メモ：Legendre 関数の母関数

伊藤榮信

2012 年 6 月 7 日

1 Legendre 母関数

Legendre 関数は以下の式で定義される：

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{s!(n-s)!(n-2s)!}z^{n-2s}. \tag{1}$$

ここで $[n/2]$ は n が偶数ならば整数 $n/2$ で，n が奇数ならば整数 $(n-1)/2$ をあらわす．例えば，$n = 1, 2, 3$ ならば

$$P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$$

となる．r_0 に電荷 (- 1) がある場合の r における静電ポテンシャル ϕ を考えた場合 (詳細な定数等は省略する)，Legendre 関数の初等的説明では母関数という形でたいてい直ぐに次の関係式が現れる

$$\phi(r) = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_0\cos\theta + r_0^2}}$$

$$= \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r_0}{r}\cos\theta + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r_0}{r}\right)^n, \tag{2}$$

さて，この式の最右辺に現れる P_n は（1）で定義された Legendre 関数になっているのかという疑問が湧く．以下，この一致を確認してみる．ここでの証明は数学的には一般性を欠くが直感的な分かりやすさを優先してみる．

$t = r_0/r$，$z = \cos\theta$ とすると（2）式は

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2tz + t^2}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n, \tag{3}$$

と書かれる．$r_0 < r$ としているので $0 < t < 1$ であり，また $|z|$ □ 1 である．今後の議論を進めやすくするために $t \ll 1$ とする．更に，

$$x = 2tz - t^2 \tag{4}$$

とすると

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} \tag{5}$$

と書き換えられる．何故，$\sqrt{1-x}$ とマイナス符合にしたかは後で分かる．(5) 式を形式的に Taylor 展開すると

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{7}{2}\frac{x^4}{4!} + \cdots + \tag{6}$$

となる．このように x の前に負号を付けて置けば，マイナスの指数で微分する場合，その度ごとにマイナスを相殺できる．(6) 式の第 k 項は

$$\frac{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{2^k 2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\frac{x^k}{k!}$$

であるから，これを少し整理すると

$$\frac{(2k)!}{2^{2k}k!k!}\frac{x^k}{k!} \tag{7}$$

となるので，すなわち

$$\frac{1}{r}(1-x)^{-1/2} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!k!}x^k \tag{8}$$

と Taylor の公式を書くことができる（剰余項は省略）．(4) 式の前で $t \ll 1$ を仮定したのは上記の展開で x が収束円内入っていて欲しかったからである．例えば (4) 式で，$z=-1$ として $t \to 1$ にすると $x \sim (-3)$ となって上記の展開の収束性が怪しくなる[1]．このような混乱を避けるため $t \ll 1$ とした．ここでの方法が数学的に一般性を欠く点はここにある．

以上を断わった上で (8) 式の x^k について議論を進める．2 項定理より

$$x^k = t^k(2z-t)^k = t^k\sum_{s=0}^{k}{}_kC_s(2z)^{k-s}t^s(-1)^s$$

$$= \sum_{s=0}^{k}\frac{k!}{s!(k-s)!}t^{k+s}(-1)^s(2z)^{k-s} \tag{9}$$

である．これを (8) 式に代入すると

$$\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{k}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!k!}\frac{k!}{s!(k-s)!}t^{k+s}(-1)^s(2z)^{k-s}$$

[1] $x=-t^2+2tz$ を t に関する 2 次関数と考えれば，$z \geq 0$ の場合，軸は t の正側にあるから最大値は $x=-t^2+2tz$ の軸上で 1 よりも小さい．また最小は $z=0$ のとき $t \to 1$ で $x \to -1$ である．しかし，$z<0$ の場合，軸は t の負側にあるのでで x の最小は $0<t<1$ の $t \to 1$ で $x > -1$ となる可能性がある．実際，$z=-1$ とするなら $t \to 1$ で $x \to -3$ となる．因みに，$0 \,\square\, \theta \,\square\, \pi$ に対し，$|x|<1$ に収めるには $t < \sqrt{2}-1 \approx 0.41$ ぐらいが限界である．

であり，また $k+s=n$ とすると $k=n-s$，$k-s=n-2s$ となるから

$$\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^n(n-s)!s!(n-2s)!}z^{n-2s}t^n \tag{10}$$

が得られる．ここで z の最低次数はゼロであるから s に関する和は $s=n/2$ までで $k=n-s=0$ であるから k に関する和は $n=0$ からとした．よって，Legendre 関数の定義式（1）によれば

$$\frac{1}{r\sqrt{1-2tz+t^2}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n, \tag{11}$$

となることが分かる．

2　Legendre関数の漸化式の利用

$t\ll 1$ という条件をつけないで（3）式の関係を示すことができないだろうか．それを試みるために，まず Legendre 母関数の関係式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n, \tag{12}$$

から，これから示す漸化式を導出する．問題の設定上，この段階で $P_n(z)$ が何であるかは分からない．(12) 式を t について微分すると

$$\frac{z-t}{(1-2tz+t^2)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(z)t^{n-1}, \tag{13}$$

さらにこの式の両辺を (12) 式で割ると

$$\frac{z-t}{(1-2tz+t^2)}=\frac{\sum nP_n(z)t^{n-1}}{\sum P_n(z)t^n}, \tag{14}$$

が得られる．この式の分母を払うと

$$(z-t)\sum P_n(z)t^n=(1-2tz+t^2)\sum nP_n(z)t^{n-1} \tag{15}$$

となるが，例えば t^n についての係数に着目すると

$$zP_n-P_{n-1}=(n-1)P_{n-1}-2znP_n+(n+1)P_{n+1} \tag{16}$$

を得る．これを整理すれば

$$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)zP_n+nP_{n-1}=0 \tag{17}$$

という漸化式が得られる．

つまり，この漸化式を Legendre 関数の定義式（1）が満たすならば（3）式

を示したことになる．すなわち（1）を (17) 式に代入してゼロとなることが分かればよい．Legendre 関数の定義式（1）は

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^s(2n-2s)!}{s!(n-s)!(n-2s)!}z^{n-2s},$$

であるが，漸化式の各々対応する項は

$$P_{n+1}(z) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{s=0}^{[(n+1)/2]}\frac{(-1)^s(2n-2s+2)!}{s!(n-s+1)!(n-2s+1)!}z^{n+1-2s} \tag{18}$$

$$zP_n(z) = \frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^s(2n-2s)!}{s!(n-s)!(n-2s)!}z^{n+1-2s} \tag{19}$$

$$P_{n-1}(z) = \frac{1}{2^{(n-1)}}\sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^s(2n-2s-2)!}{s!(n-s-1)!(n-2s-1)!}z^{n-1-2s} \tag{20}$$

となる．ここで次数 z^{n+1-2s} に着目するため (20) 式の z のべき指数をこれに合わせる．すなわち，この式で $s \to s-1$ とすると，

$$P_{n-1}(z) = \frac{1}{2^{(n-1)}}\sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^{s-1}(2n-2s)!}{(s-1)!(n-s)!(n-2s+1)!}z^{n+1-2s} \tag{21}$$

となる．こうして z^{n+1-2s} の各々の係数を抽出すると

$$P_{n+1} \longrightarrow \frac{2n-2s+1}{n-2s+1}\times\frac{1}{2^n}\frac{(-1)^s(2n-2s)!}{s!(n-s)!(n-2s)!},$$

$$zP_n \longrightarrow 1\times\frac{1}{2^n}\frac{(-1)^s(2n-2s)!}{s!(n-s)!(n-2s)!},$$

$$P_{n-1} \longrightarrow \frac{-2s}{n-2s+1}\times\frac{1}{2^n}\frac{(-1)^s(2n-2s)!}{s!(n-s)!(n-2s)!}$$

が得られるので，これを漸化式 (16) へ代入すると z^{n+1-2s} の係数の和は

$$\frac{(n+1)(2n-2s+1)-(2n+1)(n-2s+1)+n(-2s)}{n-2s+1} = 0, \tag{22}$$

となり，分子を計算すればゼロであることが分かる．よって，Legendre 母関数から得られた漸化式 (17) を Legendre 関数の定義式（1）が満たしているのであるから，(3) 式の最右辺に現れる P_n は Legendre 関数であることが分かった．

参考文献

石津　武彦，佐藤正千代，金子尚武　編集:「応用数学演習２」　培風館 (1969)
http://recca-hokkaido.sci.hokudai.ac.jp/ inaz/doc/B/gfd/node62.html