

1次元溶融金属凝固に対する Garcia 等の方法

伊藤榮信

1994年12月23日

更新2019年12月21日

概要

ゼクセルテックレビュー No.9 1994年「鑄造欠陥予測機能の α -FLOW への組み込み」に掲載した付録「1次元溶融金属凝固に対する Garcia 等の解」を主に再掲する。ただし、本文の第5.2節「Garcia 等による解析解との比較」で使用した Garcia 等の式についてはその導出等にういて記した。さて、Garcia 等の方法とは鑄型と金属（固相）との間の接触部分における熱収支で熱伝導（Schwarz 解）に加え熱伝達の考えを導入した解法である。すなわち、鑄型と金属との間に予め ϵ_0 という厚さの固相が存在すると仮定して、固相厚さ ϵ と時間 t の関係式を決定する。初期固相厚 ϵ_0 を含むこの式を決定するために Garcia 等は鑄型と溶湯金属の間にギャップが生じると仮定し、このギャップを仮想的な固相の金属で満たし、そこに熱伝達の考えを導入する。

5 固相率計算部の α -FLOW への組み込み

5.1 温度回復法の組み込み

5.2 Garcia 等による解析解との比較

凝固時間 t と固相液相界面位置 ϵ との関係の Garcia 等の解は

$$\epsilon = -2\alpha_S \kappa \phi^2 + 2\phi \sqrt{\alpha_S^2 \kappa^2 \phi^2 + \alpha_S t}, \quad (10a)$$

$$\alpha_S = \frac{\lambda_S}{\rho_S C_{PS}}, \quad (10b)$$

$$\kappa = \frac{\rho_S C_{PS}}{\sqrt{\pi} \phi \exp(\phi^2) [M + \operatorname{erf}(\phi)] h_i}, \quad (11)$$

で、 ϕ は次式によって与えられる：

$$\frac{\exp(-\phi^2)}{M + \operatorname{erf}(\phi)} = \frac{\sqrt{\pi} L \phi}{C_{PS}(T_f - T_0)},$$

$$M = \sqrt{\frac{\lambda_S \rho_S C_{PS}}{\lambda_m \rho_m C_{Pm}}}. \quad (12)$$

オリジナル（1994年版）では（11）式は κ では無く α とした。しかし、既に α_S が使用されており紛らわしいので κ を使った。またオリジナル版では記さなかった（10a）、（11）式の導出に触れる。なお、添字 m は鑄型（mould）を表し、 S は固相（Solid）を表す。その他は末尾の「記号」を参照。

（10a）、（11）式の導出

これは付録 A.6 で求められた関係式（A.17）から導かれる。この式は ϵ についての2次式

$$\epsilon^2 + 2\epsilon_0 \epsilon - 4\alpha_S \phi^2 t = 0$$

であるから、解の公式により ϵ を求めると

$$\epsilon = -\epsilon_0 \pm \sqrt{\epsilon_0^2 + 4\alpha_S \phi^2 t}$$

が得られる。ここに現れた ϵ_0 の導出は少し面倒である。まず、（A.39）式で表された ϵ_0 の分母にある $T_f - T_0$ を（A.32）式を使って消去すると

$$\epsilon_0 = \frac{2\alpha_S \phi^2 \rho_S C_{PS}}{h_i \operatorname{erf}(\phi) \phi \sqrt{\pi} \exp(\phi^2)}$$

を得る。上の式 of 分母に現れる仮想的な熱伝達係数 h_{iS} を（A.47）式を使い h_i で記述すると

$$\epsilon_0 = 2\alpha_S \phi^2 \frac{\rho_S C_{PS}}{h_i [\operatorname{erf}(\phi) + M] \phi \sqrt{\pi} \exp(\phi^2)}$$

が得られるので、これを簡略化するために

$$\epsilon_0 = 2\alpha_S \phi^2 \kappa$$

と書き、（11）式の κ を定義する。これを解の公式から得られた ϵ の式へ代入すると（復号は+をとる）

$$\epsilon = -2\alpha_S \kappa \phi^2 + \sqrt{4\alpha_S^2 \kappa^2 \phi^4 + 4\alpha_S \phi^2 t}$$

が得られるので、（10a）が得られた。

付録 A 1次元溶融金属凝固に対する Garcia 等の方法

本文第 5.2 節で固相率計算プログラムの精度確認を行った。そこで解析解として使用した Garcia-Clyne-Prates の解 [1], [2] について述べる。

A.1 凝固問題の解析解について

凝固解析の解析解として得られている代表的解は、1) Neumann の解と 2) Schwarz の解である。

1) Neumann の解では、溶融金属のみを考え、金属の外側（すなわち鋳型）については考えない。溶融金属の片側境界 ($x = 0$) で一定温度に保たれるという条件が課せられる。これに対し

2) Schwarz の解では、溶融金属の外側に鋳型を考慮し、金属が放出する熱の影響まで含め鋳型内の温度分布、さらには溶融金属の凝固までを計算する。ただし、金属と鋳型の界面は冷却中完全に接触していると仮定され、十分な時間経過後には、界面両側の温度は連続になる (図 1)。しかしながら、これらの古典的な解は必ずしも実験とよく一致するというものではないと言われている。そこで

3) Garcia 等は固相厚さ ϵ と時間 t の関係式を得るために、上記 2) の Schwarz の解による方法を発展させ、鋳型と金属との間に予め固相 (厚さ ϵ_0) が存在すると仮定する。そして、この式 (もしくは ϵ_0) を決めるために鋳型と、溶湯の間に空間を設け、そこに熱伝達 (熱抵抗) を考慮する (図 2)。これが本題の Garcia 等の方法である。

A.2 基礎方程式とその一般解

鋳型もしくは溶融金属内での温度は熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_i \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \alpha_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_{pi}}, \quad (A.1)$$

によって決められる。なお、 $\rho_i, C_{pi}, \lambda_i$ は各々物質 i の密度、定積比熱、熱伝導度である。以後、各種物理量に付ける添字 m, S, L は鋳型 (mould), 固相 (Solid), 液相 (Liquid) を表す。

この方程式の一般解は

$$T = A + B \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_i t}} \right), \quad (A.2)$$

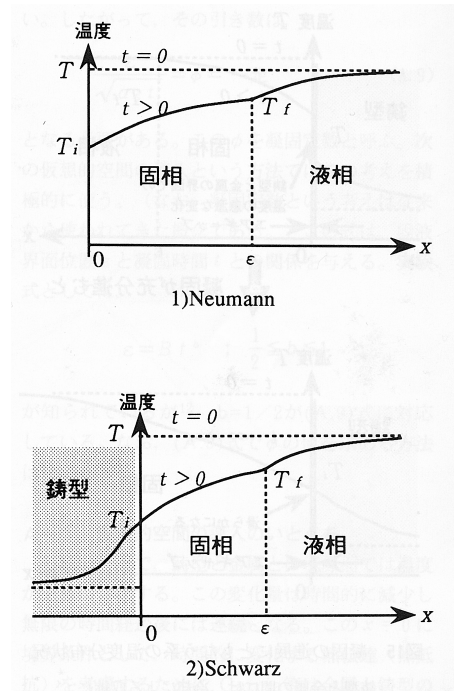


図 1 凝固問題での境界条件

で表される。ここで erf は誤差関数で

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-p^2} dp, \quad (A.3)$$

である。(A.2) が (A.1) の解であることは、実際に (A.2) を (A.1) 式へ代入すればよい。ただし

$$\frac{\partial \operatorname{erf}(p)}{\partial t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-p^2} \frac{\partial p}{\partial t}$$

などに注意。

A.3 境界条件

系の温度分布を図 3 に示す。

$$\textcircled{1} \begin{cases} \text{鋳型: } x \rightarrow -\infty \text{ で } T_m = T_0, \\ \text{金属: } x \rightarrow +\infty \text{ で } T_S = T_f \end{cases}$$

ここで T_0, T_f は各々鋳型の無限遠の端での温度と金属の融点もしくは液相温度である。

また、凝固に関する条件

$$\textcircled{2} \quad x = \epsilon, \quad t \geq 0 \text{ で } T_S = T_L = T_f$$

と図 4 に示した海面を内部に含む短冊状の領域での熱の保存則から得られる (1 次元)。凝固による短冊

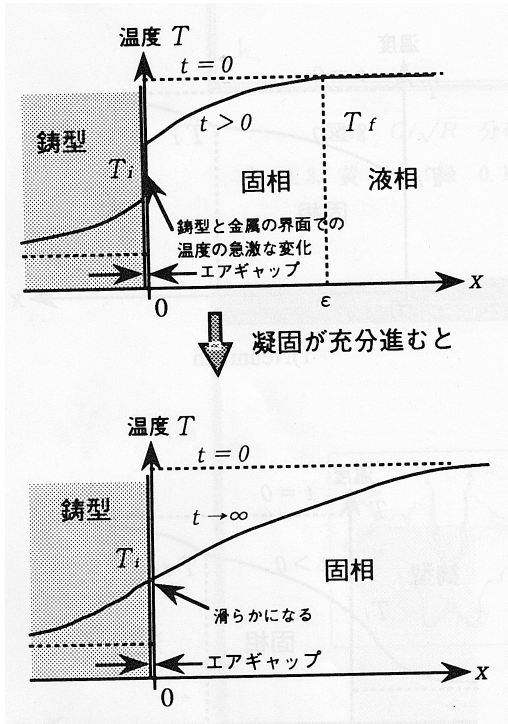


図2 凝固の進展に伴う系の温度分布状況. 鋳型と金属の間には冷却による収縮に伴うエアギャップが生じる.

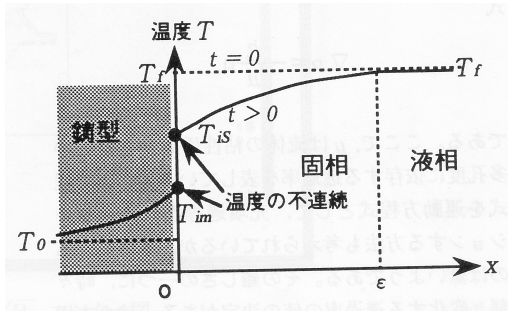


図3 凝固初期の鋳型/金型の温度分布

内で潜熱の放出を Q , 固相内への熱流束を q_S , 液相内への熱流束を q_L とすると, これらの界面での収支は
(単位時間あたりの短冊内での潜熱放出 Q) =
(短冊境界面での熱流束 q_S, q_L による熱流入出)
すなわち

$$\frac{(\rho L A \Delta x)}{\Delta t} = (q_L - q_S) \cdot n A. \quad (A.4)$$

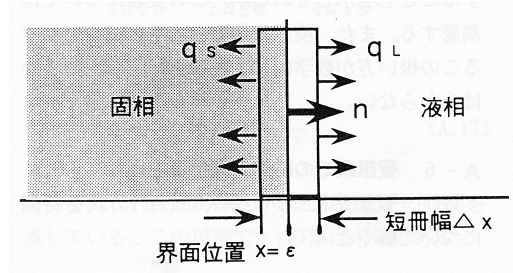


図4 固相/液相界面での熱収支: ϵ は界面位置で, 短冊に垂直方向 n に, 界面は速度 V で移動する. q_S : 固相内への熱流束, q_L : 液相内への熱流束

ここで, A は短冊断面積, n は短冊に垂直な単位ベクトル, $L(J/kg)$ は単位質量当たりの潜熱を表す. フーリエの法則によると熱流束は $q_i = -\lambda_i \nabla T$ で表されるが, ここでは1次元で考えているので

$$q_i = -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (A.5)$$

と書ける. ここで添字は各相を表す. よって, 上記の熱収支の式は

$$\rho_S L \frac{d\epsilon}{dt} = \lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial x} - \lambda_L \frac{\partial T_L}{\partial x}, \quad (A.6)$$

となる. 問う問題では液相内で温度一定と仮定しているので ($q_L = 0$), 界面での条件は

$$\textcircled{3} \quad \rho_S L \frac{d\epsilon}{dt} = \lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial x}, \quad (A.7)$$

となる.

よって, 境界条件は ① ~ ③ となる.

A.4 凝固定数について

熱伝導方程式の一般解である (A.2) 式に境界条件 ② を適用すると, 固相/液相界面である $x = \epsilon$ での温度は

$$T_S = A + \text{Berf} \left(\frac{\epsilon}{2\sqrt{\alpha_S t}} \right) = T_L, \quad (A.8)$$

となるが, これは凝固温度であるので時間及び位置によらず一定でなければならない. A, B は定数であるから誤差関数部も一定でなければならない. したがって, その引数は

$$\frac{\epsilon}{2\sqrt{\alpha_S t}} = \phi = \text{一定}, \quad (A.9)$$

となる必要がある。この ϕ を凝固定数とよぶ。次の節での仮想的空間の導入という方法ではこの考えを積極的に使う。(なお、凝固定数という考えは従来から使われてきた概念である。) この式は固液界面位置 ϵ と凝固時間 t との関係を与える。実験式としては

$$\epsilon = Ct^b, \quad \frac{1}{2} \leq b \leq 1$$

が知られているが [3], $b = 1/2$ が (A.9) 式に対応している。 C は定数。書き換えれば $t = C^{-2}\epsilon^2$ となる。なお (A.9) 式で ϕ の値を求める方法は後で述べる。

A.5 仮想的空間導入のいとぐち

初期の時点で、鋳型と金属との境界面では温度が急激に変化する。この変化量は時間の経過とともに減少し無限の時間経過後には連続となる。この $x = 0$ に境界条件として、時間的に変化する熱伝達(熱抵抗)を考慮するために、Garcia 等は金属と鋳型間に仮想的な空間(もしくは金属)を導入する(図5)。これを通じて温度は連続となる。この仮想的な空間を抜き去ると、鋳型/金属の界面での初期温度分布は不連続となる。

まず、金属の方から考える。凝固は仮想的な端から始まるとする。すなわち

$$x' = \epsilon_0 + x, \quad \epsilon' = \epsilon_0 + \epsilon, \quad t' = t_0 + t, \quad (\text{A.10})$$

なる座標系を導入する。ここで t_0 は仮想空間に厚さ ϵ_0 の固相が形成されるに必要な仮想的な時間である。仮想空間での熱伝導方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = \alpha_S \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2}, \quad 0 \leq x' \leq \epsilon' \quad (\text{A.11})$$

であり、その解は、(A.2) 式

$$T = A + \text{Berf} \left(\frac{x'}{2\sqrt{\alpha_S t'}} \right), \quad (\text{A.12})$$

である。したがって、仮想系において凝固定数の考えを適用すると

$$\frac{\epsilon'}{2\sqrt{\alpha_S t'}} = \phi = \text{一定}, \quad (\text{A.13})$$

が得られる。

このように仮想系の導入という仮定に基づく理論

では、それから得られた結果に対して実験的な裏付けが必要となる。Garcia 等は同論文で実験との比較を行い理論的に得られた結論と一致することを明示しているが、この実験については割愛する。境界条件として熱抵抗を付加するこの扱い方が数学的にどれほどの意味をもつかは分からない。

A.6 仮想系での時間と固相厚さ

以下、仮想系について考える。(A.13) 式を時間 t' について解くと

$$t' = \frac{\epsilon'^2}{4\alpha_S \phi^2}, \quad (\text{A.14})$$

を得る。特に、 $x' = \epsilon_0$, $t' = t_0$ とすると(すなわち、実空間での原点 $t = x = 0$)

$$t_0 = \frac{\epsilon_0^2}{4\alpha_S \phi^2}, \quad (\text{A.15})$$

を得る。さらに、仮想系と実際の系との関係式 (A.10) 式より

$$\begin{aligned} t' &= t + t_0 = \frac{(\epsilon + \epsilon')^2}{4\alpha_S \phi^2} \\ &= \frac{\epsilon^2}{4\alpha_S \phi^2} + \frac{\epsilon\epsilon_0}{2\alpha_S \phi^2} + \frac{\epsilon_0^2}{4\alpha_S \phi^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

となるので、(A.15) 式を考慮すると

$$t = \frac{\epsilon^2}{4\alpha_S \phi^2} + \frac{\epsilon_0\epsilon}{2\alpha_S \phi^2}, \quad (\text{A.17})$$

を得る(第4節に記した2次式 $t = C^{-2}\epsilon^2$ と比較せよ)。これは固相厚さが ϵ となるまでの時間を表している。この段階で ϵ_0 の値は未知である。また、Garcia 等の論文では最終的にこの ϵ に関する2次式が実験と比較され、一致の良さが示される。

A.7 温度分布の決定

仮想系での境界条件は、一部実空間との対応により決めることができ

- ①' 鋳型: $x' \rightarrow -\infty$ で $T_m = T_0$,
- ②' $x' = \epsilon'$, $t' \geq t_0$ で $T_S = T_L = T_f$,
- ③' $\rho_S L \frac{d\epsilon'}{dt'} = \lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial x'}$
- ④' 鋳型/金属界面: $x' = 0$ で $T = T_i$
- ⑤' $x' = 0$ で $\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial x'} = \lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial x'}$

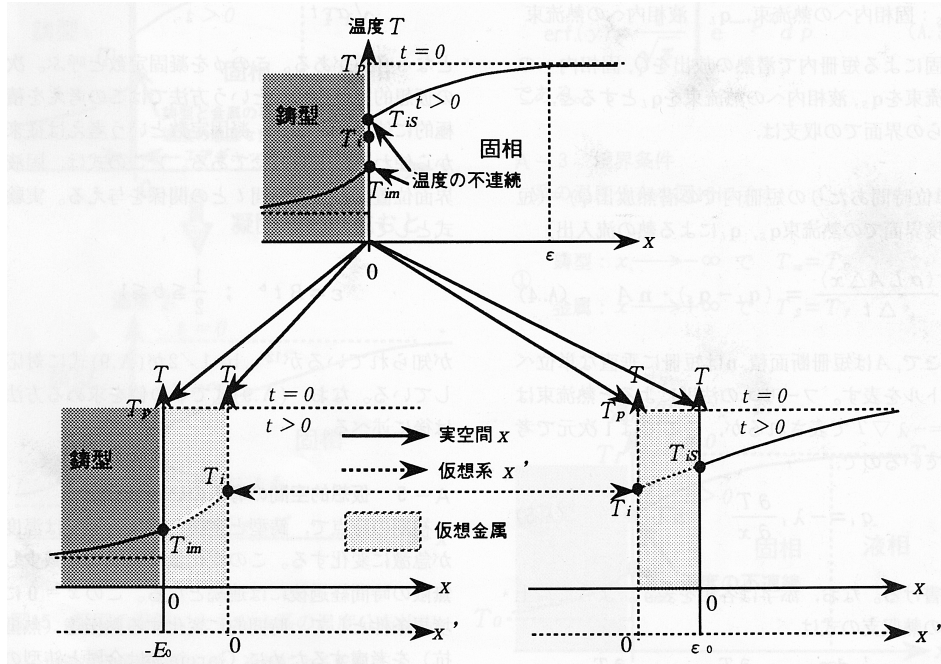


図5 溶融金属の仮想系と実空間

で表現される境界条件を (A.12) 式に適用することにより、積分定数 A_i, B_i が決められる。

固相金属内部の温度分布

$$T_S(x') = A_S + B_S \operatorname{erf}\left(\frac{x'}{2\sqrt{\alpha_S t'}}\right).$$

なお、④' は新たに発生した境界条件であり、 T_i の値は未知である。まず、④' の条件より

$$A_S = T_i. \tag{A.18}$$

②' の条件に、凝固定数 ϕ を利用すると

$$T_f = T_i + B_S \operatorname{erf}\left(\frac{\epsilon'}{2\sqrt{\alpha_S t'}}\right),$$

$$\therefore B_S = \frac{T_f - T_i}{\operatorname{erf}(\phi)}. \tag{A.19}$$

また、凝固定数の定義式 (A.13) より

$$\frac{\epsilon'}{2\sqrt{\alpha_S t'}} = \phi \Rightarrow \frac{\epsilon' x'}{2\sqrt{\alpha_S t'}} = \phi x'$$

$$\therefore \frac{x'}{2\sqrt{\alpha_S t'}} = \phi \frac{x'}{\epsilon'}. \tag{A.20}$$

これに、関係式 (A.10) を代入すると、固相内の温度分布

$$T_S(x) = T_i + \frac{T_f - T_i}{\operatorname{erf}(\phi)} \operatorname{erf}\left(\phi \frac{\epsilon_0 + x}{\epsilon_0 + \epsilon}\right), \tag{A.21}$$

を得る。 $x = 0$ とすると T_{iS} になり、固相が進み $\epsilon \rightarrow \infty; \epsilon' \rightarrow \infty$ で $\operatorname{erf}(\phi x'/\epsilon') \rightarrow 0$ となり、 $T_S \rightarrow T_i$ となる。

鑄型温度分布

鑄型温度分布 $T_m(x)$ は

$$T_m(x') = A_m + B_m \operatorname{erf}\left(\frac{x'}{2\sqrt{\alpha_m t'}}\right),$$

と書くことができる。よって、境界条件 ① と ④' から $\operatorname{erf}(-\infty) \rightarrow -1$ となることを考慮し

$$A_m = T_i, \quad B_m = T_i - T_0, \tag{A.22}$$

が得られる。鑄型温度分布 $T_m(x')$ の誤差関数内引数を凝固定数を使って表すと

$$\frac{x'}{2\sqrt{\alpha_m t'}} = \frac{x'}{2\sqrt{\alpha_S t'}} \sqrt{\frac{\alpha_S}{\alpha_m}} = \frac{\phi}{\epsilon'} x' N, \tag{A.23}$$

である。ただし $N = \sqrt{\alpha_S/\alpha_m}$ とした。よって鋳型内温度分布は

$$T_m(x) = T_i + (T_i - T_0) \operatorname{erf} \left(N\phi \frac{x - E_0}{\epsilon_0 + \epsilon} \right), \quad (\text{A.24})$$

が得られる。ここで、この後に決定する未知の定数 $-E_0$ を導入した (図5左参照)。

A.8 鋳型/固相界面での仮想温度 T_i の決定

これまででは固相内温度分布と鋳型内温度分布の式には本来未知である鋳型と金属の界面温度 T_i が使われている。したがって、この値を決めておく必要がある。この値は、この境界面を通過する熱量が等しいという条件から決められる (条件⑤')。すなわち

$$x' = 0 \text{ で } \lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial x'} = \lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial x'}. \quad (\text{A.25})$$

(A.21) 式と (A.24) 式で表される温度を x' について微分すればよい:

$$\lambda_m B_m \frac{\partial p_m}{\partial x'} = \lambda_S B_S \frac{\partial p_S}{\partial x'}$$

を計算する ($x' = 0$)。ここで p_m は (A.23) 式で定義される誤差関数の引数であり、 p_S は (A.20) 式で定義される。これらをまとめた結果

$$\lambda_m (T_i - T_0) N = \lambda_S \frac{T_f - T_i}{\operatorname{erf}(\phi)}. \quad (\text{A.26})$$

これを、 α_i の定義式 (A.1) に注意したうえで、 T_i について解くと

$$T_i = \frac{M}{\operatorname{erf}(\phi) + M} T_f + \frac{\operatorname{erf}(\phi)}{\operatorname{erf}(\phi) + M} T_0$$

$$(\text{or}) = T_0 + \frac{(T_f - T_0)M}{\operatorname{erf}(\phi) + M}. \quad (\text{A.27})$$

ここで $M = \sqrt{\lambda_S \rho_S C_{PS} / \lambda_m \rho_m C_{Pm}}$ である。

A.9 凝固定数 ϕ の計算

固相/液相界面での熱移動のつり合い (A.7) 式の③から ϕ を決める式を導出できる。仮想系でのこの条件は

$$\text{固相/液相界面: } \rho_S L \frac{d\epsilon'}{dt'} = \lambda_S \frac{\partial T_S(x')}{\partial x'}. \quad (\text{A.28})$$

この式の左辺の時間 t' に関する微分演算は (A.14) 式を仮想系の時間で微分することによって得られ、③から ϕ を決める式を導出できる。仮想系でのこの条件は

$$\text{左辺} = \rho_S L \phi \sqrt{\frac{\alpha_S}{t'}}, \quad (\text{A.29})$$

を得る。一方、右辺は固相内の温度 (A.21) を誤差関数の定義式に注意し、 x' について微分すると、右辺は

$$\text{右辺} = \lambda_S \frac{T_f - T_i \exp(-\phi^2)}{\operatorname{erf}(\phi) \sqrt{\alpha_S \pi t'}}, \quad (\text{A.30})$$

を得る。よって (A.29) 式と (A.30) を等値することにより

$$\sqrt{\pi} \phi \exp(\phi^2) \operatorname{erf}(\phi) = \frac{C_{PS}(T_f - T_i)}{L}, \quad (\text{A.31})$$

を得る。さらに、 T_i の式 (A.27) を代入し、計算整理すると

$$\sqrt{\pi} \phi \exp(\phi^2) [M + \operatorname{erf}(\phi)] = \frac{C_{PS}(T_f - T_0)}{L}, \quad (\text{A.32})$$

を得る。よって、これを ϕ について数値的に解けばよい。

A.10 初期仮想厚さ ϵ_0 の決定

凝固定数内に含まれる未知の定数 ϵ_0 の値を求め、これを決めるための条件式は「溶湯界面/仮想系での固相先端 $x' = \epsilon_0$ 」との熱のやりとりから得られる。まず溶融金属側に対しては、熱伝達係数 h_{iS} 、温度差 $T_{iS} - T_i$ による鋳型側への熱の流れより

$$h_{iS}(T_{iS} - T_i) = \lambda_S \left(\frac{\partial T_S(x')}{\partial x'} \right)_{x'=\epsilon_0}, \quad (\text{A.33})$$

を得る。しかしながら、この式は未知の T_{iS} という温度を含んでいる。そこで、極限 $t \rightarrow 0$ を考えることにより、 $T_{iS} = T_f$ 、 $\epsilon' = \epsilon_0$ とすることで未知の温度を消すことができ、次の式を得る:

$$h_{iS}(T_f - T_i) = \lambda_S \left(\frac{\partial T_S(x')}{\partial x'} \right)_{x'=\epsilon_0=\epsilon'}. \quad (\text{A.34})$$

固相内の温度は (A.21) 式は

$$T_S(x) = T_i + \frac{T_f - T_i}{\operatorname{erf}(\phi)} \operatorname{erf} \left(\phi \frac{x'}{\epsilon'} \right), \quad (\text{A.35})$$

と書けるので、これを (A.34) 式に代入し微分することによって

$$\frac{\partial T_S(x')}{\partial x'} = \frac{T_f - T_i}{\operatorname{erf}(\phi)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\phi}{\epsilon'} \exp\left(-\phi^2 \frac{x'^2}{\epsilon'^2}\right), \quad (\text{A.36})$$

を得る。ここで $x' = \epsilon' = \epsilon_0$ とするので

$$\frac{\partial T_S(x')}{\partial x'} = \frac{T_f - T_i}{\operatorname{erf}(\phi)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\phi}{\epsilon_0} \exp(-\phi^2), \quad (\text{A.37})$$

となる。よってこれを (A.34) 式に代入すると

$$h_{iS}(T_f - T_i) = \lambda_S \frac{2(T_f - T_i)}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\phi)} \frac{\phi}{\epsilon_0} \exp(-\phi^2)$$

を得るから、これを ϵ_0 について解くと

$$\epsilon_0 = \frac{2\lambda_S}{h_{iS}\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(\phi)} \phi \exp(-\phi^2) \quad (\text{A.38})$$

となり、さらに (A.32) 式を使い $\exp(-\phi^2)$ を消去すると

$$\epsilon_0 = \frac{2\alpha_S \phi^2 L \rho_S [M + \operatorname{erf}(\phi)]}{h_{iS}(T_f - T_0) \operatorname{erf}(\phi)} \quad (\text{A.39})$$

を得る。

A.11 E_0 の決定

前節と同様の計算を仮想系での鋳型部分に対して行うことで、 E_0 を求めることができる。すなわち鋳型/溶湯界面での熱移動の式

$$h_{im}(T_i - T_{im}) = \lambda_m \left(\frac{\partial T_m(x')}{\partial x'} \right)_{x'=-E_0}. \quad (\text{A.40})$$

を使う。左辺に現れる仮想系での温度 T_{im} を消去するために $x = 0, t = 0$ とする (すなわち、 $x' = -E_0, \epsilon' = \epsilon_0$)。よって

$$h_{im}(T_i - T_0) = \lambda_m \left(\frac{\partial T_m(x')}{\partial x'} \right)_{x'=-E_0, \epsilon'=\epsilon_0}, \quad (\text{A.41})$$

を得る。(A.24) 式で表される鋳型内温度 T_m を x' で偏微分すると、

$$\text{右辺} = \lambda_m(T_i - T_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N\phi}{\epsilon'} \exp\left(-N^2 \phi^2 \frac{x'^2}{\epsilon'^2}\right)$$

が得られる。 $x' = -E_0, \epsilon' = \epsilon_0$ であるから、右辺は

$$\lambda_m(T_i - T_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N\phi}{\epsilon_0} \exp\left(-N^2 \phi^2 \frac{E_0^2}{\epsilon_0^2}\right), \quad (\text{A.42})$$

となる。よって (A.41), (A.42) 式より

$$\begin{aligned} h_{im}(T_i - T_0) \\ = \lambda_m(T_i - T_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N\phi}{\epsilon_0} \exp\left(-N^2 \phi^2 \frac{E_0^2}{\epsilon_0^2}\right) \end{aligned}$$

が得られ、これをさらに変形し

$$\exp\left(N^2 \phi^2 \frac{E_0^2}{\epsilon_0^2}\right) = \frac{\lambda_m}{h_{im}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N\phi}{\epsilon_0}$$

が得られるから、これを E_0 について解くと

$$E_0 = \frac{N\phi}{\epsilon_0} \sqrt{\ln\left(\frac{\lambda_m}{h_{im}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{N\phi}{\epsilon_0}\right)}, \quad (\text{A.43})$$

を得る。

A.12 仮想熱伝達係数 h_{im}, h_{iS} の決定

最後に、仮想的な熱伝達係数 h_{im}, h_{iS} を決定する。鋳型/溶湯界面 ($x' = 0$) での熱伝達収支 (図 5 参照)

$$h_{im}(T_i - T_0) = h_{iS}(T_f - T_i)$$

より

$$\frac{h_{iS}}{h_{im}} = \frac{T_i - T_0}{T_f - T_i}, \quad (\text{A.44})$$

が得られる。また、全体的な鋳型と溶湯の間での熱伝達収支を考えると

$$h_{im}(T_i - T_0) = h_i(T_f - T_0)$$

である。よって

$$\frac{h_i}{h_{im}} = \frac{T_i - T_0}{T_f - T_0}, \quad (\text{A.45})$$

であるから、この右辺に (A.27) 式を適用すると

$$h_{im} = \left[1 + \frac{\operatorname{erf}(\phi)}{M}\right] h_i, \quad (\text{A.46})$$

を得る。また、(A.44), (A.45) 式より

$$\begin{aligned} \frac{h_{iS}}{h_i} &= \frac{h_{iS}}{h_{im}} \cdot \frac{h_{im}}{h_i} \\ &= \frac{T_i - T_0}{T_f - T_i} \cdot \frac{T_f - T_0}{T_i - T_0} \\ &= \frac{T_f - T_0}{T_f - T_i} \end{aligned}$$

この最右辺に (A.31), (A.32) 式を適用すると

$$\frac{h_{iS}}{h_i} = \frac{T_f - T_0}{T_f - T_i} = \left[1 + \frac{M}{\text{erf}(\phi)} \right].$$

したがって,

$$h_{iS} = \left[1 + \frac{M}{\text{erf}(\phi)} \right] h_i, \quad (\text{A.47})$$

が得られる.

記号

C_P	定積比熱 (J/kg K)
E_0	仮想系での鋳型側付着初期固相厚さ (m)
ϵ	実系での固相厚さ (m)
ϵ'	仮想系での固相厚さ (m)
ϵ_0	仮想系での金属側付着初期固相厚さ (m)
h_i	金属/鋳型間の熱伝達係数 (J/m ² K s)
h_{im}	金属/鋳型間で鋳型側熱伝達係数 (J/m ² K s)
h_{iS}	金属/鋳型間で金属側熱伝達係数 (J/m ² K s)
L	金属の融解潜熱 (J/kg)
λ	熱伝導度 (J/s m K)
ϕ	無次元凝固定数

t	実系での時間 (s)
t'	仮想系での時間 (s)
t_0	仮想系に設定された初期時間 (s)
T_f	金属の溶融温度 (K)
T_i	金属/鋳型界面での不変仮想温度 (K)
T_{im}	鋳型/金属界面での鋳型温度 (K)
T_{iS}	鋳型/金属界面での金属温度 (K)
T_0	初期鋳型温度 (周囲温度) (K)
x	実系での金属/鋳型界面からの距離 (m)
x'	仮想系での金属/鋳型界面からの距離 (m)

参考文献

- [1] A. Garcia, T.W. Clyne and M. Prates: METALLURGICAL TRANSACTIONS B, Vol. 10B (1979) pp.85-92
- [2] A. Garcia and M. Prates: METALLURGICAL TRANSACTIONS B, Vol. 9B (1978) pp.449-457
- [3] T.W.Clyne et.al. : Metals February 1982 pp.34-39