平面ポアズイユ流，境界層流れ，Falkner-Skan 流れの中立安定曲線

伊藤榮信

2017 年 2 月 11 日

要旨 平面ポアズイユ流，層流境界層流れそして Falkner-Skan 流れに対する中立安定曲線を数値的に求め，曲線の上側漸近枝に極小極大（または kink）があることを示した．平面ポアズイユ流に対してはスペクトル法に関連する方法を用い，また半無限領域での境界層流れ，Falkner-Skan 流れに対しては流れを有限領域に写像した後，これに前述の方法を適用した．スペクトル法に関連する方法とは流れに垂直な方向を離散化し，その離散点で Orr-Sommerfeld 方程式内の微分演算子を Chebyshev Differentiation Matrix に置き換えることで，全体を一般化固有値問題へと帰着するものである．ここで一般化固有値問題の数値解法には Scilab ソルバーを使用した．
abstract Neutral stability curves for plane Poiseuille flow, laminar boundary-layer flow and Falkner-Skan flow were obtained numerically and showed that there is a local minimum-maximum (or a kink) on the upper branch of the curve. For the plane Poiseuille flow, the method related to Spectral methods was used, and for the boundary-layer flow and for the Falkner-Skan flow in the semi-infinite regions, the flows were mapped to each finite region, and the above-described method was applied to those flows. The above-mentioned method related to Spectral methods is a method which discretizes the direction perpendicular to the flow and replaces the differential operators in the Orr-Sommerfeld equation with the Chebyshev Differentiation Matrices at those discrete points, thereby reducing the whole to the generalized eigenvalue problems. Here, Scilab freeware-solver was used for numerical solution of generalized eigenvalue problem.

1 はじめに

主流 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ が安定であるかどうか，言い換えれば流れが乱流へと遷移するかどうかの判定は流れに微小な攪乱を与えたとき，その攪乱が時間とともに成長するか（すなわち不安定→乱流），消滅するか（安定）という考えによりなされる．これを定式化したのが Orr-Sommerfeld 方程式 [1]（以下 O-S 方程式と略）である．なお攪乱が時間的に成長も消滅もしない場合は中立安定となる．

波数 α とレイノルズ数 R をパラメターとする O-S 方程式により，(R, α) 平面内に中立安定曲線は表されるが，本稿の目的は Navier-Stokes 方程式の厳密解である平面ポアズイユ流，平板上境界層流れそして Falkner-Skan 方程式 [2] の流れに対し，この曲線を求めることである．

中立安定曲線を求めるためにここでは，スペクトル法（Spectral Method ）に関連する微分演算行列 Chebyshev Differentiation Matrix[3]（以下，CDM と略記）を使用する．その手順とは O-S 方程式で流れ方向に直交する方向を離散化し，さらに方程式内部の導関数を CDM で置き換え行列型の方程式を導き，この行列方程式を一般化固有値問題へと帰着する．得られた固有値虚部の符号が変化する点を見つけ，これによりポアズイユ流と境界層流れの中立安定曲線を求める．これら一連の固有値問題の数値的解法はフリーウェア Scilab により行った．

本手法によればポアズイユ流の中立安定曲線に対しては，数値的に厳密な曲線を得ることができる．また，

平板上の境界層流れの場合，平板上の流れに垂直な方向は無限遠まで延びるが，この CDM による手法に適合させるためこの領域を有界な領域に写像する方法をとる．

これらの中立安定曲線には曲線上側漸近枝に極小極大が発生しており，これは Healey の論文 [4] でも指摘されている．当該論文ではこの極小極大を kink と呼び，これは曲線を求める際に使用される Tietjens 関数の特異点を囲む小さなループによるものであるが，広範囲の安定性問題に現れる a robust feature としている．

さて Schlichting は上記文献 [2] の第 17 章で境界層外部の流れに正の圧力勾配がある場合に触れ，この境界層流れの速度プロフィールは変曲点を持つ流れとなることを示した上で以下のことを行った．変曲点を持つ境界層流れを Schlichting は 6 次の多項式で近似的に構成し，これに対する中立安定曲線を求めた．一方，一般的な境界層流れとされる Falkner-Skan 方程式により表される流れは方程式内のパラメターにより変曲点を持たない流れにも変曲点を持つ流れにもなる．この変曲点を持つ解を使用するならば，Schlichting の近似解によるものとは異なり，より正確な中立安定曲線を議論できる．この立場から Wazzan 等 [5] は Falkner-Skan 流れの中立安定曲線を数値的に導出しているが，ここでは中立安定曲線上の kink も含めた観点から再度議論した．

Schlichting 以前に，変曲点を持つ非粘性流れに対して Rayleigh は重要な研究を行い，重要な定理を得ている．O-S 方程式から粘性項を無視した方程式が Rayleigh 方程式であり，従ってこの方程式は非粘性流れの安定性を議論する方程式である．本稿でもこの方程式の固有値という視点から安定性の議論を簡単に行った．

本稿の構成を記す．まず第 2 節で O-S 方程式を紹介する．第 3 節では CDM を定義し，さらに O-S 方程式を一般化固有値問題へと帰着する．こうして得られた固有値の結果と公開されている結果との比較を行い，本手法の有効性を確認する．今回行った方法は Trefethen[3] の 14 章で議論された方法そのものであるが，この手法を基に新たに平面ポアズイユ流の詳細な中立安定曲線を描いた結果，レイノルズ数 $R \sim 1.0 \times 10^8$ 付近に kink が捕らえられた．第 4 節では同じ手法を境界層流れに適用し，中立安定曲線を求めたところ，排除厚さで定義されるレイノルズ数 $R^* \sim 1.0 \times 10^5$ 付近に同じく kink が捕らえられた．第 5 節では Falkner-Skan 方程式により，速度プロフィールに変曲点を持つ流れなどさまざまな流れに対する中立安定曲線を求めたが，やはり kink の発生を確認できる．最後に変曲点を持つ非粘性流れの安定性に対し，Rayleigh 方程式という観点から議論する．

2　O-S (Orr-Sommerfeld) 方程式

流体の流れは Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{1}$$

で表される．ここで $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ と $p = p(\boldsymbol{x}, t)$ は流体の速度と圧力，ρ と ν は流体の密度と動粘性である．更に，流体は非圧縮性であるとするので $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ が成立する．

流れの安定性を判定するために微小攪乱 $\hat{\boldsymbol{u}} = (u, v, w)$ を主流に挿入するので全流速は $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \hat{\boldsymbol{u}}$ と表される．ここで $\boldsymbol{U}$ は主流であり

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = (U(y), 0, 0), \tag{2}$$

と限定する．この形の主流 $\boldsymbol{U}$ を流速 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \hat{\boldsymbol{u}}$ に代入し，さらにこの流速を (1) に代入，2 度の回転や微小攪乱の 2 乗を無視するなど若干面倒な手続きを経たのち，方程式の y 成分は v のみの方程式となり

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 v - \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}y^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \nu \nabla^4 v = 0 \tag{3}$$

を得る．

ここで，全体を無次元化するため代表的な長さ $\mathcal{L}$ と代表的な速度 U_0 を用いて以下の無次元量を導入する：

$$\bar{x} = \frac{x}{\mathcal{L}},\ \ \bar{y} = \frac{y}{\mathcal{L}},\ \ \bar{z} = \frac{z}{\mathcal{L}},\ \ \bar{t} = \frac{U_0}{\mathcal{L}}t,\ \ \bar{U}(\bar{y}) = \frac{U}{U_0}, \tag{4}$$

これまでは 3 次元流れを考えてきたが，Squire の定理（文献 [1] § 2.4 参照）によれば先ずは 2 次元の攪乱を考察すればよいことが分かっている．よって 2 次元攪乱を仮定し，すなわち微小攪乱を $\hat{\boldsymbol{u}} = (u, v)$ で表す．

微小攪乱の無次元 y 成分 $\bar{v}=v/U_0$ は $\bar{x}$ 方向に周期的であるとし $\bar{v}\propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\bar{x}}$ を，また時間に関し $\bar{v}\propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha c\bar{t}}$ を仮定する．ここで α は無次元波数であり，c は後に定義する複素数とする．さらに $\bar{y}$ 方向依存性を $\phi(\bar{y})$ で表すと最終的に $\bar{v}=\phi(\bar{y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\bar{x}-c\bar{t})}$ となり，(4) の無次元量を考慮し (3) を表すと以下の O-S 方程式を得る：

$$\mathrm{i}\alpha\left[(\bar{U}-c)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\bar{y}^2}-\alpha^2\right)-\frac{\mathrm{d}^2\bar{U}}{\mathrm{d}\bar{y}^2}\right]\phi-\frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\bar{y}^2}-\alpha^2\right)^2\phi=0 \tag{5}$$

ここで R はレイノルズ数で $R=U_0\mathcal{L}/\nu$ で定義される．ϕ に対する境界条件は粘着条件 $v=0$ と非圧縮条件から得られ $\bar{y}$ の境界 $\bar{y}=\bar{y}_1,\bar{y}_2$ で以下を満たすことである：

$$\phi(\bar{y})=\frac{\mathrm{d}\phi(\bar{y})}{\mathrm{d}\bar{y}}=0. \tag{6}$$

$\bar{v}$ の仮定の際に導入した複素数 c を $c=c_r+\mathrm{i}c_i$ とすると，c の虚部 c_i が正の値をとった場合，微小攪乱 v は時間とともに増大するということになる．

Rayleigh 方程式は (5) 式で $\alpha R\to\infty$ とすることで得られ

$$\left[(\bar{U}-c)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\bar{y}^2}-\alpha^2\right)-\frac{\mathrm{d}^2\bar{U}}{\mathrm{d}\bar{y}^2}\right]\phi=0. \tag{7}$$

境界条件は $\phi(\bar{y}_1)=\phi(\bar{y}_2)=0$ である．

3 ポアズイユ流の中立安定曲線

3.1 CDM (Chebyshev Differentiation Matrix)

CDM はスペクトル（選点）法に関連するものであるが，この CDM については Trefethen の “Spectral Methods in MATLAB”[3] に記されている．

領域 $-1\leq y\leq 1$ に $N+1$ 個の離散点を「不等間隔」に

$$y_j=\cos\frac{j\pi}{N},\qquad j=0,1,\cdots,N \tag{8}$$

と割り振り生成される点集合を Gauss-Chebyshev-Lobatto points もしくは第 2 種 Chebyshev 点という (以下，GCL 点と略).

さて，関数 $\psi(y)$ の GCL 点上での値を ψ_j とすると

(i) p を $p(y_j)=\psi_j$，$0\leq j\leq N$．を満たす，N 次以下の多項式とし（∵p は ψ_j を補間する多項式)，また
(ii) $w_j=p'(y_j)$ 　 ($'\equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}y$)
とする．
このとき

$$w=D_N\psi$$

となる $(N+1)\times(N+1)$ の行列 D_N が求めらており，CDM という [3]．CDM の要素は以下のように定義される：

$$D_{00}=\frac{2N^2+1}{6},\quad D_{NN}=-\frac{2N^2+1}{6},$$
$$D_{ii}=\frac{-y_i}{2(1-y_i^2)},\ \ i=1,...,N-1, \tag{9}$$
$$D_{ij}=\frac{c_i}{c_j}\frac{(-1)^{i+j}}{(y_i-y_j)},\ \ i\neq j,\ \ i,j=1,...,N-1,$$
$$c_i=\begin{cases}2, & i=0\ \text{or}\ N,\\ 1 & \text{それ以外}\end{cases}$$

行列 CDM の上記各要素の導出は以下のファイルを参照されたい：
https://micronanopi.net/newSUKIMA/Chebyshev/CDM/DerivationCDMinB.pdf
２階の導関数は行列 D_N の行列の積 $\psi'' = D_N(D_N\psi) = D_N^2\psi$ で計算することができる．

3.2 O-S 方程式の離散化と一般化固有値問題

中立安定曲線を描くための CDM の有効性確認はこの節の目的の一つである．無次元化されたポアズイユ流 $\bar{U}(\bar{y})$ は $\bar{U} = 1 - \bar{y}^2$ で表され，この流れの定義域は $-1 \le \bar{y} \le 1$ である．この領域を GCL 点

$$\bar{y}_j = \cos\frac{j\pi}{N}, \qquad j = 0, 1, \cdots, N \tag{10}$$

で離散化する．更に無次元式である O-S 方程式を

$$\mathrm{i}\alpha\left[(\bar{U} - c)(\phi'' - \alpha^2\phi) - \bar{U}''\phi\right] \quad = \frac{1}{R}(\phi^{(4)} - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi) \tag{11}$$

と書き改める．また定義域の離散化にともない $\phi(\bar{y})$ を列ベクトル $(\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_N)^{\mathrm{T}}$ とする．上記 O-S 方程式で複素速度 c を含む項を右辺に移項し，含まない項を左辺に集め，D_N を用いると

$$\left[\frac{1}{R}(D_N^4 - 2\alpha^2 D_N^2 + \alpha^4\mathbf{I}) - \mathrm{i}\alpha\bar{U}(D_N^2 - \alpha^2\mathbf{I}) \quad + \mathrm{i}\alpha\bar{U}''\mathbf{I}\right]\phi = -\mathrm{i}\alpha c(D_N^2 - \alpha^2\mathbf{I})\phi \tag{12}$$

を得る．ただし $\mathbf{I}$ は単位行列である．この方程式の両辺は既に $(N+1, N+1)$ 行列と $N+1$ 成分の列ベクトルとの積になっている．よって $(N+1, N+1)$ 行列 A, B を

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv \left[\frac{1}{R}(D_N^4 - 2\alpha^2 D_N^2 + \alpha^4\mathbf{I}) - \mathrm{i}\alpha\bar{U}(D_N^2 - \alpha^2\mathbf{I}) + \mathrm{i}\alpha\bar{U}''\mathbf{I}\right], \\ B &\equiv -\mathrm{i}\alpha(D_N^2 - \alpha^2\mathbf{I}) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

で定義するならば O-S 方程式 (12) は

$$A\phi = cB\phi$$

と書けるから，c を固有値とする一般化固有値問題

$$A = cB \tag{14}$$

に帰着された．なお，Rayleigh 方程式の場合，(7) より

$$\left.\begin{aligned} \hat{A} &\equiv \bar{U}(D_N^2 - \alpha^2\mathbf{I}) - \bar{U}''\mathbf{I}, \\ \hat{B} &\equiv D_N^2 - \alpha^2\mathbf{I} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

である．一般化固有値問題の解法には Scilab ソルバー spec(A,B) を使用した．

以下 Trefethen[3] が “a simple trick” と呼ぶ方法，すなわち

$$\phi(\bar{y}) = (1 - \bar{y}^2)q(\bar{y}) \tag{16}$$

と置き換えたことを注記しておく．これにより $\mathrm{d}^4\phi/\mathrm{d}\bar{y}^4$ は

$$\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}\bar{y}^4} = (1 - \bar{y}^2)\frac{\mathrm{d}^4 q}{\mathrm{d}\bar{y}^4} - 8\bar{y}\frac{\mathrm{d}^3 q}{\mathrm{d}\bar{y}^3} - 12\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}\bar{y}^2} \equiv \hat{D}^4 q(\bar{y}) \tag{17}$$

と変更され，また

$$\phi'(\bar{y}) = (1 - \bar{y}^2)q'(\bar{y}) - 2\bar{y}q(\bar{y}) \tag{18}$$

であるから，$q(\pm 1) = 0$ であるならば，$\phi'(\pm 1) = 0$ となる．$q(y) = \phi(y)/(1 - y^2)$ は，プログラム内では $S(y) = 1/(1 - y^2)$ とし $q(y) = S(y)\phi(y)$ と書いて $S(\pm 1) = 0$ とする．

GCL 点での未知の関数 $q(\bar{y})$ の値により構成されるベクトルを $\boldsymbol{Q}$ とすると，$\boldsymbol{Q}$ は ϕ_i と $(N+1,N+1)$ 行列 S により

$$Q_i = \frac{\phi_i}{1-\bar{y}_i^2} = S_{ij}\phi_j, \quad S_{ij} = \frac{1}{1-\bar{y}_i^2}\delta_{ij} \tag{19}$$

と書ける（δ_{ij} は Kronecker の δ）．よって

$$\hat{D}^4\boldsymbol{Q} = \hat{D}^4 S\phi, \tag{20}$$

となる．これらから行列型の O-S 方程式

$$\left[\frac{1}{R}(\hat{D}^4 S - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4\mathbf{I}) - 2\mathrm{i}\alpha\mathbf{I} - \mathrm{i}\alpha(1-\bar{y}^2)\mathbf{I}(D^2-\alpha^2\mathbf{I})\right]\phi = c\left[-\mathrm{i}\alpha\,(D^2-\alpha^2\mathbf{I})\right]\phi \tag{21}$$

を得る．ここで $D_N^i \equiv D^i$ などを使った．なお，Trefethen[3] にも記されているように D^2 に対しては $\hat{D}^4$ に対して行った操作はしない．

行列 A と B は $(N+1,N+1)$ 行列であるが，境界条件より $\phi(\pm 1)=0$ であるから，A と B の第 1 列と第 $N+1$ 列を落とし，また未知数は $N-1$ 個であるのに対し $N+1$ の方程式があるから第 1 行と第 N 行を落としている．よって，行列 A と B は $(N-1,N-1)$ 行列に縮小される．

行列の縮小化など今回の Trefethen の手法の詳細は Trefethen[3] 第 7，13，14 章に記されている．

3.3　ポアズイユ流に対する数値結果と中立安定曲線

Thomas(1953) や，Orszag[6]，Dongarra etal,[7] の研究に従い，$R=10000$，$\alpha=1$ に対するベンチマークテストとしての固有値計算を行った．表 **1** はその結果である：使用した GCL 点は $N=200$ として生成し

表 1　固有値に対する数値実験結果

Thomas	$c = 0.23750060 + 0.00359250\mathrm{i}$
Orszag	$c = 0.23752649 + 0.00373967\mathrm{i}$
Dongarra　etal.	$c = 0.23752708 + 0.00373980\mathrm{i}$
今回の結果	$c = 0.23752666 + 0.00373946\mathrm{i}$

た点である．

またこの場合の固有値の分布を図 1 に示した．横軸が固有値 c の実部であり，縦軸は虚部である．

過去の研究によれば平面ポアズイユ流の臨界レイノルズ数は 5300 で $\alpha = 1.02$ であるとされていたが，Orszag[6] は臨界レイノルズ数 R_c と臨界の α_c は

$$R_c = 5772.22, \quad \alpha_c = 1.02056 \pm 0.00001$$

としている．これに対する固有値と Scilab による結果をやはりベンチマークテスト結果とし表 **2** に記す（Scilab では $N=200$ とした）．中立安定曲線を求めるために次の手順を実行する．まず α_0 を固定して，レイノルズ数 R をある値 R_{init}（整数）から 1 づつ増大させる．このとき各 R に対する固有値を求め，その虚部の符号が変化する R_0 を探索し，その点を (R_0,α_0) とする．次に $\alpha_1 = \alpha + h_\alpha$ と増大させ再度 R を 1 づつ増大させながら，固有値虚部が変化するレイノルズ数 R_1 を求め (R_1,α_1) とする．これを繰返すことで中立安定曲線を求める．$0.1 \le \alpha \le 1.0$ に対しては $h_\alpha = 0.05$ で，また $1.01 \le \alpha \le 1.09$ では $h_\alpha = 0.01$ で $1.091 \le \alpha \le 1.094$ では $h_\alpha = 0.001$ として，中立安定曲線を求め，それを図 2 に示した[*1]．図で横軸はレイノルズ数，縦軸は α の値である．また，図 3 は上側漸近枝上 kink を拡大したものであるが，極小から極大へ

[*1] 図 2 ではレイノルズ数 $R = 1.0\times 10^9$ までを示したが，$R > 2.52\times 10^9$ の不安定領域内には空洞のような形状で安定領域が発生している．A.G. Walton[8] はパイプ内のポアズイユ流れで同様の空洞が発生することを指摘している．

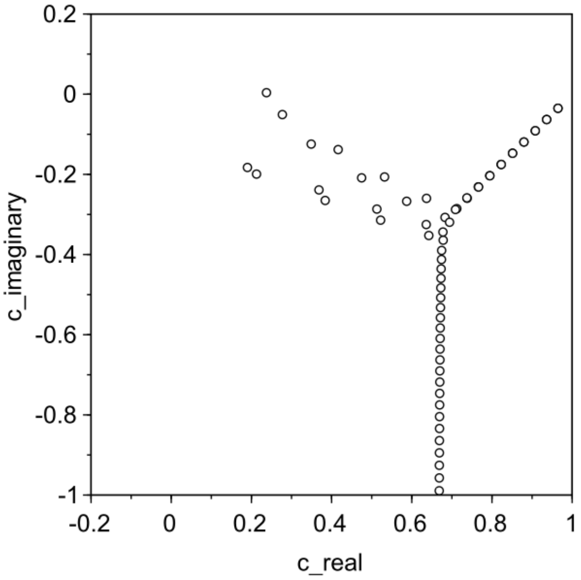

図 1　$R = 10000, \alpha = 1.0, N = 200$ に対する固有値の分布

表 2　臨界レイノルズ数とその固有値（$\alpha = 1.02056$）

$R = 5772.22$	
Orszag	$c = 0.26400174 - 1.7 \times 10^{-9}\mathrm{i}$
今回の結果	$c = 0.26400148 - 9.6 \times 10^{-9}\mathrm{i}$
$R = 5772.23$	
Orszag	$c = 0.26400166 + 1.3 \times 10^{-8}\mathrm{i}$
今回の結果	$c = 0.26400166 + 2.2 \times 10^{-8}\mathrm{i}$

向かう曲線前半部分の傾きが負であることが特徴的である（：$0.327 \leq \alpha \leq 0.340$ で R が減少）．その，極小極大は各々座標

$$(R, \alpha) = (107520000 \pm 2430000, 0.326498),$$
$$(R, \alpha) = (114990000 \pm \quad 40000, 0.343330)$$

に現れる．

図 2 でレイノルズ数を一定とした断面での虚部 c_i の挙動を図 4 に示した（すなわち，レイノルズ数 R を一定として α を変化させた場合の固有値 $c = c_r + \mathrm{i}c_i$ の c_i の挙動である）．はなお図中 5.E+07 等の数値はレイノルズ数の値である．

4　層流境界層流れの中立安定曲線

4.1　y 軸方向の無次元化と無次元量

境界層流れの場合，代表的な長さ $\mathcal{L}$ に代わる長さは以下の式で定義される $\delta(x)$ である：

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}, \tag{22}$$

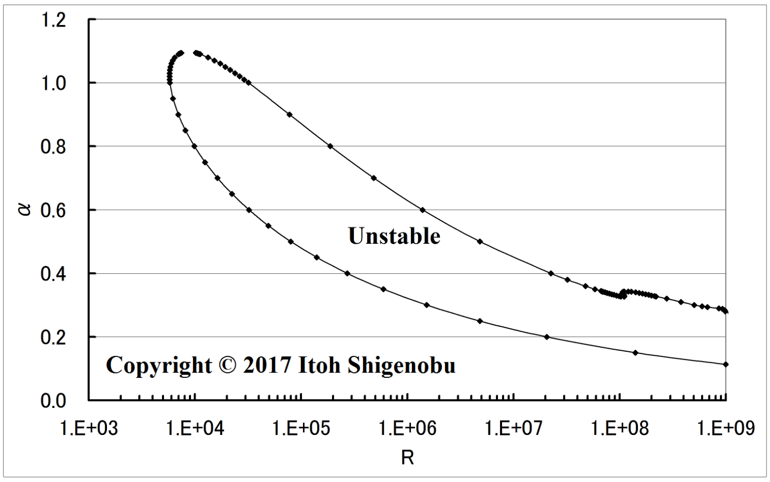

図 2　ポアズイユ流の中立安定曲線

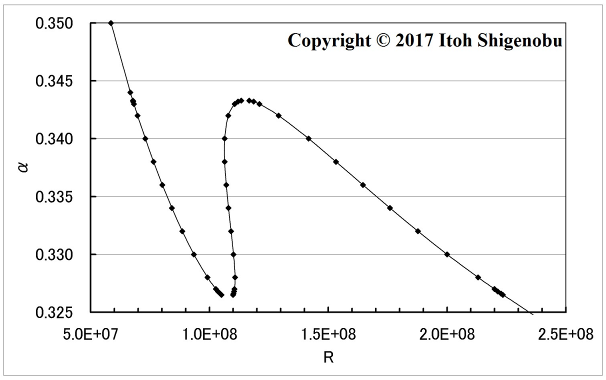

図 3　ポアズイユ流上側漸近枝上の kink

この長さにより y 軸方向長さ y は $\bar{y} = y/\delta(x)$ と無次元化される．ここで，U_0 は無限遠での主流速度で x は境界層先端からの距離である．なお，O-S 方程式 (5) に現れるレイノルズ数はここでは $R = U_0\delta(x)/\nu$ とする．

4.2　半無限領域と CDM

境界層流れの $\bar{y}$ 軸領域は $0 \leq \bar{y} < \infty$ である．したがって，GCL 点を割り振るためにはこの半無限領域を有界な領域へ写像しなければならない．写像関数はいくつか考えられるが，ここでは Theofilis[9] を参考とした．

$$\bar{y} = L\frac{1-\eta}{3+\eta} \tag{23}$$

ここで GCL 点をとる領域を η で表し $-1 \leq \eta \leq 1$ ととった．Theofilis[9] は $L = 50$ としている．$\eta = 1$ で $\bar{y} = 0$（平板上）となる．一方 $\eta = -1$ で $\bar{y} = 50$ であるから無限遠とはならない．しかし，層流境界層の場合，無次元の $\bar{y}$ がおよそ 5 となる点で，速度は無限遠の速度に達するから，$L = 50$ という値は十分遠方と考えることもできる．この値については再度触れる．また例えば，写像関数として $\bar{y} = (1-\eta)/(1+\eta)$ とした場合には $\eta = -1$ で $\bar{y} = \infty$ となり無限遠は達成されるが無限大が発生する．

写像関数 (23) の使用による $\mathrm{d}/\mathrm{d}\bar{y}$ と $\mathrm{d}/\mathrm{d}\eta$ との関係は以下のようになる．なお，表記を簡単にするため，

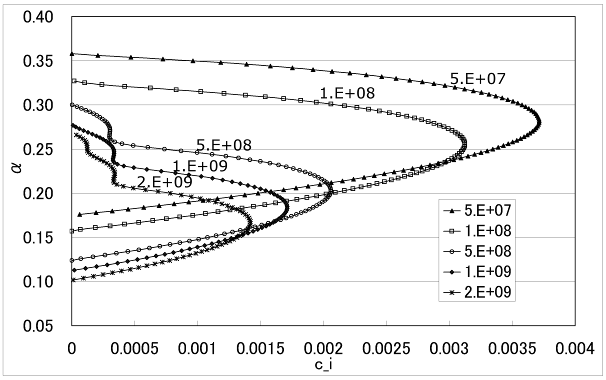

図 4　各レイノルズ数 R での固有値虚部挙動：横 c_i, 縦 α

$\zeta \equiv 3+\eta,\ \ \ell \equiv 4L,\ \ (\mathrm{d}/\mathrm{d}\eta)^i \quad \equiv \mathcal{D}^i$ とした：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{y}} = -\frac{\zeta^2}{\ell}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} = -\frac{\zeta^2}{\ell}\mathcal{D},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\bar{y}^2} = \frac{1}{\ell^2}\left(2\zeta^3\mathcal{D}+\zeta^4\mathcal{D}^2\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\bar{y}^3} = -\frac{1}{\ell^3}\left(6\zeta^4\mathcal{D}+6\zeta^5\mathcal{D}^2+\zeta^6\mathcal{D}^3\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\bar{y}^4} = \frac{1}{\ell^4}\left(24\zeta^5\mathcal{D}+36\zeta^6\mathcal{D}^2+12\zeta^7\mathcal{D}^3+\zeta^8\mathcal{D}^4\right), \tag{24}$$

4.3　層流境界層流れに対する O-S 方程式

層流境界層に対する無次元量の記号法を復習しておく．以下 $\delta(x)=\delta$ と略記し，y 軸方向の無次元座標を

$$\bar{y} = \frac{y}{\delta} = y\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \tag{25}$$

とすると，2 次元境界層内流速 $\boldsymbol{u}=(U,V)$ は

$$U = U_0 f'(\bar{y}), \qquad V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}[\bar{y}f'(\bar{y})-f(\bar{y})] \tag{26}$$

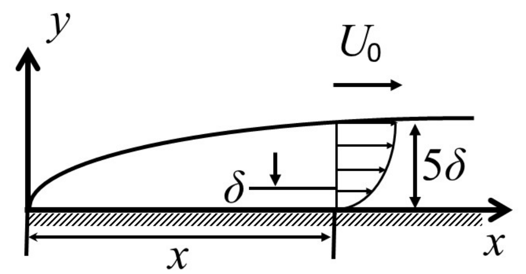

図 5　境界層流れ：U_0 は無限遠での主流速度の大きさ

と表される．また層流境界層方程式は関数 f により

$$2f''' + ff'' = 0, \quad (\ '' \equiv \mathrm{d}^2/\mathrm{d}\bar{y}^2 \text{など}) \tag{27}$$

と書かれる（Blasius 方程式）．したがって，$U/U_0 \equiv \bar{U} = f'$，$\bar{U}'' = f'''$ なので O-S 方程式は

$$\mathrm{i}\alpha\left[(f'-c)(\phi''-\alpha^2\phi) - f'''\phi\right] = \frac{1}{R}(\phi^{(4)} - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi) \tag{28}$$

となる．ただし，$R = U_0\delta/\nu$ である．

4.4 層流境界層 Blasius 解

O-S 方程式には主流 $\bar{U} = f'(\bar{y})$ と $\bar{U}'' = f'''(\bar{y})$ が含まれる．よって，層流境界層を表す非線形 3 階微分方程式 (27) の解が必要となる．今回は次節で触れる Shooting 法による常微分方程式の数値解法により求めたが，例えば文献 [2] にある数値と同じである．$\bar{y}$ の刻み幅は 0.2 とし，これらの点 $\bar{y}_i$ での f_i, f'_i, f''_i を算出し，更に GCL 点におけるそれらの値を補間により求めた．ここでは 20 点を使った Aitken-Neville の反復法により補間値を求めた．以下ここではこの流れを Blasius 境界層と呼ぶ．

4.5 一般化固有値問題への帰着

O-S 方程式 (28) を GCL 点で離散化し，行列の形にする方法はポアズイユの場合と全く同じである．ただ，ここでは無限領域から有界な領域に写像しているので (24) に記したように導関数が複雑になっている．また，今回の数値実験の特徴の一つは (24) 式の $\mathcal{D}^4$ に対して Trefethen[3] による a simple trick (16) 式を適用したことである．したがって，ポアズイユ流の場合と同様に，境界条件が処理されている．なお，プログラム作成では $\bar{U} = f'(\bar{y})$ と $\bar{U}'' = f'''(\bar{y})$ に対しては GCL 点の数だけの対角成分をもつ行列を作り，各対角要素に補間した値を与える．

4.6 境界層流れに対する数値実験結果比較

無限遠の設定値を調べるため写像関数 (23) の L として $L = 50$, 100, 200, 500 の値を採った．Theofilis[9] には $L = 50, N = 128$ のみが記されているが，本稿でも比較のためこのケースを採用した（表 **3** ケース I）．さらに 4 ケースを加え全部で 5 ケースを設定したが，それらを表 3 にまとめる．表中（ ）内の数は境界層内にとられた GCL 点のおおよその数である．

表 3　境界層流れに対する数値実験設定表

	$L=50$	$L=100$	$L=200$	$L=500$
$N=128$	I (49)	*	*	*
$N=256$	II (96)	III (68)	IV (49)	*
$N=384$	*	*	*	V (48)

ケース I に対する結果と他の文献との比較

Theofilis[9], Macaraeg 等 [10] とケース I との比較を表 **4** に示した．表 5 での比較の結果，今回の Scilab 結果は固有値実部虚部共に小数点以下 4 桁目まで他の 2 つとほぼ一致し，少数点以下 5 桁目まで Theofilis（$N = 128, L = 50$）とほぼ一致している．またケース I で $\alpha = 0.179$，$R = 580$ とした場合の固有値分布を図 6 に示した．

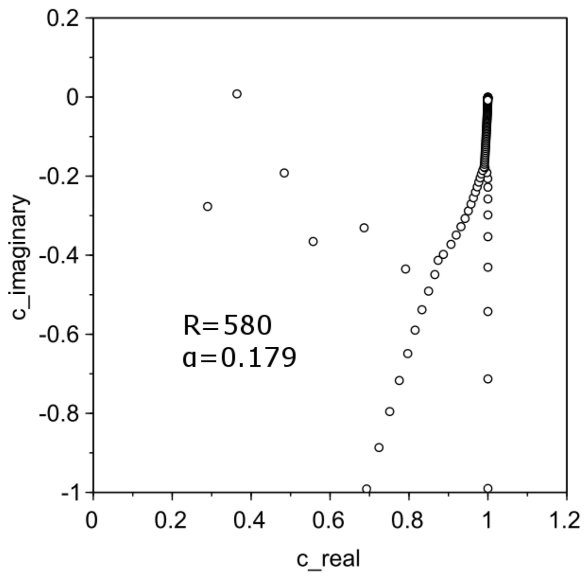

図 6　ケース I の場合の固有値分布

4.7　層流境界層流れの中立安定曲線

ポアズイユ流の場合と同様の方法で中立安定曲線を描いたが，ここでは他の文献 [2] と同様にグラフ縦軸の波数には排除厚さ δ^*（$= 1.7208 \cdot \delta$）で無次元化した目盛りを使用し，横軸レイノルズ数も $R^* = U_0\delta^*/\nu$ としている（図 7，図 8）．なお，Schubauer 等の実験値は「流れの安定性理論」[1] の図 3.10.5 から読み取った．また kink 部を拡大した図 8 の横軸は対数スケールではない．

曲線頂点部の $0.345 \le \alpha^* \le 0.356$ に対しては 0.001 刻みで値を求めた． 図 7 の上側漸近枝（不安定

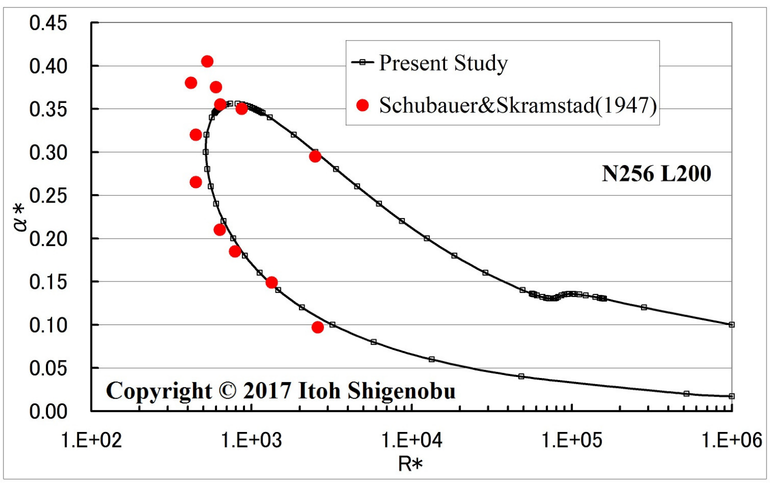

図 7　境界層流れの中立安定曲線

から安定への中立安定曲線）で $0.100 \le \alpha^* \le 0.140$ 区間での刻みは 0.002 とした．計算はこれまで通り $\alpha = \alpha^*/1.7208, R = U_0\delta/\nu$ で実行しており，各ケースでの何点かを表 5 に示した．表 **5** では R はすべて δ によるレイノルズ数を表示しているが，無次元波数については α^* を記述している．表 **5** に示したように全て

表 4　ケース I と他の文献との比較

	$\alpha = 0.179,\quad R = 580$
Macaraeg	$c_1 = 0.3641 + 0.0080\mathrm{i}$
	$c_2 = 0.2897 - 0.2769\mathrm{i}$
	$c_3 = 0.4839 - 0.1921\mathrm{i}$
	$c_4 = 0.5572 - 0.3653\mathrm{i}$
	$c_5 = 0.6862 - 0.3307\mathrm{i}$
Theofilis	$c_1 = 0.3641212880 + 0.0079625034\mathrm{i}$
	$c_2 = 0.2897243201 - 0.2768738567\mathrm{i}$
	$c_3 = 0.4839439094 - 0.1920824050\mathrm{i}$
	$c_4 = 0.5572212338 - 0.3653515279\mathrm{i}$
	$c_5 = 0.6862882375 - 0.3307860195\mathrm{i}$
ケース I	$c_1 = 0.3641229207 + 0.0079597113\mathrm{i}$
	$c_2 = 0.2897144377 - 0.2768665293\mathrm{i}$
	$c_3 = 0.4839294091 - 0.1920673182\mathrm{i}$
	$c_4 = 0.5571929853 - 0.3653411623\mathrm{i}$
	$c_5 = 0.6862869476 - 0.3307141089\mathrm{i}$

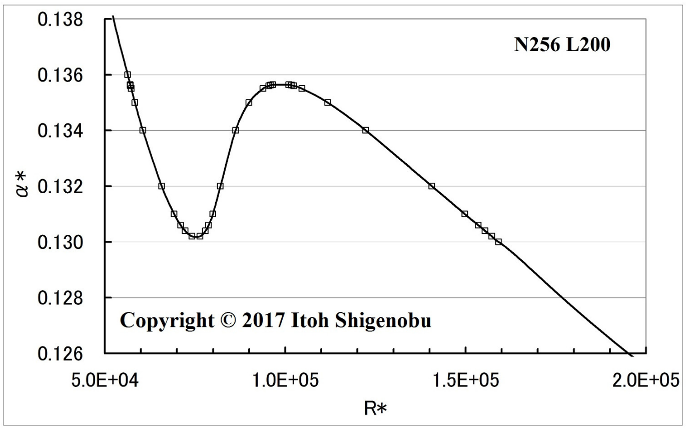

図 8　中立安定曲線図 7 の kink 拡大

のケースで kink が発生していることがわかる．また同表からも分かるように極値には L 依存性が僅かに現れるが，$\alpha^* = 0.13$ 付近では $L \to 500$ で曲線は接近する．

上側漸近枝では $0.18 \le \alpha^* \le 0.36$ の各点で I, II, III, IV, V のケースが一致し[*2]，$0.14 \le \alpha^* \le 0.36$ でケース III, IV, V の曲線は一致する[*3]．

また，下側枝の場合 $0.14 \le \alpha^* \le 0.356$ で全てのケースは一致する[*4]．$\alpha^* < 0.08$ では上側と下側枝で中

[*2] ただし，$\alpha^* = 0.18$ に対してのみはケース I, とケース II は $R = 10756$ となり，ケース III, IV, V では $R = 10759$ となる．なお，$R = U_0\delta/\nu$

[*3] $\alpha^* = 0.14$ に対してのみはケース III で $R = 28750$ となり，その他は $R = 28752$ となる．

[*4] ただし，$\alpha^* = 0.14$ に対してのみはケース I と II では $R = 856$ となり，ケース III, IV, V では $R = 857$ となる．

立安定を表すレイノルズ数 R の値が大きく異なり，L 収束性が悪い．

以上のように，上側漸近枝の場合 $\alpha^* \gtrsim 0.13$ では $L \to 500$ で曲線は収束に向かうと考えられるが，$\alpha^* < 0.1$ では，L の大きさによる曲線の変動が大きい．下側枝の場合にも $\alpha^* < 0.08$ 領域では L の値により曲線は変動する．L を大きくすることにより N の値も増大させなければならないので，PC 性能の問題も浮上し，この領域については今後の課題である．

表 5　曲線上側漸近枝 $\alpha^* \simeq 0.13$ 付近に現れる kink データ

設定値	α^*	R_0	R_1	R_2
ケース I	0.1360	32603	−−	−−
$N = 128$,	0.1355	33168	56326	58586
$L = 50$	0.1350	33756	52837	63974
	0.1300	43160	44443	91545
	0.1280	−−	−−	102822
ケース IV	0.1360	32733	−−	−−
$N = 256$,	0.1355	33308	54522	60798
$L = 200$	0.1350	33905	52261	64976
	0.1302	43088	44377	91380
	0.1300	−−	−−	92482
ケース V	0.1360	32733	−−	−−
$N = 384$	0.1355	33308	54472	60889
$L = 500$	0.1350	33905	52243	65022
	0.1302	43093	44369	91166
	0.1300	−−	−−	92260

ポアズイユ流の場合同様，kink 前後のレイノルズ数 R^* での固有値虚部の挙動を図 9 に示した．

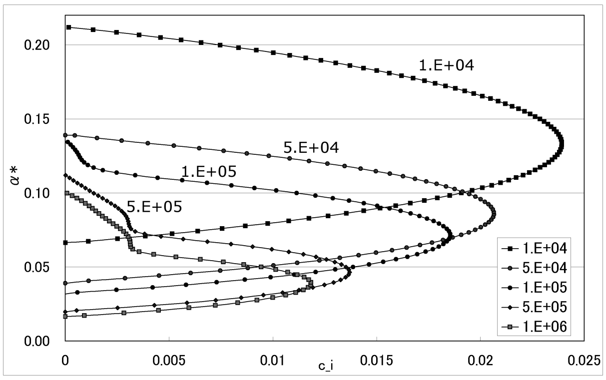

図 9　各レイノルズ数 R^* での固有値虚部挙動：横 c_i, 縦 α^*

4.8 境界層流れの臨界レイノルズ数 $R^*_{\rm criti}$

安定性理論によれば，境界層流れの臨界レイノルズ数 $R^*_{\rm criti}$ は

$$R^*_{\rm criti} = \left(\frac{U_0\delta^*}{\nu}\right)_{\rm criti} = 420 \tag{29}$$

で $\alpha^* = 0.34$ とされていた (Lin(1945)[*5])．しかし，その後 Jordinson[11] は $R^*_{\rm criti} = 520$ という値を発表している．今回の Scilab による中立安定曲線の 2 つのグラフ図 7 から判断して $\alpha^* = 0.3$ が臨界とみられ，このとき $\alpha = 0.174, R = 301$（安定）である[*6]．これを δ^* を使ったレイノルズ数に変換すると $R^*_{\rm criti} = 517.7$ となり Jordinson[11] の 520 に近い値である．なお，この値は I 〜V 全てで同一である（下側枝の一致より）．

5 Falkner-Skan 流れの中立安定曲線

5.1 Falkner-Skan 方程式

Falkner-Skan 方程式

$$f''' + \beta_0 f f'' + \beta(1 - {f'}^2) = 0 \tag{30}$$

は境界層外側流れに圧力勾配が存在する場合（$\beta \neq 0$）の境界層流れを表す方程式である．すなわち境界層内流れの x 方向速度成分を $u(x)$，境界層外側の流れの x 方向速度成分を $U_e(x)$ とした場合，$f' = u/U_e$ で定義される．(30) の導出の詳細は Schlichting[2] の第 8 章に記されている．$\beta_0 \neq 0$ である限り，その値を任意に設定でき以下，$\beta_0 = 1$ とする．また (25) に対応する無次元座標と代表的な長さ δ は

$$\bar{y} = \frac{y}{\delta}: \quad \delta = \sqrt{(2-\beta)\frac{\nu x}{U_e}} \tag{31}$$

で定義され，導関数記号（プライム）はセクション 4 と同じである．境界条件は

$$\bar{y} = 0 \text{ で } f(0) = 0, f'(0) = 0, \quad \bar{y} \to \infty \text{ で } f' \to 1 \tag{32}$$

である．

$\beta \geq 0$ の場合，速度プロフィールは変曲点を持たず，一方 $-0.1988 \leq \beta < 0$ の場合，その速度プロフィールは変曲点を持つ．なお，最小値 $\beta = -0.1988$ は流れに剥離が現れる場合に対応する．ここで取り上げるいくつかの β に対する速度プロフィールを図 10 に示した．横軸は無次元速度の大きさ f' で縦軸は (31) で定義される平板に垂直な方向 $\bar{y}$ である．β の値と記号を図 10 中凡例に記したが，この凡例内の順と図中速度プロフィールの順は上から下へと対応している．

5.2 Shooting 法による数値解の文献との比較

Shooting 法は境界条件 (32)：$\bar{y} = 0$ で $f(0) = f'(0) = 0$ に，s を任意の値とし，$f''(0) = s$ を追加して解く方法である．この s を適切に更新していくことで $\bar{y} \to \infty$ に対して $f' = 1$ となる解を求める．積分には Scilab ソルバー Runge-Kutta4 を用いている．Asaithambi[12] が公表している結果と比較するため β を選び計算し表 **6** に示した．各 β に対し，流れの解として採用した場合の $f''(0) = s$ の値を表示している．

各 β に対する Falkner-Skan 流れの解は $\bar{y}$ を 0.2 刻み幅として Shooting 法により求めた．前のセクションと同様これら $\bar{y}_i = 0.2 * i$, $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ 上の f', f''' の値を GCL 点上に補間した．

[*5] 参考：http://thesis.library.caltech.edu/2696/1/Lin_cc_1944.pdf.

[*6] より正確には $\alpha^* = 0.3035 \pm 0.0045$ で $R = 301$（整数の範囲）．

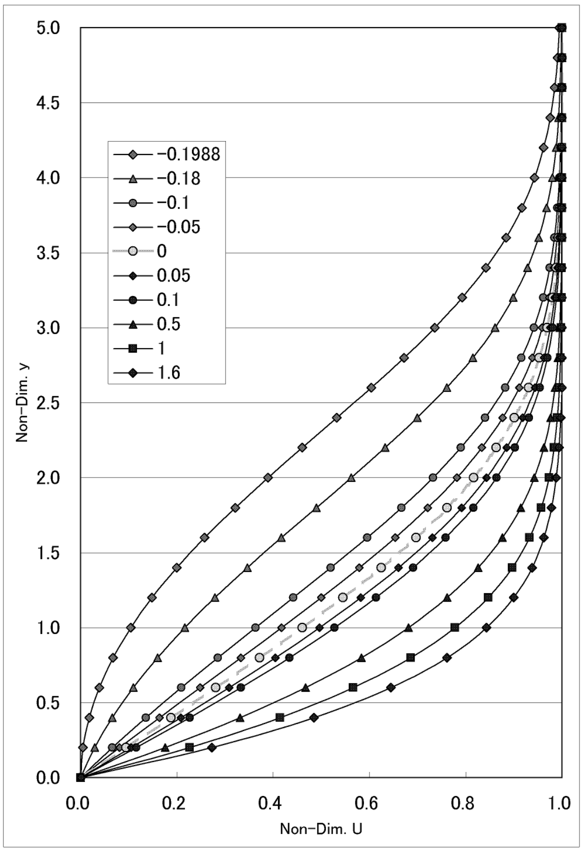

図 10 Falkner-Skan 流れの速度プロフィール

表 6 Shooting 法の結果比較

β	今回の $f''(0)$	Asaithambi$f''(0)$
1.0	1.232594	1.232589
0.5	0.927680	0.927680
0.0	0.469601	0.469600
-0.1	0.319270	0.319270
-0.15	0.216361	0.216361
-0.18	0.128642	0.128637
-0.1988	0.005232	0.005225

5.3 各 β に対する排除厚さ δ^*

前節で境界層の中立安定曲線グラフを作成する際，境界層の厚さを示すパラメターの一つである排除厚さ δ^* を使用したが，ここであらためてこの排除厚さを定義しておく：

$$\delta^* = \sqrt{(2-\beta)\frac{\nu x}{U_e}} \int_0^\infty (1 - f'(\bar{y}))\mathrm{d}\bar{y}$$

$$\equiv \Delta \sqrt{(2-\beta)\frac{\nu x}{U_e}}. \tag{33}$$

したがって β を変化させるごとに境界層流れも変化していくので，それに対応しこの排除厚さも変化する．そのため，ここでは先行的に各 β に対する排除厚さに関連する係数 Δ 計算しておく（表 **7**）．検証用として表中には本議論と直接関係はない，運動量厚さ θ の係数 Θ*7 と $f'(\bar{y}) = 0.9990$ となる $\bar{y}$ を記した（参考 Wazzan 等 [5]）．なお $\bar{y}_\delta$ の計算では $\bar{y}$ の刻み幅を 0.01 としている．

表 7 β に対する排除厚さ係数等

β	Δ	Θ	$\bar{y}_\delta$
1.60	0.5417	0.2481	2.63
1.00	0.6479	0.2923	3.14
0.80	0.6987	0.3118	3.28
0.60	0.7640	0.3359	3.44
0.30	0.9110	0.3858	3.75
0.10	1.0803	0.4355	4.05
0.05	1.1417	0.4515	4.14
0.03	1.1698	0.4584	4.19
0.02	1.1848	0.4621	4.21
0.01	1.2004	0.4658	4.23
0.00	1.2168	0.4696	4.26
-0.01	1.2340	0.4735	4.28
-0.05	1.3124	0.4905	4.39
-0.1	1.4427	0.5151	4.56
-0.14	1.5959	0.5386	4.75
-0.18	1.8716	0.5677	5.06
-0.1988	2.3330	0.5854	5.54

5.4 Falkner-Skan 境界層流れの中立安定曲線

この場合の中立安定曲線を求める方法は前のセクションと全く同じである．$\beta = 1.6,\quad 0.0 \quad -0.1988$ とする 3 ケースの流れに対し O-S 方程式から得られる固有値分布を示した（図 11,12,13）．各ケース共に $\alpha^* = 0.1, R^* = U_e\delta^*/\nu = 1000$ である．

5.4.1 $\beta > 0$ の場合

(30) 式で $\beta > 0$ の場合，境界層内流れの速度プロフィールは下流方向に凸の流れとなる（図 10）．中立安定曲線は β が増大するにつれ，最初曲線の頂点は下方へと移動する（$0 \lesssim \beta \lesssim 0.6$）．

---

*7 運動量厚さ θ とその係数 Θ

$$\theta = \sqrt{(2-\beta)\frac{\nu x}{U_e}} \int_0^\infty f'(1-f')\mathrm{d}\bar{y} \equiv \Theta \sqrt{(2-\beta)\frac{\nu x}{U_e}}$$

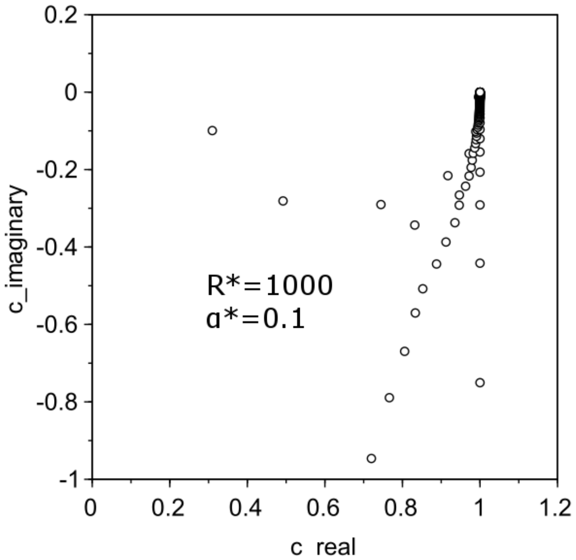

図 11 $\beta = 1.6$ とする流れの O-S 方程式固有値分布

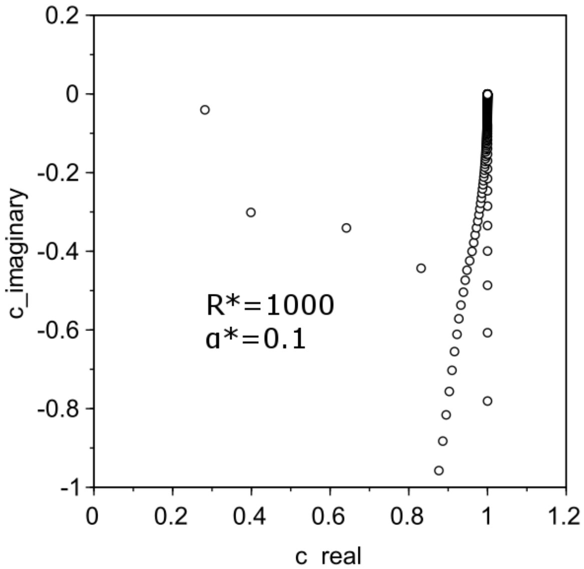

図 12 $\beta = 0.0$ とする流れの O-S 方程式固有値分布

$\beta = 0.05$, 0.1, 0.3, 0.6 のケースでは上側漸近枝上の kink は $\alpha^* = 0.05$ より下に移動しているようであるが，数値的には捉え切れなかった．しかしながら，さらに β を大きくすると再び kink を捉えることができる．β を 0.6 より増大させると，上側漸近枝には上方に新たに膨らみが発生する．

$\beta = 1.6$ の場合の中立安定曲線を図 17 にあらためて示した．また，Blasius 境界層の場合と同様，図 17 の 5 つの断面での固有値虚部 c_i の挙動を図 18 に示した．

5.4.2 $\beta = 0$ の場合

(30) 式で $\beta = 0$ の場合，流れは平板上の境界層流れに対応する．ただし，$\beta_0 = 1$ であるから，前のセクションの Blasius 境界層流れとは数値的に異なる．ここでは β を正負に 0.01 変化させた場合の中立安定曲線

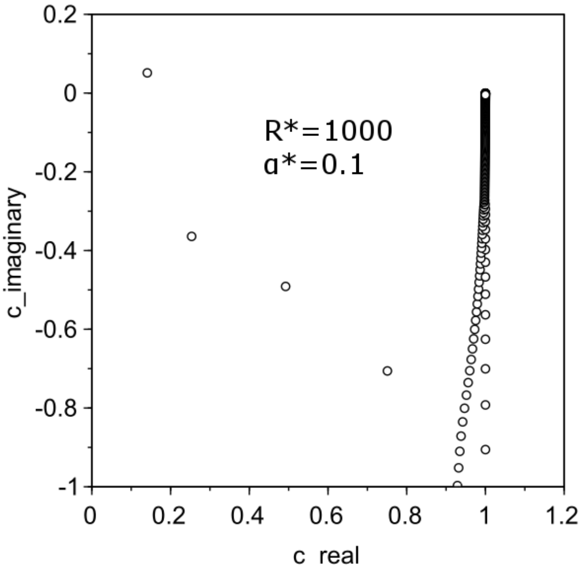

図 13　$\beta = -0.1988$ とする流れの O-S 方程式固有値分布

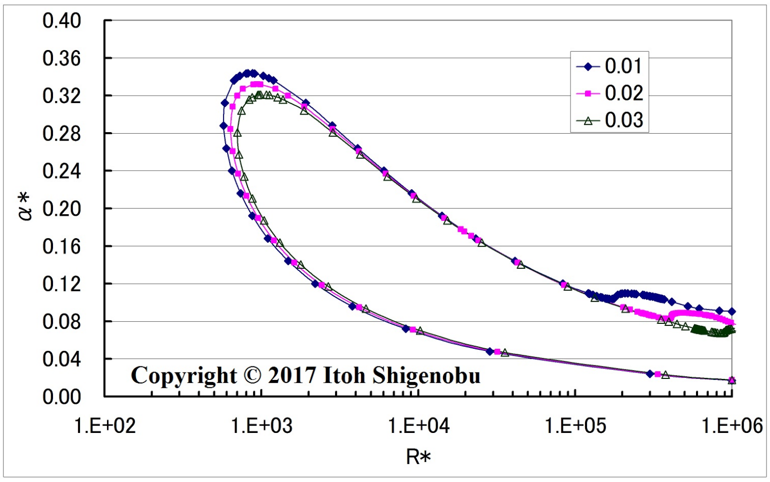

図 14　$\beta = 0.01$，0.02，0.03 の中立安定曲線

も示し，その変化を図示した（図 19）．β をゼロから正に変化させることは，境界層外側の流れの圧力は下流に向かって減少する場合に対応するため，境界層内の流れは加速する．この場合，固有値虚部がゼロとなる固有値探索を $R^* = 1.0 \times 10^6$ まで拡張することができなかったため，最大レイノルズ数 R^* を 5.0×10^5 とした．

5.4.3　$\beta < 0$ の場合

このケースは速度プロフィールに変曲点が存在する場合である．これまで同様中立安定曲線を求めた結果が図 21 である．$\beta = -0.1988$ に代表されるように，レイノルズ数 $R^* \to \infty$ で曲線は $\alpha^* \to 0$ と $\alpha^* \to$const. と 2 つの枝をもつ．図 21 の曲線の上側漸近枝の上限は Wazzan 等 [5] のチャートでの値と $R^* = 1.0 \times 10^5$ で一致する（Wazzan 等のレイノルズ数 R^* の最大値は 1.0×10^5 である）．また Wazzan 等のチャートでは上側漸近枝上の kink は捉えられていない．その kink の拡大を図 22 に示した．なお，$\beta = -0.1988$ の中立安定曲線のレイノルズ数一定断面での虚部 c_i の挙動を図 23 に示した．

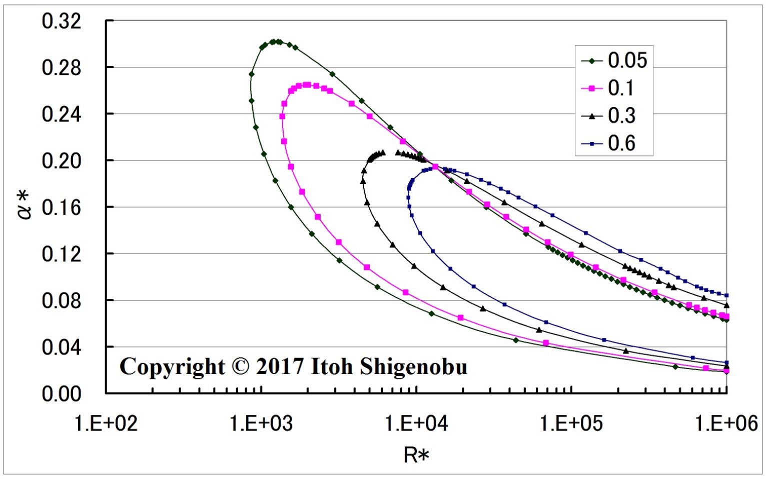

図 15　$\beta = 0.05$，0.1，0.3，0.6 の中立安定曲線

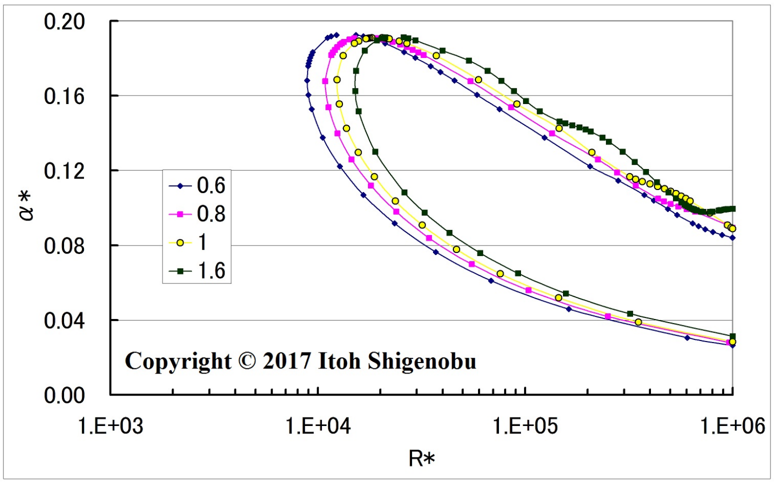

図 16　$\beta = 0.6$，0.8，1.0，1.6 の中立安定曲線

Rayleigh 方程式

非粘性の流れの安定性に関し Rayleigh はいくつかの研究を残しているが，その中の Rayleigh の定理とは「速度プロフィールに変曲点をもつ流れは不安定である」と表される（文献 [2]p.445）．$\beta < 0$ の場合，$0 \le \bar{y} < \infty$ に $\bar{U}'' > 0$ となる区間と $\bar{U}'' < 0$ となる 2 つの区間が存在し，その変曲点を $\bar{y}_s$ とする：$\bar{U}''(\bar{y}_s) = 0$.

$\beta < 0$ の場合，無次元波数 α^* の限られた範囲での値に対して $c_i > 0$ となる固有値を得る[*8]．$\beta = -0.1988, \alpha^* = 0.1$ の場合の Rayleigh 方程式による固有値分布を図 24 に示した．比較のため $R^* = 1.0 \times 10^6, \alpha^* = 0.1$ の場合の O-S 方程式から得られる固有値分布を図 25 に示した．図 24 で $c_i \neq 0$ となる固有値（複素共役）は

$$0.13308694 \pm 0.13391664\mathrm{i}$$

であり，図 25 でのそれらは

$$0.13403886 + 0.13251756\mathrm{i},$$
$$0.13170933 - 0.13296710\mathrm{i}$$

[*8] ここで扱っている流れは，変曲点での速さを $\bar{U}_s = \bar{U}(y_s)$ で表すと Fjϕrtoft の定理における条件 $\bar{U}''(\bar{U} - \bar{U}_s) < 0$ が成立する場合となっている．

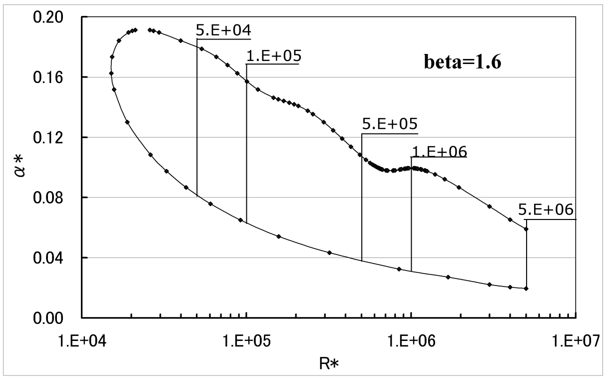

図 17　$\beta = 1.6$ の中立安定曲線

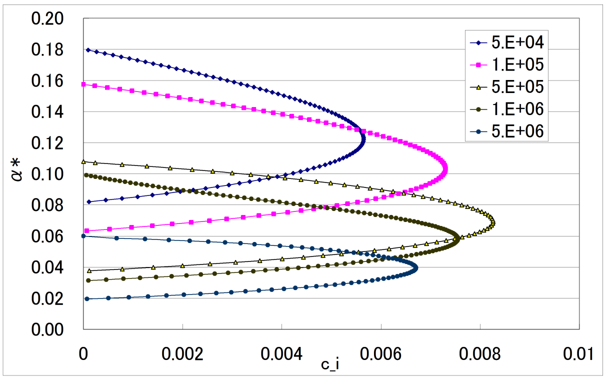

図 18　$\beta = 1.6$ の各レイノルズ数での虚部 c_i の挙動

である．また，$\beta = -0.1988$，-0.18，-0.14，0.1 の場合の Rayleigh 方程式により算出した固有値虚部の挙動を図 26 に示した．

6　さいごに

Scilab を使った数値実験を行い以下の結果を得た：
(1) スペクトル法に関連する Chebyshev Differentiation Matrix を使い Orr-Sommerfeld 方程式問題を一般化固有値問題に帰着し，ポアズイユ流の中立安定曲線を求めた．曲線の上側漸近枝，レイノルズ数が $R = 1.0 \times 10^8$ 付近に極小極大（kink）が現れる．
(2) 上記 (1) 同様, Blasius 境界層流れに対する中立安定曲線を求めた．曲線は波数の大きい 3 点を除く 9 点で Scubauer と Skramstad の実験と良く一致する．またポアズイユ流と同様曲線の上側漸近枝 $R^* = 1.0 \times 10^5$ 付近に kink が現れる．
(3) Blasius 境界層流れでの臨界レイノルズ数は $R^* = 517.7$ であるという結果を得た．
(4) Falkner-Skan 方程式 (30) のパラメーター β を正，ゼロ，負へと変化させ，各々の場合の流れに対する中立安定曲線を求めた．その結果，β の正負にかかわらず曲線の上側漸近枝には kink が発生していることが確認できた．
(5) Falkner-Skan 方程式で $\beta < 0$ とした流れ（速度プロフィールに変曲点を持つ流れ）を Rayleigh 方程式に適用した結果，その固有値虚部で $c_i > 0$ となる固有値が存在することを確認した．
(6) 以上の (1)，(2)，(4) の結果よりさまざまな流れの中立安定曲線の上側漸近枝上には極小・極大（kink）

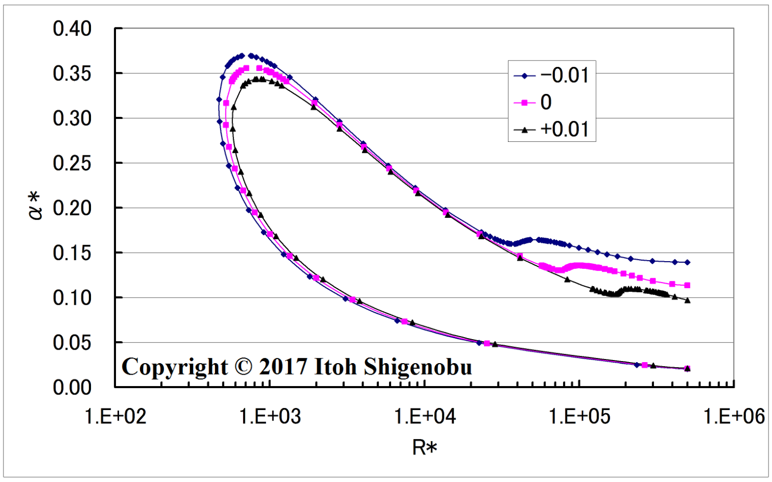

図 19　$\beta = -0.01$,　0,　$+0.01$ の中立安定曲線

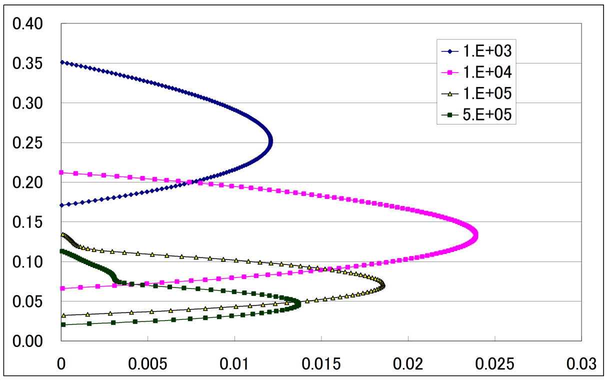

図 20　$\beta = 0.0$ の各レイノルズ数での虚部 c_i の挙動

が現れることを確認した.

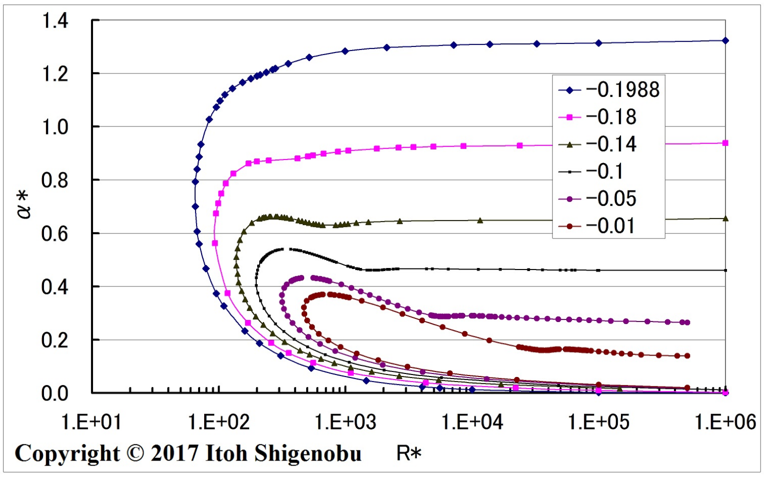

図 21 $\beta < 0$ の場合の中立安定曲線

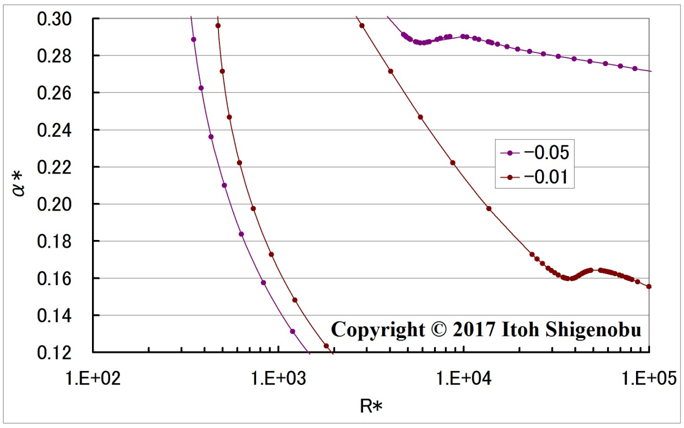

図 22 $\beta = -0.01$, -0.05 の kink 拡大

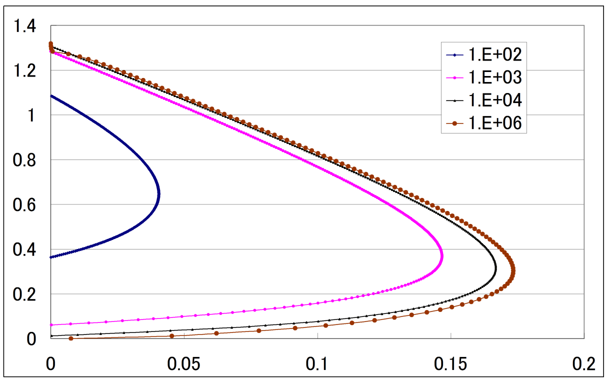

図 23 $\beta = -0.1988$ の R^* 一定断面での虚部挙動

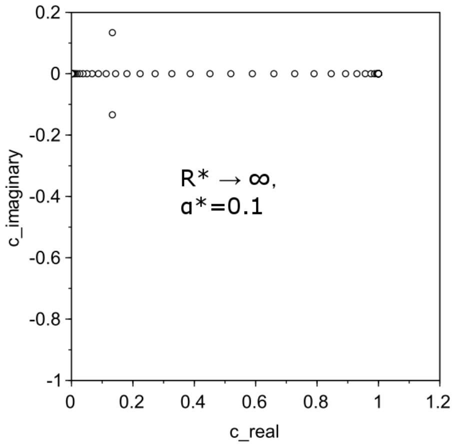

図 24 Rayleigh 方程式による固有値分布 $\beta = -0.1988$

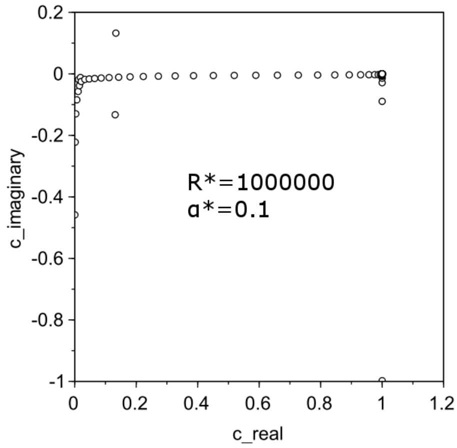

図 25 O-S 方程式による固有値分布 $\beta = -0.1988$

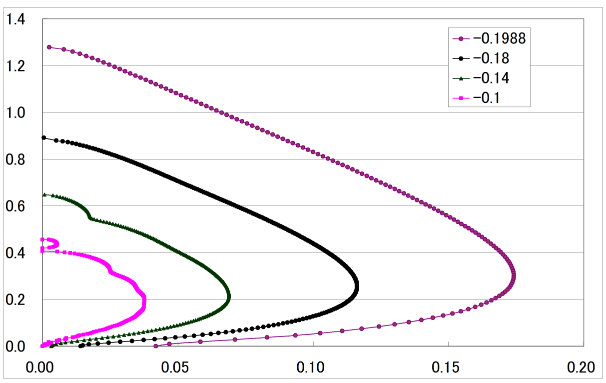

図 26 Rayleigh 方程式による固有値虚部 c_i 挙動

参考文献

[1] 巽友正，後藤金英.: 数理解析とその周辺 13「流れの線形安定性理論」, 産業図書，1976 年

[2] Schlichting, H.: *Boundary-Layer Theory*, Sixth Edition, McGRAW-HILL, 1968

[3] Trefethen, L. N.: *2000 Spectral Methods in Matlab, SIAM*,

[4] Healey, J. J.: On the neutral curve of the flat-plate boundary layer: comparison between experiment, Orr-Sommerfeld theory and asymptotic theory, *J. Fluid Mech.* (1995) *vol.* 288, pp.59-73.

[5] Wazzan, A. R., Okamura, T. T. and Smith,A.M.O.: SPATIAL AND TEMPORAL STABILITY CHARTS FOR THE FALKNER-SKAN BOUNDARY-LAYER PROFILES, The Aircraft Division under sponsorship of the independent research and development program of Douglas Aircraft Company, 1 September 1968.

[6] Orszag,S.A: Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, J. Fluid Mech. **50** (1971) part 4, pp.689-703

[7] Dongarra, J. J., Straughan, B. and Walker, D.W.: Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems, Applied Numerical Mathematics, **22**(1996), pp. 399-434

[8] Walton, A. G.: Stability of circular Poiseuille-Couette flow to axisymmetric disturbances, Journal of Fluid Mechanics, **500** (2004), pp. 169-210

[9] Theofilis, V.: The discrete temporal eigenvalue spectrum of the generalised Hiemenz flow as solution of the Orr-Sommerfeld equation, Journal of Engineering Mathematics **28**(1994): pp241-259.

[10] M.G. Macaraeg, C.L. Street and M.Y. Hussaini,: NASA TP-2858 (1988).

[11] Jordinson, R: The flat plate boundary layer. Part 1. Numerical integration of the Orr- Sommerfeld equation, J. Fluid Mech. **43** (1970) pp.801-811

[12] Asaithambi,A.: Solution of the Falkner-Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients, Journal of Computational and Applied Mathematics 176 (2005) 203-214.