球座標系での修正Brinkman方程式

伊藤榮信

2011年6月13日

目 次

多孔性媒質に対する Brinkman 方程式とは多孔性媒質内の巨視的な流れ (もしくは平均流) を表す Darcy 方程式

$$-\nabla p = \frac{\mu}{k}\mathbf{u} \tag{1}$$

と，多孔性媒質内の流れを微視的に見た場合の Stokes 方程式

$$-\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u} = 0 \tag{2}$$

とを加え合わせた方程式で

$$-\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u} = \frac{\mu}{k}\mathbf{u} \tag{3}$$

と表される．(1) と (2) 式を各々外部展開 (Darcy) と内部展開 (Stokes) と考えるならば特異摂動理論としての解釈も可能であろう．

このBrinkman方程式の統計平均による導出はTam(1969)やLundgren(1972)によって行われた．Brinkman 方程式 (3) の右辺 $(\mu/k)\mathbf{u}$ は多孔性媒質を表現する一様に分布する抵抗源 (Stokeslet) と解釈できるが，この抵抗源が一様に分布した媒質内の流れに設置された球 (これを試験球と呼ぶ) が受ける力が求められている．この試験球の周りでの抵抗源の分布は試験球の存在のため，

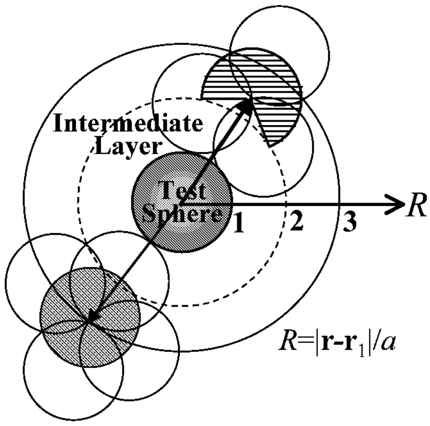

図 1: 試験球周りの中間層

球からずっと離れた場所とは状況が異なっている．すなわち，試験球の半径を a とすると試験球中心から $a \le r \le 3a$ の領域では上記の抵抗源の分布が変化する．この領域を Buevich と Marcov(1972) は中間層 (intermediate layer) と呼び，S.Itoh(1983) はこれを考慮して透過率を決定している．このように抵抗分布が場所によって変化すると考えた場合の Brinkman 方程式をここでは修正 Brinkman 方程式と呼ぶことにし

$$-\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u} = \mu\alpha^2 Q\mathbf{u} \tag{4}$$

で表す．ここで $\alpha^2 = 1/k$ であり，$Q = Q(\mathbf{r})$ である．

1 球座標系での修正 Brinkman 方程式

修正 Brinkman 方程式に従う流れで球周り流れの方程式の具体形を導出する.

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \mu \alpha^2 Q \mathbf{u} \tag{5}$$

上記ベクトル形を球座標成分表示すると,

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta u_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right\} - \mu \alpha^2 Q u_r = 0, \tag{6}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right\} - \mu \alpha^2 Q u_\theta = 0, \tag{7}$$

$$-\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left\{ \nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right\} - \mu \alpha^2 Q u_\varphi = 0 \tag{8}$$

となる．ここで ∇^2 は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \tag{9}$$

更に発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{10}$$

で表される.

さて，球座標系で一様な速度場 $\mathbf{U}_0$ =const. は

$$\mathbf{U}_0 = U_0 \cos\theta \mathbf{e}_\mathrm{r} - U_0 \sin\theta \mathbf{e}_\theta \tag{11}$$

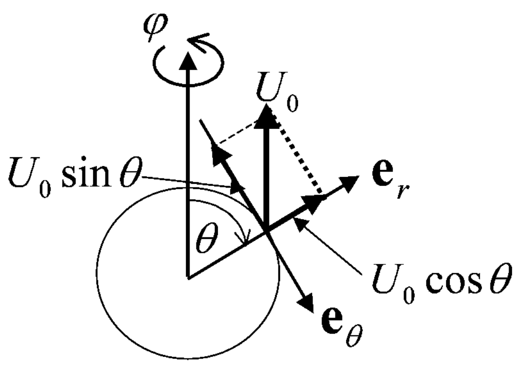

図 2: 一定の速度の表し方 (球座標系)

$$\mathbf{u} = U_0 \Phi(r) \cos\theta \mathbf{e}_\mathrm{r} - U_0 \Theta(r) \sin\theta \mathbf{e}_\theta \tag{12}$$

非圧縮性の条件 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ より

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{U_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Phi\cos\theta) - \frac{U_0}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Theta\sin^2\theta)$$

$$= \frac{U_0}{r^2}\left(2r\Phi\cos\theta + r^2\dot{\Phi}\cos\theta\right) - \frac{U_0}{r\sin\theta}(2\Theta\sin\theta\cos\theta)$$

$$= 2\frac{U_0}{r}\left(\Phi + \frac{r}{2}\dot{\Phi} - \Theta\right)\cos\theta = 0$$

が恒等的に成立するためには

$$\Theta = \Phi + \frac{r}{2}\dot{\Phi} \tag{13}$$

であればよい．

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu U_0\left\{\nabla^2(\Phi\cos\theta) - \frac{2\Phi\cos\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin^2\theta\Theta)\right\} - \mu\alpha^2 Q U_0\Phi\cos\theta = 0,$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu U_0\left\{\nabla^2(\Phi\cos\theta) - \frac{2\Phi\cos\theta}{r^2} + \frac{4}{r^2}(\cos\theta\Theta)\right\} - \mu\alpha^2 Q U_0\Phi\cos\theta = 0,$$

であり，∇^2 の計算が残る：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi\cos\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi\cos\theta}{\partial\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{r}\dot{\Phi} + \ddot{\Phi}\right)\cos\theta - \frac{2}{r^2}\Phi\cos\theta$$

これを運動方程式内 ∇^2 に戻すと

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu U_0\left\{\left(\frac{2}{r}\dot{\Phi} + \ddot{\Phi}\right)\cos\theta - \frac{4\Phi\cos\theta}{r^2} + \frac{4\cos\theta}{r^2}\left(\Phi + \frac{r}{2}\dot{\Phi}\right)\right\} - \mu\alpha^2 Q U_0\Phi\cos\theta = 0,$$

すなわち，

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu U_0\left(\ddot{\Phi} + \frac{4}{r}\dot{\Phi}\right)\cos\theta - \mu\alpha^2 Q U_0\Phi\cos\theta = 0, \tag{14}$$

が得られる．次に，$u_\theta = -U_0\Theta\sin\theta = -U_0(\Phi + r\dot{\Phi}/2)\sin\theta$ を運動方程式に代入すると

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \mu\left\{\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right\} - \mu\alpha^2 Q u_\theta = 0,$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \mu U_0\left\{-\nabla^2(\Theta\sin\theta) + \frac{\Theta}{r^2\sin\theta} - \frac{2}{r^2}\Phi\sin\theta)\right\} + \mu U_0\alpha^2 Q\Theta\sin\theta = 0,$$

となるから，∇^2 の部分の計算が必要となる：

$$\nabla^2(-\Theta\sin\theta) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial(\Theta\sin\theta)}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(\Theta\sin\theta)}{\partial\theta}\right)$$

$$= -\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2(\dot{\Phi}+\dot{\Phi}/2+r\ddot{\Phi}/2)\right) - \frac{\Theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\theta)$$

$$= -\frac{\sin\theta}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2(3\dot{\Phi}+r\ddot{\Phi})\right) - \frac{\Theta}{r^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}-\sin\theta\right)$$

$$= -\frac{\sin\theta}{2r^2}\left(2r(3\dot{\Phi}+r\ddot{\Phi})+r^2(4\ddot{\Phi}+r\Phi^{(3)})\right) - \frac{\Theta}{r^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}-\sin\theta\right)$$

$$= -\frac{\sin\theta}{2r}\left(6\dot{\Phi}+6r\ddot{\Phi}+r^2\Phi^{(3)}\right) - \frac{\Theta}{r^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}-\sin\theta\right)$$

よってこれを元の式の ∇^2 部分に戻すと

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu U_0\left\{-\frac{\sin\theta}{2r}\left(6\dot{\Phi}+6r\ddot{\Phi}+r^2\Phi^{(3)}\right)-\frac{\Theta}{r^2}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}-\sin\theta\right)+\frac{\Theta}{r^2\sin\theta}-\frac{2}{r^2}\Phi\sin\theta\right\}$$
$$+\mu U_0\alpha^2 Q\Theta\sin\theta = 0,$$

$\sin\theta$ 部分の計算をすると

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu U_0\left\{-\frac{\sin\theta}{2r}\left(6\dot{\Phi}+6r\ddot{\Phi}+r^2\Phi^{(3)}\right)+\frac{\Theta}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)+\frac{\Theta}{r^2}\sin\theta-\frac{2}{r^2}\Phi\sin\theta\right\}$$
$$+\mu U_0\alpha^2 Q\Theta\sin\theta = 0,$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu U_0\left\{-\frac{1}{2r}\left(6\dot{\Phi}+6r\ddot{\Phi}+r^2\Phi^{(3)}\right)\sin\theta+\frac{2\Theta}{r^2}\sin\theta-\frac{2}{r^2}\Phi\sin\theta\right\}$$
$$+\mu U_0\alpha^2 Q\Theta\sin\theta = 0,$$

上の式に $\Theta = \Phi + r\dot{\Phi}/2$ を入れると

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\mu U_0\left\{-\frac{1}{2r}\left(6\dot{\Phi}+6r\ddot{\Phi}+r^2\Phi^{(3)}\right)\sin\theta+\frac{\dot{\Phi}}{r}\sin\theta\right\}+\mu U_0\alpha^2 Q\Theta\sin\theta = 0,$$

更に，括弧内を計算することで，(14) に加えてもう一つの方程式

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}-\mu U_0\left(\frac{r}{2}\Phi^{(3)}+3\ddot{\Phi}+\frac{2}{r}\dot{\Phi}\right)\sin\theta+\mu U_0\alpha^2 Q\Theta\sin\theta = 0 \qquad (15)$$

が得られる．(14) 式と (15) 式から，圧力 p が

$$p \propto \Pi(r)\cos\theta$$

の形をしているならば変数分離が可能であることが察せられる．

(14) 式と (15) 式の無次元化を図るため，球の半径 a により $r = Ra$ として無次元 R を導入する．こうすることで 2 つの方程式が

$$-a\frac{\partial p}{\partial R}+\mu U_0\left(\ddot{\Phi}+\frac{4}{R}\dot{\Phi}\right)\cos\theta-\mu B^2 QU_0\Phi\cos\theta = 0,$$

$$-\frac{a}{R}\frac{\partial p}{\partial\theta}-\mu U_0\left(\frac{R}{2}\Phi^{(3)}+3\ddot{\Phi}+\frac{2}{R}\dot{\Phi}\right)\sin\theta+\mu U_0 B^2 Q\Theta\sin\theta = 0$$

となることは容易に分かる．なお $\alpha a = B$ である．以上で，すべての準備が整ったので圧力の形を

$$p = -\frac{\mu U_0 B^2}{a}\Pi(R)\cos\theta \tag{16}$$

と仮定する．これにより各々の方程式は

$$\ddot{\Phi} + \frac{4}{R}\dot{\Phi} + B^2\dot{\Pi} - B^2 Q\Phi = 0 \tag{17}$$

$$\frac{B^2}{R}\Pi + \frac{R}{2}\Phi^{(3)} + 3\ddot{\Phi} + \frac{2}{R}\dot{\Phi} - B^2 Q\left(\Phi + \frac{R}{2}\dot{\Phi}\right) = 0 \tag{18}$$

となる．しかしながら，上の式 (18) は微分階数が 3 と好ましくないし，また $\Pi(R)$ に関する振る舞いが見えにくい．そこで，(17) 式を微分することで 3 階導関数を作りそれを (18) 式に代入する．つまり

$$\Phi^{(3)} = \frac{4}{R^2}\dot{\Phi} - \frac{4}{R}\ddot{\Phi} - B^2\ddot{\Pi} + B^2\dot{Q}\Phi + B^2 Q\dot{\Phi}$$

であるから，これを (18) へ代入すると

$$\frac{B^2}{R}\Pi + \frac{R}{2}\left\{\frac{4}{R^2}\dot{\Phi} - \frac{4}{R}\ddot{\Phi} - B^2\ddot{\Pi} + B^2\dot{Q}\Phi + B^2 Q\dot{\Phi}\right\} + 3\ddot{\Phi} + \frac{2}{R}\dot{\Phi} - B^2 Q\left(\Phi + \frac{R}{2}\dot{\Phi}\right) = 0$$

となる．これを整理すると

$$\underbrace{\left(\ddot{\Phi} + \frac{4}{R}\dot{\Phi} + B^2\dot{\Pi} - B^2 Q\Phi\right)}_{0} - B^2\dot{\Pi} - \frac{R}{2}B^2\ddot{\Pi} + \frac{B^2}{R}\Pi + \frac{R}{2}B^2\dot{Q}\Phi = 0$$

となるので，

$$\ddot{\Pi} + \frac{2}{R}\dot{\Pi} - \frac{2}{R^2}\Pi - \dot{Q}\Phi = 0 \tag{19}$$

が得られる．(17) 式と (19) 式が球の場合の基礎方程式となる．

2　球周り流れに対する応力テンソル

球周りの速度の仮定は

$$\mathbf{u} = U_0(\Phi(r)\cos\theta\mathbf{e}_{\mathrm{r}} - \Theta(r)\sin\theta\mathbf{e}_\theta)$$

であり，

$$\Theta = \Phi + \frac{r}{2}\dot{\Phi}$$

であった．また，

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

であるから，

$$\nabla\mathbf{u} = U_0\left(\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left\{\Phi\cos\theta\mathbf{e}_r-(\Phi+\frac{r}{2}\dot{\Phi})\sin\theta\mathbf{e}_\theta\right\}$$

$$= U_0\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\left\{\Phi\cos\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}-\left(\Phi+\frac{r}{2}\dot{\Phi}\right)\sin\theta\mathbf{e}_\theta\right\}+U_0\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\Phi\cos\theta\mathbf{e}_r-\left(\Phi+\frac{r}{2}\dot{\Phi}\right)\sin\theta\mathbf{e}_\theta\right\}$$

$$= U_0\mathbf{e}_r\left\{\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}+\Phi\cos\theta\frac{\partial\mathbf{e}_\mathrm{r}}{\partial r}-\left(\frac{3}{2}\dot{\Phi}+\frac{r}{2}\ddot{\Phi}\right)\sin\theta\mathbf{e}_\theta-\left(\Phi+\frac{r}{2}\dot{\Phi}\right)\sin\theta\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial r}\right\}$$

$$+U_0\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\left\{-\Phi\sin\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}+\Phi\cos\theta\frac{\partial\mathbf{e}_\mathrm{r}}{\partial\theta}-\left(\Phi+\frac{r}{2}\dot{\Phi}\right)\cos\theta\mathbf{e}_\theta-\left(\Phi+\frac{r}{2}\dot{\Phi}\right)\sin\theta\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta}\right\}$$

ここで基底ベクトルに対する関係式

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\mathrm{r}}{\partial r}=0,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial r}=0,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\mathrm{r}}{\partial\theta}=\mathbf{e}_\theta,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta}=-\mathbf{e}_\mathrm{r}$$

に注意すると

$$= U_0\mathbf{e}_r\left\{\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}-\left(\frac{3}{2}\dot{\Phi}+\frac{r}{2}\ddot{\Phi}\right)\sin\theta\mathbf{e}_\theta\right\}$$

$$+U_0\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\left\{-\Phi\sin\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}+\Phi\cos\theta\mathbf{e}_\theta-\left(\Phi+\frac{r}{2}\dot{\Phi}\right)\cos\theta\mathbf{e}_\theta+\left(\Phi+\frac{r}{2}\dot{\Phi}\right)\sin\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\right\}$$

$$= U_0\mathbf{e}_r\left\{\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}-\left(\frac{3}{2}\dot{\Phi}+\frac{r}{2}\ddot{\Phi}\right)\sin\theta\mathbf{e}_\theta\right\}+U_0\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\left\{-\frac{r}{2}\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta+\frac{r}{2}\dot{\Phi}\sin\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\right\}$$

よって，最後の項の中を計算すると

$$\nabla\mathbf{u} = U_0\left\{\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\mathbf{e}_r-\left(\frac{3}{2}\dot{\Phi}+\frac{r}{2}\ddot{\Phi}\right)\sin\theta\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta-\frac{1}{2}\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{2}\dot{\Phi}\sin\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\right\}$$

これの転置は

$$(\nabla\mathbf{u})^\mathrm{T} = U_0\left\{\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\mathbf{e}_r-\left(\frac{3}{2}\dot{\Phi}+\frac{r}{2}\ddot{\Phi}\right)\sin\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_r-\frac{1}{2}\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{2}\dot{\Phi}\sin\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\mathbf{e}_\theta\right\}$$

以上を無次元形で表すと

$$\nabla\mathbf{u} = \frac{U_0}{a}\left\{\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\mathbf{e}_r-\left(\frac{3}{2}\dot{\Phi}+\frac{R}{2}\ddot{\Phi}\right)\sin\theta\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta-\frac{1}{2}\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{2}\dot{\Phi}\sin\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\right\}$$

$$(\nabla\mathbf{u})^\mathrm{T} = \frac{U_0}{a}\left\{\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\mathbf{e}_r-\left(\frac{3}{2}\dot{\Phi}+\frac{R}{2}\ddot{\Phi}\right)\sin\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_r-\frac{1}{2}\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{2}\dot{\Phi}\sin\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\mathbf{e}_\theta\right\}$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}+\mu(\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^\mathrm{T})$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mu U_0}{a}\left\{2\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\mathrm{r}\mathbf{e}_r-\left(\dot{\Phi}+\frac{R}{2}\ddot{\Phi}\right)\sin\theta(\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_r+\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta)-\dot{\Phi}\cos\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta\right\}$$

$$+\frac{\mu U_0 B^2}{a}\Pi(R)\cos\theta\mathbf{I} \tag{20}$$

3 球に働く力と自己無撞着条件

流れが試験球に与える力を計算する．仮定された速度ベクトルは

$$\mathbf{u} = U_0 \left\{ \Phi(R)\cos\theta\mathbf{e}_{\mathrm{r}} - \left[\Phi(R) + \frac{R}{2}\dot{\Phi}(R)\right]\sin\theta\mathbf{e}_\theta \right\} \tag{21}$$

試験円柱上での粘着条件を考慮すると

$$\Phi(1) = 0, \quad \dot{\Phi}(1) = 0 \tag{22}$$

試験球に働く力は

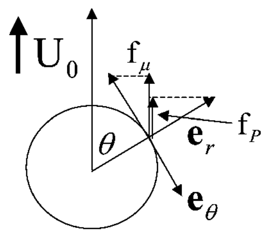

図 3: 試験球に働く力

$$\mathbf{f} = \int_S < H\mathbf{T} > \cdot\mathbf{n}_1 \mathrm{d}S = \int_S < H\mathbf{T} > \cdot\mathbf{e}_r \mathrm{d}S$$

で表され，(20) と (22) 式を考慮すると，寄与する項は

$$\mathbf{f} = \int_S \left\{ \mu U_0 \frac{B^2}{a}\Pi(1)\cos\theta\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \mu\frac{U_0}{a}\frac{1}{2}\ddot{\Phi}(1)\sin\theta\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_r \right\} \cdot \mathbf{e}_r \mathrm{d}S$$

$$= \int_S \left\{ \mu U_0 \frac{B^2}{a}\Pi(1)\cos\theta\mathbf{e}_r + \mu\frac{U_0}{a}\frac{1}{2}\ddot{\Phi}(1)\sin\theta\mathbf{e}_\theta \right\} \mathrm{d}S \tag{23}$$

となる．これら 2 つの力の $\mathbf{U}_0$ 方向の大きさを計算すると (図 3 参照),

$$\mathbf{f}_P = \int_S \mu U_0 \frac{B^2}{a}\Pi(1)\cos^2\theta \mathrm{d}S, \qquad \mathbf{f}_\mu = \int_S \mu\frac{U_0}{2a}\ddot{\Phi}(1)\sin^2\theta \mathrm{d}S$$

$$\int_S \cos^2\theta \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^\theta \cos^2\theta a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 2a^2\pi\int_0^\pi \cos^3\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= 2a^2\pi\int_0^\pi \cos^\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = 2a^2\pi\int_1^{-1} t^2(-\mathrm{d}t) = -2a^2\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1} = \frac{4a^2\pi}{3}$$

また

$$\int_S \sin^3\theta \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^\theta \sin^2\theta a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 2a^2\pi\int_0^\pi \sin^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 2a^2\pi \int_1^{-1} (1 - t^2)(-\mathrm{d}t) = -2a^2\pi \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_1^{-1} = \frac{8a^2\pi}{3}$$

したがって，

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_P + \mathbf{f}_\mu = \mu U_0 B^2 \Pi(1) \frac{4a\pi}{3} + \mu U_0 \ddot{\Phi}(1) \frac{4a\pi}{3} \tag{24}$$

さて，運動方程式 (17) から

$$\ddot{\Phi}(1) + 4\dot{\Phi}(1) + B^2 \dot{\Pi}(1) - B^2 Q \Phi(1) = 0$$

$$\ddot{\Phi}(1) = -B^2 \dot{\Pi}(1)$$

よって，これを (24) 式へ代入すると

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_P + \mathbf{f}_\mu = \mu U_0 B^2 \frac{4a\pi}{3} [\Pi(1) - \dot{\Pi}(1)] \tag{25}$$

となる．また (19) 式の解の形から

$$\Pi(R) = TR + \frac{S}{R^2} + \int_1^R \left\{ \ \cdot \ \right\} \mathrm{d}R$$

さらに

$$\dot{\Pi}(R) = T - \frac{2S}{R^3}$$

であるので，

$$\Pi(1) = T + S, \qquad \dot{\Pi}(1) = T - 2S$$

これを (25) 式へ代入すると

$$\mathbf{f} = \mu \mathbf{U}_0 B^2 \frac{4a\pi}{3} 3S \tag{26}$$

上記，試験球に働く力と自己無撞着条件より

$$n\mathbf{f} = \mu\alpha^2 \mathbf{U}_0$$

$$n\mu \mathbf{U}_0 B^2 \frac{4a\pi}{3} 3S = \mu\alpha^2 \mathbf{U}_0$$

ここで $c = n4\pi a^3/3$ であるから

$$\frac{c}{a^2} B^2 3S = \alpha^2$$

よって

$$S = \frac{1}{3c} \tag{27}$$

となる．