

チェビシェフ多項式による導関数の表現

伊藤榮信

2016年3月23日

Orszag(1971)は Orr-Sommerfeld 方程式に対し, チェビシェフ (Chebyshev) 多項式展開と QR 行列固有値アルゴリズムを使うという解法により, その精密な解を求めている. そして Chebyshev 多項式展開を使うことで非常に精度の良い結果が非常に経済的に得られたとしている. これにより平板 Poiseuille の安定性に関し, 臨界レイノルズ数が 5772.22 であることを導出した. Orr-Sommerfeld 方程式は 4 階の導関数と 2 階の導関数を含んでおり, Orszag はこれらの導関数を Chebyshev 多項式により表現しているが, 4 階の導関数については非常に複雑な公式を提示している. また 4 階の導関数を求めるには 3 階の導関数の Chebyshev 展開が必要となるがそれについては公表していない. そこで, 今回これらの導関数の導出を試みた.

1 Chebyshev 多項式

非負の整数 n に対する第 1 種 n 次 Chebyshev 多項式 $T_n(x)$ を

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta, \quad (1)$$

で定義する. いくつかの例を示すと

$$\left. \begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\ T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x, \\ T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。これらは、漸化式

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad (3)$$

から生成される。任意の関数 $v(x)$ を区間 $-1 \leq x \leq 1$ で以下のように展開することができる：

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \quad (4)$$

ここで

$$a_n = \frac{2}{\pi c_n} \int_{-1}^1 v(x) T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (5)$$

である。ただし $c_0 = 2, c_n = 1 (n > 0)$ 。

(5) 式について備忘録

(2) 式に $T_m(x) = \cos m\theta$ をかけて θ で積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 v(x) T_m(x) d\theta &= \int_{-\pi}^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^0 \cos n\theta \cos m\theta d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^0 \frac{1}{2} \{ \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta \} d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{n+m} \sin(n+m)\theta + \frac{1}{n-m} \sin(n-m)\theta \right]_{-\pi}^0 \end{aligned}$$

となるから、 $n \neq m$ の場合、この積分はゼロとなる。よって、 $n = m$ の場合を元に戻って考える。

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 v(\cos \theta) T_n(\cos \theta) d\theta &= \int_{-\pi}^0 \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cos^2 n\theta d\theta = \int_{-\pi}^0 a_n \frac{1}{2} \{ \cos 2n\theta + 1 \} d\theta \\ &= a_n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n} \sin 2n\theta + \theta \right]_{-\pi}^0 = a_n \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ここで最左辺を $\cos \theta = x$ に戻して書けば、 $\sin \theta d\theta = dx$ であるから

$$\int_{-\pi}^0 v(\cos \theta) T_n(\cos \theta) d\theta = \int_{-1}^1 v(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} a_n$$

を得る。 $n = 0$ の場合は $T_0 = 1$ であり

$$\int_{-1}^1 v(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi}^0 v(\cos \theta) T_0(\cos \theta) d\theta = \int_{-\pi}^0 a_0 1^2 d\theta = \pi a_0$$

である。これら 2 つをまとめて記したのが (5) 式である。 \square

2 導関数のチェビシェフ多項式による展開

$v(x)$ の導関数について以下の書き方を導入する：

$$\frac{d^q v}{dx^q} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q)} T_n(x), \quad (6)$$

ここで $a_n^{(0)} = a_n$ で a_n は (4) 式の係数である。さて、 $T_n(x)$ に対して

$$\frac{c_n}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{d_{n-2}}{n-1} T'_{n-1}(x) = 2T_n(x), \quad (7)$$

が成立する。ここで $T_n(x) = \cos n\theta$ であり、また $n < 0$ のとき $c_n = d_n = 0$, $c_0 = 2, d_0 = 1$, で $n > 0$ のときには $c_n = d_n = 1$ とする。

この関係式を簡単に説明しておく。

$$T'_n(x) = \frac{dT_n}{dx} = \frac{d \cos n\theta}{d(\cos \theta)} = \frac{d \cos n\theta}{d\theta} = \frac{d\theta}{d(\cos \theta)} = n \sin n\theta \frac{1}{\sin \theta}$$

これから

$$\sin n\theta = \frac{1}{n} T'_n(x) \sin \theta$$

が得られる。これを利用して

$$\frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) \sin \theta = \sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta$$

$$\frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) \sin \theta = \sin(n-1)\theta = \sin n\theta \cos \theta - \cos n\theta \sin \theta$$

が得られるから、上の式から下の式を引き算し、 $\sin \theta$ を外すと

$$\frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) = 2 \cos n\theta = 2T_n(x)$$

を得る。 □

(6) 式と (7) 式より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q-1)} T_n(x) &= \frac{d^q v}{dx^q} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q)} T_n(x) \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q)} \left[\frac{c_n}{n+1} T_{n+1}(x) - \frac{d_{n-2}}{n-1} T_{n-1}(x) \right] \end{aligned}$$

が導けるから,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n^{(q-1)}T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q)} \left[\frac{c_n}{n+1}T_{n+1}(x) - \frac{d_{n-2}}{n-1}T_{n-1}(x) \right]$$

を得る. 両辺で添字が n の項を抽出すると, すなわち右辺において

$$\begin{aligned} n+1 \rightarrow n & \cdots \cdots a_n^{(q)} \rightarrow a_{n-1}^{(q)}, \quad c_n \rightarrow c_{n-1}, \\ n-1 \rightarrow n & \cdots \cdots a_n^{(q)} \rightarrow a_{n+1}^{(q)}, \quad d_{n-2} \rightarrow d_{n-1} = 1, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

として, その n をはらうと

$$c_{n-1}a_{n-1}^{(q)} - a_{n+1}^{(q)} = 2na_n^{(q-1)}, \quad (n \geq 1), \quad (8)$$

を得る (左辺と右辺を入れ替えた).

1 階の導関数の係数 $a_n^{(1)}$ の導出

$$c_n a_n^{(1)} = 2 \sum_{p=n+1, p+n \equiv 1 \pmod{2}}^{\infty} p a_p \quad (n \geq 0), \quad (9)$$

導出

(8) 式で最初の番号を 1 つ上げた式を先頭に並べると

$$c_n a_n^{(q)} - a_{n+2}^{(q)} = 2(n+1)a_{n+1}^{(q-1)},$$

$$a_{n+2}^{(q)} - a_{n+4}^{(q)} = 2(n+3)a_{n+3}^{(q-1)},$$

$$a_{n+4}^{(q)} - a_{n+6}^{(q)} = 2(n+5)a_{n+5}^{(q-1)},$$

$$a_{n+6}^{(q)} - a_{n+8}^{(q)} = 2(n+7)a_{n+7}^{(q-1)},$$

.....

この両辺を上から下に加えていくと

$$c_n a_n^{(q)} = \sum_{i=0, p=n+1+2i}^N 2p a_p^{(q-1)}, \quad (10)$$

を得る. ここで Orszag は, 和の書き方を $p = n+1, p+n \equiv 1 \pmod{2}$ とする方法をとっているが ($a \equiv b \pmod{2}$ は $a-b$ が 2 で割れる), 慣れないのでこちらの書き方を採った. i は $0 \sim N$ まで動く. よって, (10) 式は $q=1$ とすることで

$$c_n a_n^{(1)} = \sum_{i=0, p=n+1+2i}^N 2p a_p^{(0)} = \sum_{i=0, p=n+1+2i}^N 2p a_p$$

$$c_n a_n^{(1)} = 2 \sum_{i=0}^N p a_p, (p = n + 1 + 2i), \quad (11)$$

が得られる. $a_p = a_n$ は (5) もしくは (4) で導入された係数である.

2階導関数の係数 $a_n^{(2)}$ の導出 (Orszag, 1971)

$$c_n a_n^{(2)} = \sum_{p=n+4, p \equiv n \pmod{2}}^{\infty} p(p^2 - n^2) a_p \quad (n \geq 0), \quad (12)$$

導出

(10) 式より

$$\begin{aligned} c_n a_n^{(2)} &= \sum 2m a_m^{(1)} \\ &= 2(n+1) a_{n+1}^{(1)} \rightarrow 2(n+1) \left\{ 2 \sum_{i=0}^N p a_p, p = n+2+2i \right\} \\ &+ 2(n+3) a_{n+3}^{(1)} \rightarrow 2(n+3) \left\{ 2 \sum_{i=0}^N p a_p, p = n+4+2i \right\} \\ &+ 2(n+5) a_{n+5}^{(1)} \rightarrow 2(n+5) \left\{ 2 \sum_{i=0}^N p a_p, p = n+6+2i \right\} \\ &\dots\dots\dots \\ &= 2(n+1) 2 \{ (n+2) a_{n+2} + (n+4) a_{n+4} + (n+6) a_{n+6} + \dots \} \\ &+ 2(n+3) 2 \{ (n+4) a_{n+4} + (n+6) a_{n+6} + (n+8) a_{n+8} + \dots \} \\ &+ 2(n+5) 2 \{ (n+6) a_{n+6} + (n+8) a_{n+8} + (n+10) a_{n+10} + \dots \} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

斜めに現れる同じ a_{n+2+2i} の係数の和をとって整理すると

$$\begin{aligned} &= 2(n+2)(2n+2) a_{n+2} + 4(n+4)(2n+4) a_{n+4} + 6(n+6)(2n+6) a_{n+6} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^N (p-n)p(p+n) a_p, p = n+2+2i \\ &= \sum_{i=0}^N p(p^2 - n^2) a_p, p = n+2+2i \end{aligned}$$

以上が Orszag が導出し表した式である. 後で触れるため

$$c_n a_n^{(2)} = \sum_{i=0}^N (i+1) 2^2 (n+1+i) p a_p, p = n+2+2i (n \geq 0), \quad (13)$$

も併記しておく.

□

4 階導関数 $c_n a_n^{(4)}$ の係数 (Orszag, 1971)

Orszag は 4 階導関数に以下の式を提示している.

$$c_n a_n^{(4)} = \frac{1}{24} \sum_{p=n+4, p \equiv n \pmod{2}}^N \left[p^3(p^2 - 4)^2 - 3n^2 p^5 + 3n^4 p^3 - pm^2(n^2 - 4)^2 \right] a_p, \quad (14)$$

3 導関数 $c_n a_n^{(i)}$ の係数の導出について

Orszag(1971) の Appendix には, $c_n a_n^{(3)}$ の結果が記されていない. ここではまず $c_n a_n^{(3)}$ を求めることから始める.

$c_n a_n^{(3)}$ の導出

(10) 式より

$$\begin{aligned} c_n a_n^{(3)} &= \sum 2m a_m^{(2)} \\ &= 2(n+1)a_{n+1}^{(2)} \\ &\quad + 2(n+3)a_{n+3}^{(2)} \\ &\quad + 2(n+5)a_{n+5}^{(2)} \\ &\quad \dots\dots\dots \\ &\quad \dots\dots\dots \end{aligned}$$

であり, 更に (12) 式を具体的に展開し面倒な式をまとめることにより各 a_n の係数が次のようになる.

$$\begin{aligned} a_{n+3} &: 2^3 \cdot 1(n+1)(n+2)(n+3), \\ a_{n+5} &: 2^3 \cdot 3(n+2)(n+3)(n+5), \\ a_{n+7} &: 2^3 \cdot 6(n+2)(n+3)(n+5), \\ a_{n+9} &: 2^3 \cdot 10(n+2)(n+3)(n+5), \end{aligned}$$

ここに現れる 1,3,6,10 が階差数列であることに注意して $c_n a_n^{(3)}$ を作ると

$$c_n a_n^{(3)} = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} (i+1)(i+2) 2^3 (n+1+i)(n+2+i) p a_p, \quad p = n+3+2i, \quad (15)$$

である.

これが正しいことを確認するために, はじめの数項を書き下す. ただし,

$c_0 = 2, c_n = 1(n \geq 1)$ である.

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(3)} &= 24a_3 + 480a_5 + 2016a_7 + \cdots \\ a_1^{(3)} &= 192a_4 + 1728a_6 + 7680a_8 + \cdots \\ a_2^{(3)} &= 480a_5 + 3360a_7 + \cdots \\ a_3^{(3)} &= 960a_6 + 5760a_8 + \cdots \\ a_4^{(3)} &= 1680a_7 + \cdots, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

例えば, $T_7 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$ であり, また $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1, T_2 = 2x^2 - 1, T_0 = 1$ である. 更に T_7 の 3 階導関数は $T_7''' = 13440x^4 - 6720x^2 + 336$ となる. $v(x) = T_7$ として Chebyshev 展開 (5) を行うと, 明らかに $a_7 = 1$ であり, 他の $a_n = 0$ となる. そこで (16) で a_7 の入る項をとりだして $c_n a_n^{(3)}$ をつくると

$$c_n a_n^{(3)} = a_0^{(3)}(2016a_7) + a_2^{(3)}(3360a_7) + a_4^{(3)}(1680a_7)$$

となるので, これを計算すると

$$\begin{aligned} &2016a_7 + 3360a_7(2x^2 - 1) + 1680a_7(8x^4 - 8x^2 + 1) \\ &= (13440x^4 - 6720x^2 + 336)a_7 \end{aligned}$$

こうして, $c_n a_n^{(3)}$ が (15) で表されることが確認できる. \square

$c_n a_n^{(4)}$ の導出

前記の $c_n a_n^{(3)}$ と同じ方法により $c_n a_n^{(4)}$ を導出する. その形を予測するために, $c_n a_n^{(i)}$ を Orszag の書き方とは異なる記法で書いてみる.

$$c_n a_n^{(1)} = \sum_{i=0}^N 2^1 p a_p, \quad p = n + 1 + 2i, \quad (n \geq 0),$$

$$c_n a_n^{(2)} = \sum_{i=0}^N (i+1)2^2(n+1+i)p a_p, \quad p = n + 2 + 2i \quad (n \geq 0),$$

$$c_n a_n^{(3)} = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2}(i+1)(i+2)2^3(n+1+i)(n+2+i)p a_p, \quad p = n + 3 + 2i,$$

以上から, $c_n a_n^{(4)}$ のおおよその形が推測できるから, あとは最初のいくつかの項の係数を具体的に算出すればよい. (10) 式より

$$\begin{aligned} c_n a_n^{(4)} &= \sum 2m a_m^{(3)} \\ &= 2(n+1)a_{n+1}^{(3)} \\ &\quad + 2(n+3)a_{n+3}^{(3)} \\ &\quad + 2(n+5)a_{n+5}^{(3)} \\ &\quad \dots\dots\dots \\ &\quad \dots\dots\dots \end{aligned}$$

であるので、これに (15) を代入し展開しまとめると各 a_n の係数が以下のよう
に求められる：

$$\begin{aligned} a_{n+4} &: 2^4 \cdot 1(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), \\ a_{n+6} &: 2^4 \cdot 4(n+2)(n+3)(n+4)(n+6), \\ a_{n+8} &: 2^4 \cdot 10(n+3)(n+4)(n+5)(n+8), \\ a_{n+10} &: 2^4 \cdot 20(n+4)(n+5)(n+6)(n+10), \\ a_{n+12} &: 2^4 \cdot 35(n+5)(n+6)(n+7)(n+12), \\ &\dots \end{aligned}$$

ここに現れる 1, 4, 10, 20, 35 は 2 重の階差数列であることに注意すると

$$c_n a_n^{(4)} = \sum_{i=0}^N \frac{1}{6} (i+1)(i+2)(i+3) 2^4 (n+1+i)(n+2+i)(n+3+i) p a_p, \quad (17)$$

を得る。ただし $p = n + 4 + 2i$, $n \geq 0$ である。

Orszag の結果と比較するため、最初の数項を計算すると

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(4)} &= 192a_4 + 4608a_6 + 76800a_8 + \dots \\ a_1^{(4)} &= 1920a_5 + 26880a_7 + 172800a_9 + \dots \\ a_2^{(4)} &= 5760a_6 + 61440a_8 + \dots \\ a_3^{(4)} &= 13440a_7 + 120960a_9 + \dots \\ a_4^{(4)} &= 26880a_8 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となり、これが Orszag の式 (14) から計算したものと全て一致する。

4 追加：行列による表現

(11) 式を行列で記述すると

$$\begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ a_4^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 7 & 0 & 9 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & 14 & 0 & 18 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 14 & 0 & 18 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (19)$$

となる．ここに記した行列を D とするならば，

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 32 & 0 & 108 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 120 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 192 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (20)$$

であり，これは (12) に一致する．なお，行列の積にはフリーソフト Maxima を使った．

あとがき

以上が 1 階から 4 階の導関数をチェビシェフ多項式により展開したものである．Orr-Sommerfeld 方程式には 2 階と 4 階の導関数しか必要ないので，もちろん 3 階の導関数は必要ない．したがって，この導出はあくまでも興味本位から試みたものである．更に高階の導関数に興味をもつ方がいらっしゃるなら，計算は多少面倒でも同様に進めることで所望の階数までの導関数は得られる．なお Orszag(1971) の出典を以下に示しておく．

S. A. Orszag “*Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation*”,
J. Fluid Mech. (1971) vol. 50 pp.689-703