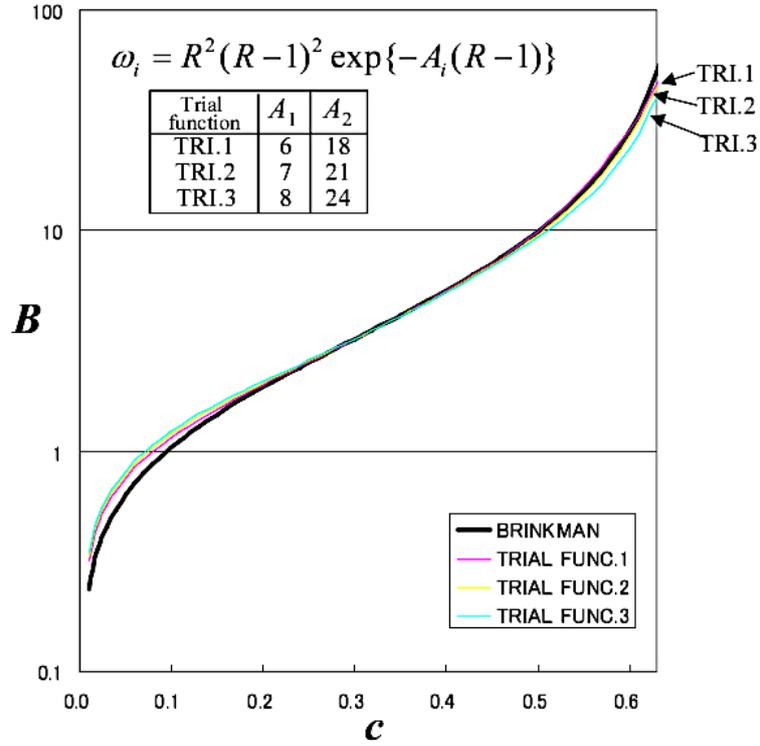


図 D.3: 試行関数 (D.5) の場合の B_A と厳密な B_E との比較.

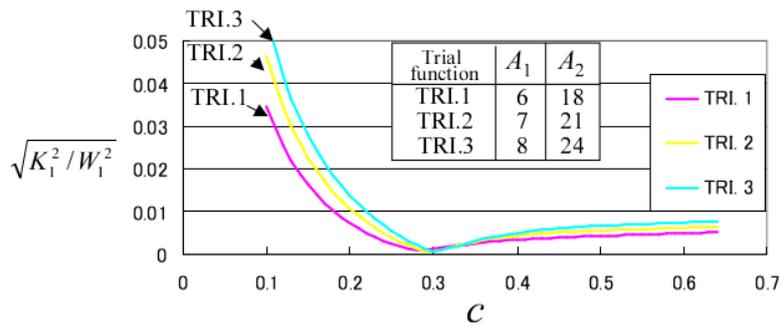


図 D.4: 各 c に対する $\sqrt{\hat{K}_1^2 / \hat{W}_1^2}$ の値.

付 録 E 試験球周りの速度パターン

多孔性媒質透過率の予測問題においては試験球まわりの速度プロフィールを求めることはそれほど重要ではないかもしれない。とは言え、中間層を考慮した場合の試験球周り速度がどのようなになっているかということには興味が引かれるものである。すなわちこれは連立常微分方程式 (3.21) と (3.22) を解くことを意味しているのだが、ここでは4次精度の Runge-Kutta 法による数値シミュレーションを行った。

E.1 常微分方程式におけるスティッフネス問題の回避

ここでは連立常微分方程式 (3.21) と (3.22) を解くために4次精度の Runge-Kutta 法を採用したが、おそらく常微分方程式 (ODE) のスティッフネス問題に起因すると思われる困難に遭遇するだろう。通常この問題をクリアするためには異常が起きている近辺で差分の刻み幅をできる限り小さくするという対策を施す。しかしながら、ここではおおよそその速度プロフィール形状を見たいという要望に過ぎないので、上述のスティッフネス問題を直接扱うという面倒なことはしない。その代わりに、物体 (球) 近傍において微分方程式内で発散している項を見つけ出し、その項を表す曲線を表示させ、その上で発散する箇所を強制的に切り取り、その前後の曲線に滑らかにつながるようにする。

その準備として厳密解が分かっている Brinkman 方程式を使って強制的に収束させるという方法を試した。無限遠で $\Phi \rightarrow 1$ となることから、 $\Phi = 1 + \phi$ と $\Pi = R + \pi$ とした。よって、無限遠で $\phi \rightarrow 0$ となる。これらを (3.21) 式と (3.22) 式へ代入すると

$$\ddot{\phi} + \frac{4}{R}\dot{\phi} + B^2(1 + \pi) - B^2Q_S(1 + \phi) = 0, \quad (\text{E.1})$$

$$\ddot{\pi} + \frac{2}{R}\dot{\pi} - \frac{2}{R^2}\pi - \dot{Q}_S(1 + \phi) = 0, \quad (\text{E.2})$$

となる．Runge-Kutta 法を実行するための，中間層 $Q_S(R)$ を導入した常微分方程式である Brinkman 方程式は以下で記述される：

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \psi, \\ \dot{\psi} = -\frac{4}{R}\psi - B^2\chi + B^2Q_S(1 + \phi) - B^2, \\ \dot{\pi} = \chi, \\ \dot{\chi} = -\frac{2}{R}\chi + \frac{2}{R^2}\pi - \dot{Q}_S(1 + \phi). \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

(動径に関する) 初期条件は以下の通りである [参考, (3.23) と (3.27)]:

$$\phi(1) = -1, \quad \psi(1) = 0, \quad \pi(1) = \Xi - 1 + \frac{1}{3c}, \quad \chi(1) = \Xi - 1 - \frac{2}{3c}, \quad (\text{E.4})$$

発散を回避するための手順を簡単に示す：

- i) 方程式内で発散する項を確認する $\dot{\psi}$.
- ii) 図 E.1 から体積濃度 $c=0.4$ の場合， $\dot{\psi}$ が $R = 1.8$ 付近で急増すること

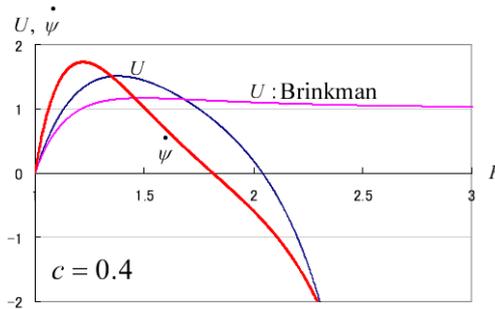


図 E.1: このケースでの $\dot{\psi}$, $\theta = 90 \text{ deg.}$ における速度 U , 同様に Brinkman 方程式の $\theta = 90 \text{ deg.}$ における速度 U_B それぞれの挙動.

が分かる． $\dot{\psi}$ 内の各項を図 E.2 に示した．

- iii) R が増大した場合 ϕ がゼロに近づくとつれ ψ はある値に近づかなければならない．すなわ， $\dot{\psi}$ はある数値に収束しなければならない (簡単のためここではその数値をゼロとした)．そこで $\dot{\psi}$ がゼロになるように指数関数を使って強制的に修正する．なおこの指数関数は Excel ツールを使った．その結果を図 E.3 と図.E.4 に示した．

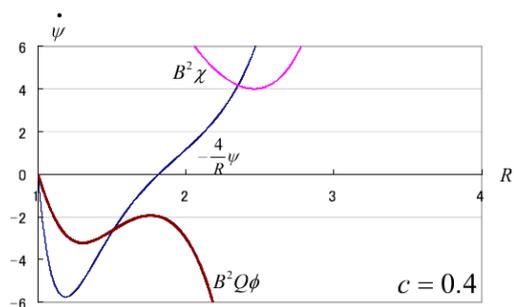


図 E.2: $\dot{\psi}$ 内の各項の挙動ですべてが発散する.

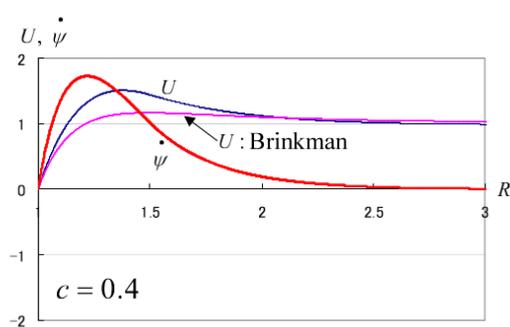


図 E.3: 修正後の $\dot{\psi}$, $\theta = 90 \text{ deg.}$ における速度 U , 同様に Brinkman 方程式の $\theta = 90 \text{ deg.}$ における速度 U_B それぞれの挙動.

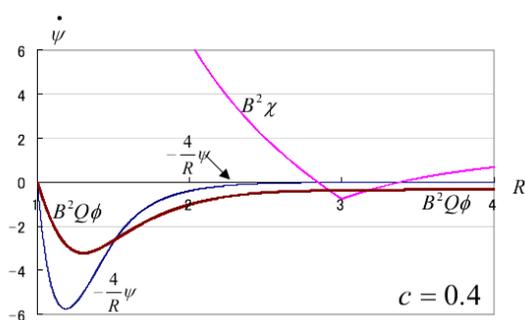


図 E.4: 修正後の $\dot{\psi}$ 内の各項の挙動.

E.2 体積濃度に対する速度プロフィール

上で述べた手順に従い、各体積濃度 c に対する修正 Brinkman 方程式の数値解を求める。図 E.5 に示したように、 $\theta = 90$ 度における速度プロフィール U を Brinkman の場合の U と比較するように示した。

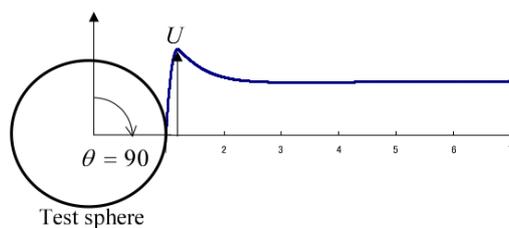


図 E.5: 試験球周りの速度プロフィール解説図.

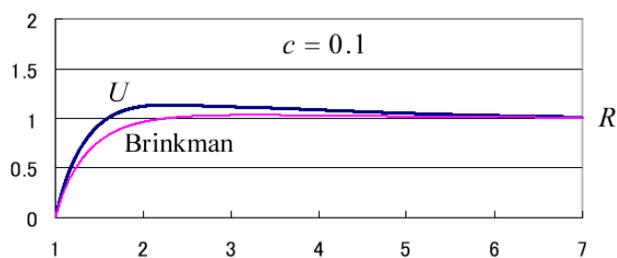


図 E.6: 試験球周りの速度プロフィール $c = 0.1$.

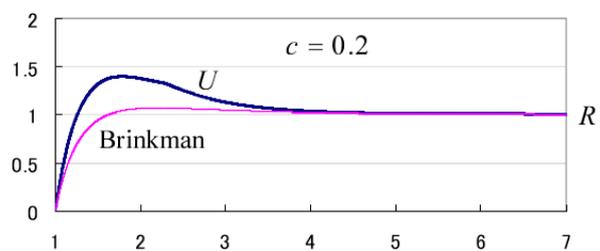


図 E.7: 試験球周りの速度プロファイル $c = 0.2$.

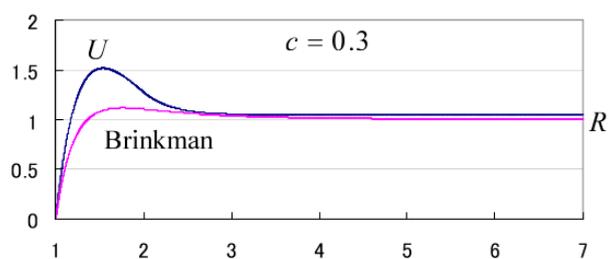


図 E.8: 試験球周りの速度プロファイル $c = 0.3$.

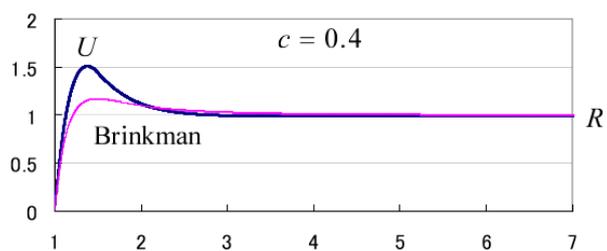


図 E.9: 試験球周りの速度プロファイル $c = 0.4$.

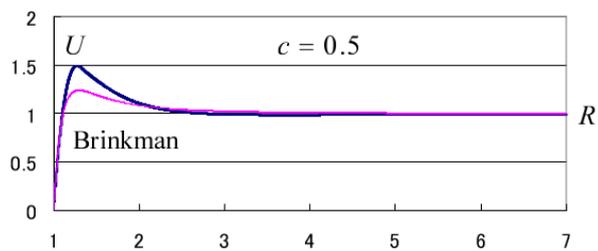


図 E.10: 試験球周りの速度プロファイル $c = 0.5$.

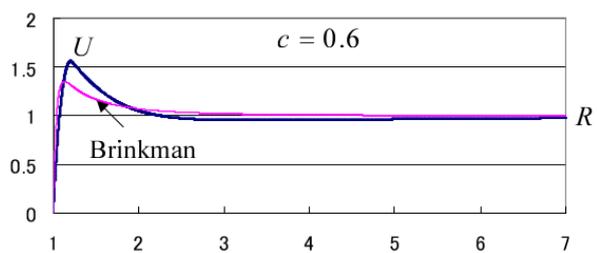


図 E.11: 試験球周りの速度プロファイル $c = 0.6$.

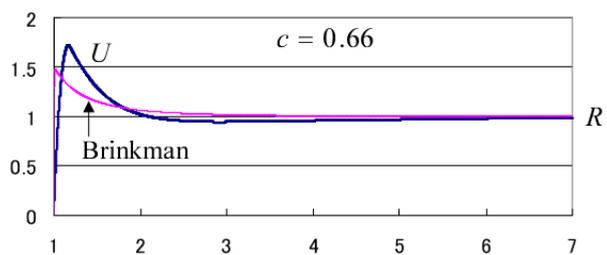


図 E.12: 試験球周りの速度プロファイル $c = 0.66$.

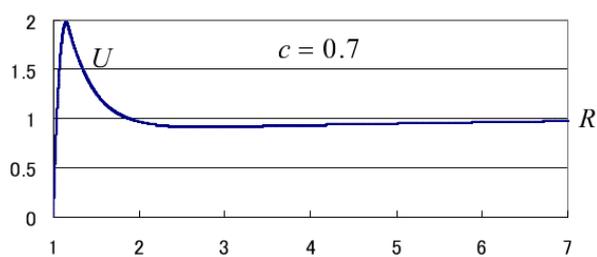


図 E.13: 試験球周りの速度プロフィール $c = 0.7$.

関連図書

- [1] G. K. Batchelor : Ann. Rev. Fluid Mech. **6** (1974) 227-255
- [2] A. E. Scheidegger and K. H. Liao : in “ *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*” IAHR (Elsevier Publishing Company, Amsterdam)
- [3] J. Happel and H. Brenner : “*Low Reynolds Number Hydrodynamics*” (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. , 1965)
- [4] A. E. Scheidegger : “*The Physics of Flow Through Porous Media*” (MacMillan Co., New York, 1960)
- [5] C. K. W. Tam : J. Fluid Mech. **38** (1969) 537-546.
- [6] S. Prager : Phys. Fluid **4** (1961) 1477-1482.
- [7] S. Prager : Physica **29** (1963) 129-139.
- [8] G. K. Batchelor : J. Fluid Mech. **46** (1971) 813-829.
- [9] G. K. Batchelor : J. Fluid Mech. **52** (1972) 245-268.
- [10] Z. Hashin : Appl. Mech. Rev. **17** (1964) 1-9.
- [11] R. Heczyński and I. Pieńkowska : Ann. Rev. Fluid Mech. **12** (1980) 237-269.
- [12] T. S. Lundgren : J. Fluid Mech. **51** (1972) 273-299.
- [13] S. Childress : J. Chem. Phys. **56** (1972) 2527-2539.
- [14] I. D. Howells : J. Fluid Mech. **64** (1974) 449-475.
- [15] Iu. A. Buevich and V. G. Marcov : J. Appl. Math. Mech. **36** (1972) 452-464.
- [16] Iu. A. Buevich and V. G. Marcov : J. Appl. Math. Mech. **37** (1973) 1005-1021.

- [17] E. J. Hinch : J. Fluid Mech. **83** (1977) 695-720.
- [18] P. G. Saffman : Stud. Appl. Math. **52** (1973) 115-127.
- [19] P. G. Saffman : Stud. Appl. Math. **50** (1971) 93-101.
- [20] G. J. Kynch : Proc. Roy. Soc., London (A) **237** (1956) 90-116.
- [21] G. H. Neal and W. K. Nader : AIChE J. **20** (1973) No.3 530-538.
- [22] 大島信徳 : 機械学会論文集 (1977) 97-102.
- [23] J. M. De Wiest *et al.* : “*Flow through Porous Media*” (Academic Press, New York, 1969) Chap.3
- [24] B. U. Felderhof: Physica **80A** (1975) 63-75.
- [25] B. U. Felderhof: Physica **80A** (1975) 172-188.
- [26] B. U. Felderhof & J. M. Deutch : J. Chem. Phys. **62** (1975) 2391-2397.
- [27] J. M. Deutch & B. U. Felderhof: J. Chem. Phys. **62** (1975) 2398-2405.
- [28] Shigenobu Itoh : J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 2379-2388.
- [29] Shigenobu Itoh : J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 1718-1727.
- [30] 加藤敏夫 : 自然科学者のための数学概論-応用編- C:変分法 (岩波書店, 東京, 1960)
- [31] 林毅, 村外志夫 共著 : 変分法 (コロナ社, 東京 1958).
- [32] 森口繁一, 宇田川?久, 一松信 共著: 数学公式 III (岩波全集 244) (岩波書店, 東京,1960)
- [33] Abramowitz, M. and Stegun, I.A., 2002, Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Electronic book edition,” ConvertIt.com, Inc.