

# Scilabによる Orr-Sommerfeld 方程式の 固有値探索

伊藤榮信

2016 年 4 月 5 日

更新：2016 年 8 月 31 日

## 1 はじめに

整然とした流れ（層流）もその速度が大きくなるにつれ暴れ始め、乱流へと遷移する。流体力学の言葉で言えば、レイノルズ数  $R$  がおよそ 2000 から 5000 といった数値になると乱流状態が発生する。レイノルズ数とは、流体の速度  $U$ 、流体の密度  $\rho$ 、流体の粘性  $\mu$ 、流れが変動しているおおよその長さ（流れの代表スケール） $L$  とした場合、 $R = \rho UL/\mu$  で定義される無次元量である。

1883 年オズボーン・レイノルズは半径  $a$  の円管の中に注意深く水を流しその速度を徐々に増大させる実験を行った。円管の中の流れは最初は層流状態であるが、流速  $U$  が増大しある大きさになると流れが乱れることを確認した。そのレイノルズ数がおよそ 2000 であった。この場合のレイノルズ数は  $R = \rho Ua/\mu$  で定義される。

どのような値のレイノルズ数で流れが乱れはじめるのかを予測する研究が線形安定性理論と呼ばれるものでその中心にある微分方程式が Orr-Sommerfeld 方程式である（その導出は付録に記した）。3次元直交座標系  $(x, y, z)$  とし、 $x$  軸方向の流れ  $U$  があるとする。このときの Orr-Sommerfeld 方程式は

$$i\alpha \left[ (U - c) \left( \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) - U'' \right] \phi = \frac{1}{R} \left( \frac{d^4}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2}{dy^2} + \alpha^4 \right) \phi \quad (1)$$

で表される。ここで  $\phi$  は流れの中に与えられた微小攪乱を表し、 $R$  はレイノルズ数、 $U''$  は主流の 2 階導関数である。

微小攪乱とは微小攪乱速度  $\hat{u}$  のことで、この攪乱を流れの中に注入した場合、その攪乱が時間とともに増大する場合、流れ  $U$  は不安定、逆に攪乱が時間の経過とともに消滅してしまう場合を流れ  $U$  は安定という。微小攪乱速

度  $\hat{\mathbf{u}} = (u, v, w)$  と成分で表示すると, Orr-Sommerfeld 方程式はその  $y$  成分から作られた方程式である. このとき攪乱の  $y$  成分  $v(\mathbf{x}, t)$  は

$$v(\mathbf{x}, t) = \phi(y)e^{i\alpha(x-ct)} \quad (2)$$

という形に仮定されている.  $\alpha$  は実数で,  $c$  は一般に複素数とする. この  $\alpha$  と  $c$  が Orr-Sommerfeld 方程式 (1) でのそれである. したがって,  $c = c_r + c_i i$  と実部と虚部に分けると, もし  $c_i$  が正で得られたならば, 攪乱は時間と共に増大し不安定となり,  $c_i$  が負ならば攪乱は消滅し安定である ( $c_i = 0$  は中立安定). よって, Orr-Sommerfeld 方程式からこの  $c$  がどのような値となるかを考えれば安定・不安定を判定することができる.

フリーウェアである Scilab を使って, 2枚の平板間の流れとして知られているポアズイユ (Poiseuille) 流の安定性問題を試してみた. 最初の予想以上の精度の良い結果が得られたので驚いている. 今回使用した方法は Oxford 大学 Trefethen 教授の本 [1] の第 14 章で議論された方法そのものであるので MATLAB 結果を Scilab で再現したことになる. 同じく Mathematica でシミュレーションした結果も発表されている Higgins(2013)[2]. 最初, この方法は Higgins 教授の発案と思っていたが, 実は Trefethen 教授の発案であった事を知り, 修正し更新した. よってシミュレーション結果に変化はない.

## 2 $\phi(y)$ の離散化

主流を 2次元ポアズイユ流  $U(y) = 1 - y^2$  とする (よって  $U'' = -2$ ). 流れは  $x$  軸方向とし,  $y$  軸方向の境界は  $y = \pm 1$  とする ( $y = \pm 1$  に板があり, その間に流れが流れる). (2) から分かるように, 微小攪乱は粘着条件により境界上でゼロ, また非圧縮性の条件から  $\phi$  の  $y$  方向への変動もゼロであるので

$$\phi(\pm 1) = 0, \quad \frac{d\phi}{dy} = \phi'(\pm 1) = 0 \quad (3)$$

となる.

さて領域  $[-1, 1]$  を  $N$  個に分割し, その点を使い  $\phi(y)$  を Lagrange 補間で近似する.

$$\phi(y) = \sum_{j=0}^N \phi(y_j) \ell_j(y). \quad (4)$$

分割の仕方は第 2 種 Chebyshev 点 (もしくは Gauss-Chebyshev-Lobatto 点) によるものとする. つまり領域  $[-1, 1]$  を

$$t_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (5)$$

で定義される点  $t_j$  により分割する.

$\phi(y)$  の導関数は

$$\phi'(y) = \sum_{j=0}^N \phi(y_j) \ell'_j(y) \quad (6)$$

と書くことができるが<sup>3</sup>, Chebyshev Differentiation ( or Derivative) Matrix  $D_{ij}$  という強力な演算行列が開発されており

$$\phi'(y_i) = D_{ij} \phi(y_j) \quad (7)$$

で計算される. 2階の導関数は行列の積  $D^2$  で表され, 4階の導関数も同様に  $D^4$  とすることで得られる.  $D$  の要素についてと, その導関数の精度については付録に記した.

### 3 固有値問題としての Orr-Sommerfeld 方程式

Orr-Sommerfeld 方程式の  $\phi(y)$  を第2種 Chebyshev 点により離散化し列ベクトル  $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N)^T$  を作る. これを (1) に代入し,  $c$  の入る項をとりだして整理すると

$$\left[ R^{-1}(D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4) - i\alpha U(D^2 - \alpha^2) + i\alpha U'' \right] \phi = -i\alpha c(D^2 - \alpha^2)\phi \quad (8)$$

と書くことができる. ここで  $d/dy = D$  は Chebyshev Differentiation Matrix である. そこで  $(N+1, N+1)$  行列  $A, B$  を,

$$\begin{cases} A \equiv [R^{-1}(D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4) - i\alpha U(D^2 - \alpha^2) + i\alpha U''] \\ B \equiv -i\alpha(D^2 - \alpha^2) \end{cases} \quad (9)$$

と定義するならば (8) 式は

$$A\phi = cB\phi$$

と書くことができ

$$A - cB = 0 \quad (10)$$

と固有値  $c$  に対する一般化固有値問題に帰着される.

今回行ったシミュレーションの最大の特徴は Trefethen 教授が<sup>4</sup> “a simple trick” とよんでいる方法で

$$\phi(y) = (1 - y^2)q(y) \quad (11)$$

と置き換えることである. これが記されている Trefethen[1] 第14章のタイトルは “Fourth-Order Problems” である.

このような形に書き換えたため  $d^4\phi/dy^4$  に変更が出る.

$$\frac{d^4\phi}{dy^4} = (1 - y^2) \frac{d^4q}{dy^4} - 8y \frac{d^3q}{dy^3} - 12 \frac{d^2q}{dy^2} \equiv \tilde{D}_4 q \quad (12)$$

また

$$\phi'(y) = (1 - y^2)q'(y) - 2yq(y) \quad (13)$$

であるから,  $q(\pm 1) = 0$  であるならば,  $\phi'(\pm 1) = 0$  となる.  $q(y) = \phi(y)/(1 - y^2)$  であるから, プログラム内では  $S(y) = 1/(1 - y^2)$  とし  $q(y) = S(y)\phi(y)$  と書いて  $S(\pm 1) = 0$  とする (この段階で暗に  $q(\pm 1) = 0$  を意味している).

以下の記号法を導入する:

$$\frac{d^4}{dy^4} \equiv D_4 \Rightarrow \mathbf{D}_4, \quad \frac{d^3}{dy^3} \equiv D_3 \Rightarrow \mathbf{D}_3, \quad \frac{d^2}{dy^2} \equiv D_2 \Rightarrow \mathbf{D}_2$$

各点での未知の関数  $q(y)$  の離散化されたものをベクトル  $Q$  とすると, 離散化された  $\phi_i$  との間に

$$Q_i = \frac{\phi_i}{1 - y_i^2} \quad (14)$$

という関係が成立する. よって

$$\tilde{\mathbf{D}}_4 Q = \tilde{\mathbf{D}}_4 S \phi, \quad S = \frac{1}{1 - y^2} \mathbf{I} \quad (15)$$

となる. ただし  $\mathbf{I}$  は単位行列である. これらから離散化された Orr-Sommerfeld 方程式

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{R} (\tilde{\mathbf{D}}_4 S - 2\alpha^2 \mathbf{D}_2 + \alpha^4 \mathbf{I}) - 2i\alpha \mathbf{I} - i\alpha(1 - y^2) \mathbf{I} (\mathbf{D}_2 - \alpha^2 \mathbf{I}) \right] \phi \\ & = c \left[ -i\alpha (\mathbf{D}_2 - \alpha^2 \mathbf{I}) \right] \phi \end{aligned} \quad (16)$$

を得る. ただし, Trefethen[1] にも記されているように  $D_2$  に対しては  $D_4$  に対して行った操作はしない.

行列  $A$  と  $B$  は  $(N + 1, N + 1)$  行列であるが, 境界条件より  $\phi(\pm 1) = 0$  であるから,  $A$  と  $B$  の第 1 列と第  $N + 1$  列を落とし, また未知数は  $N - 1$  個であるのに対し  $N + 1$  の方程式があるから第 1 行と第  $N$  行を落としている. よって, 行列  $A$  と  $B$  は  $(N - 1, N - 1)$  行列に縮小される.

行列の縮小化 など今回の Trefethen 教授の手法の正確な記述は Trefethen[1] 第 7, 13, 14 章に詳細に記されているので是非読みたい (ダウンロード可).

## 4 シミュレーション結果

過去に Lin(1945) や数値計算を使った Thomas(1953), さらに Shen(1954) らにより研究が行われ, これらの研究から臨界レイノルズ数が 5300 で  $\alpha = 1.02$  であるという結果が残されている.

その Thomas(1953) や, その後の Orszag(1971), Dongarra et al.(1996) に従い,  $R = 10000$ ,  $\alpha = 1$  として固有値計算を行った. 以下はその結果と比較である: もちろんこれらの解は虚部が正であるから流れが不安定となるこ

表 1: 固有値のシミュレーション結果

Thomas	$c = 0.23750060 + 0.00359250i$
Orszag	$c = 0.23752649 + 0.00373967i$
Dongarra etal.	$c = 0.23752708 + 0.00373980i$
今回 Scilab 結果	$c = 0.23752666 + 0.00373946i$

とを示している (Thomas の結果については小数点以下 8 桁目が分からないので 0 を補った). また使用した第 2 種 Chebyshev 点の数  $N$  は 200 である.

Scilab によるシミュレーションで第 2 種 Chebyshev 点の数を変化させた場合の結果を示しておく.

表 2: Scilab による第 2 種 Chebyshev 点の数と固有値

$N = 20$	$c = 0.23879010 + 0.00630869i$
$N = 50$	$c = 0.23752649 + 0.00373967i$
$N = 100$	$c = 0.23752649 + 0.00373967i$
$N = 200$	$c = 0.23752666 + 0.00373946i$

他の多くの研究にまねて固有値の分布のグラフを図 1 に示した.

過去の研究では 2 次元ポアズイコ流の臨界レイノルズ数が 5300 で  $\alpha = 1.02$  であると記したが, Orszag(1971) は臨界レイノルズ数  $R_c$  と臨界の  $\alpha_c$  は

$$R_c = 5772.22, \quad \alpha_c = 1.02056 \pm 0.00001$$

としている. Orszag は臨界レイノルズ数を 5772.22 とした. 因みに Orszag による  $R = 5772.22$  と  $R = 5772.23$  の場合の固有値の一例と Scilab による結果を表 3 に記す. ただし  $N = 200$ ,  $\alpha = 1.02056$  である.

表 3: 臨界レイノルズ数とその固有値

	$R = 5772.22$	$R = 5772.23$
Orszag	$c = 0.26400174 - 1.7 \times 10^{-9}i$	$c = 0.26400166 + 1.3 \times 10^{-8}i$
Scilab	$c = 0.26400148 - 9.6 \times 10^{-9}i$	$c = 0.26400166 + 2.2 \times 10^{-8}i$

$\alpha = 1$  として, レイノルズ数を 1000 から変化させ, 固有値から安定, 不安定領域を調査した. その結果は

$$R \leq 5814, \quad R \geq 31957 \quad \text{で安定,} \quad 5815 \leq R \leq 31956 \quad \text{で不安定}$$

となった.

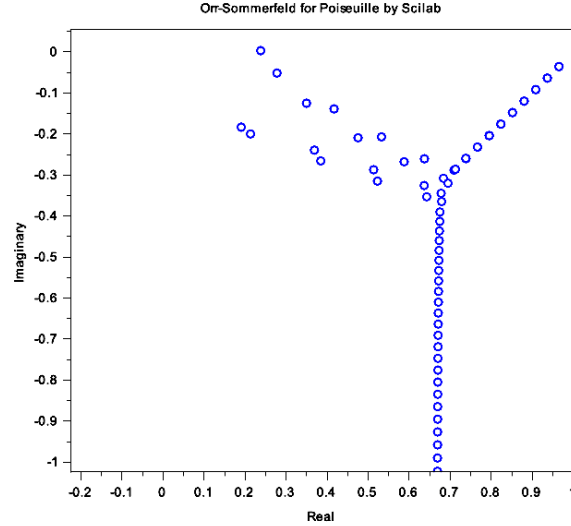


図 1:  $R=10000$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $N = 200$  に対する固有値の分布

## 5 さいごに

この方法を 2 次元 Couette 流 ( $U = y$ ) に適用することは簡単で、それも試みた。ただ線形安定性理論によれば、すべてのレイノルズ数の値に対して安定であることが分かっている。実際、レイノルズ数を変えて 100 回程度シミュレーションした結果、この 100 回のシミュレーションからは不安定となる結果は得られていない。しかし 2 次元 Couette 流の場合、実際には乱流への遷移が観測されており、理論とは反するこの事実は Sommerfeld のパラドックスと言われている。

### A Orr-Sommerfeld 方程式の導出

流体の流れは Navier-Stokes 方程式

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (17)$$

によって表現される。ここで  $t$  は時間、 $p$  は流体の圧力である。また流体は非圧縮性流体とすると

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (18)$$

という条件が付くが、これらの詳細については説明を省く。円管内の非圧縮流れもこの Navier-Stokes 方程式に従う。

流れの中に微小な攪乱を注入し、その攪乱が時間と共に増大するのか、自然に消滅してしまうのかを研究するのが流れの安定性理論である。攪乱が増大する場合、その流れは不安定、攪乱が消滅する場合、その流れは安定である。流れの中に微小な攪乱を注入するとは、流体の速度  $\mathbf{u}$  に攪乱  $\hat{\mathbf{u}}$  を加えることで、それを

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{u}} \quad (19)$$

で表す。  $\mathbf{U}$  は攪乱が与えられる前の流れで、主流と呼ぶ。次に、Navier-Stokes 方程式から圧力を消去するために、(17) の回転（ローテーション）をとると、新たに  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  が発生し、  $\mathbf{u}$  に (19) を代入すれば、渦度

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (20)$$

となる。よって (17) にローテーションを作用させることで

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (21)$$

を得る。ここで  $\nu = \mu/\rho$  で動粘性である。

//////////////////////備忘録////////////////////////////////////

(21) 式の  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  の導出

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= (C_1, C_2, C_3) \\ &= \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

とする。これに  $\nabla \times$  をかけた場合の  $x$  成分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_3}{\partial y} - \frac{\partial C_2}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ &\quad - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} - w \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &= u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

となる。ここで最後の等式の第1行は  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_x$  である。よって残りの部分の第2行のみを取り出して考える。変形には随時非圧縮の条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

を使う.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \left( -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} \\
& \quad - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \left( -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial z} \\
& = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\
& \quad - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \\
& = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{-\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\
& \quad - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \\
& = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \\
& = - \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} - \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \\
& = -(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)u
\end{aligned}$$

//////////以上備忘録//////////

主流は Navier-Stokes 方程式を満たし, 更に主流は定常であるとする

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{U}, \quad (23)$$

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{U} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (24)$$

となる. これらが主流の満たす運動方程式である.

次に (19) と (20) を (21) に代入し, 微量  $\hat{\mathbf{u}}$  と  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  の 2 次以上の項を無視すると

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\omega}}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\hat{\boldsymbol{\omega}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{u}} - (\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \nabla)\mathbf{U} = \nu \nabla^2 \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (25)$$

が導出される. これが主流に対する微小攪乱  $\hat{\mathbf{u}}$  と  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  が従う方程式となる.

主流の安定性を考える場合, 通常は常微分方程式の固有値問題に帰着させる方法である. これが適用できる場合の主流はかなり単純な流れで, 「空間的に一方向の平行流」に限られる. 3次元直交座標系を  $(x, y, z)$  とし, 流れを  $x$  軸方向にすると, 主流  $\mathbf{U}$  は

$$\mathbf{U} = (U, 0, 0) \quad (26)$$



である。主流が非圧縮性条件を満たすこと、更に  $z$  軸方向に依存しない 2 次元流であると仮定すると、主流は

$$\mathbf{U} = (U(y), 0, 0) \quad (27)$$

と極端に単純な流れとなる。この流れに対する渦度は

$$\boldsymbol{\Omega} = \left( 0, 0, -\frac{dU}{dy} \right) \quad (28)$$

である。

(27) と (28) を主流の方程式 (24) に代入すると、その左辺はゼロとなり

$$\frac{\partial^3 U}{\partial y^3} = 0$$

が得られ、 $U = C_0 y^2/2 + C_1 y + C_2$  に限定された流れとなるが、一般には局所的に平行流であればよいとして流れに対して拡大解釈をする。

攪乱速度の成分を  $\hat{\mathbf{u}} = (u, v, w)$  とする。(25) 式の回転すなわち  $\nabla \times$  をとる。この計算の詳細を以下に記す：(27) と (28) を考慮して (25) 式を具体的に成分ごとに記すと、

$$E_1 : \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + U \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{dU}{dy} \frac{\partial u}{\partial z} - \omega_2 \frac{\partial}{\partial y} U - \nu \nabla^2 \omega_1 = 0,$$

$$E_2 : \frac{\partial \omega_2}{\partial t} + U \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{dU}{dy} \frac{\partial v}{\partial z} - \nu \nabla^2 \omega_2 = 0,$$

$$E_3 : \frac{\partial \omega_3}{\partial t} + U \frac{\partial \omega_3}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} \frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dy} \frac{\partial w}{\partial z} - \nu \nabla^2 \omega_3 = 0.$$

ここで

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

である。運動方程式  $E_i$  をベクトルの成分と考え、その回転をとればよい。その  $y$  成分は

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}$$

であるから、これらの計算を実行すると、以下の  $y$  成分の方程式

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 v - \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \nabla^4 v = 0 \quad (29)$$

を得る。変形の途中

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}$$

などを頻繁に使った。このように、回転をとった方程式の  $y$  成分は  $v$  のみの方程式となる。

上の方程式 (29) から  $t \rightarrow \infty$  で

$$\begin{cases} v(\mathbf{x}, t) \text{ が } 0 \text{ となるならば主流は安定,} \\ v(\mathbf{x}, t) \text{ が } 0 \text{ とならないならば主流は不安定,} \end{cases} \quad (30)$$

と判定する。

攪乱  $v(\mathbf{x}, t)$  は  $x$ -,  $z$ - 軸方向に周期的とするが、更に Squire の定理によれば 3 次元攪乱の臨界レイノルズ数は常に 2 次元臨界レイノルズ数より大きいので簡単のため攪乱の空間依存性を  $x$  と  $y$  方向のみとし

$$v(\mathbf{x}, t) = \varphi(y, t)e^{i\beta x} \quad (31)$$

を仮定する。これを (29) 式に代入すると

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + iU\beta \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) \varphi - i\beta \frac{d^2 U}{dy^2} \varphi - \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right)^2 \varphi = 0 \quad (32)$$

が得られる。

この段階で上の方程式の無次元化を行う。流れ場の代表的な長さを  $L$ 、主流の速度を  $U_0$  とし、各物理量を以下のように無次元化する (一部、上にバーをつける)。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{U_0}{L} t, \\ \bar{U}(\bar{y}) &= \frac{U(y)}{U_0}, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\bar{y}, \tau), \quad \alpha = L\beta, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

として、(32) 式を書き直すと

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + i\bar{U}\alpha \right) \left( \frac{d^2}{d\bar{y}^2} - \alpha^2 \right) \bar{\varphi} - i\alpha \frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{y}^2} \bar{\varphi} - \frac{1}{R} \left( \frac{d^2}{d\bar{y}^2} - \alpha^2 \right)^2 \bar{\varphi} = 0 \quad (34)$$

と無次元化される。ここで、レイノルズ数  $R = U_0 L / \nu$  である。 $\bar{\varphi}(\bar{y}, \tau)$  の時間部分を更に

$$\bar{\varphi}(\bar{y}, \tau) = \phi(\bar{y})e^{-i\alpha c\tau} \quad (35)$$

とする。すなわち、(31) 式に戻れば

$$v(\mathbf{x}, t) = \phi(\bar{y})e^{i\alpha(\bar{x} - c\tau)}$$

としたことになる。(35) 式を (34) 式に代入し整理すると

$$i\alpha \left[ (\bar{U} - c) \left( \frac{d^2}{d\bar{y}^2} - \alpha^2 \right) - \frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{y}^2} \right] \phi - \frac{1}{R} \left( \frac{d^2}{d\bar{y}^2} - \alpha^2 \right)^2 \phi = 0 \quad (36)$$

が得られる。あらためて  $\bar{y}, \bar{U}$  が無次元量であることを確認して、表記上この記号上のバーを外して書くと Orr-Sommerfeld 方程式 (1) が得られる。

////////////////////(29)式に関連する備忘録////////////////////

以下はあくまで備忘録で導出結果の信頼性は低い.

運動方程式の  $x$  成分 :

$$-\nabla^2 \frac{\partial u}{\partial t} - U \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dU}{dy} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d^3 U}{dy^3} v = -\nu \nabla^4 u$$

運動方程式の  $z$  成分 :

$$-\nabla^2 \frac{\partial w}{\partial t} - U \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{dU}{dy} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \omega_2 \frac{d^2 U}{dy^2} = -\nu \nabla^4 w$$

ここで,  $U$  の係数の計算は以下のようにしている :

$$U \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} \right) = U \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} \right) = U \left\{ -\nabla^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\}$$

////////////////////以上備忘録////////////////////

## B Chebyshev Differentiation Matrix

Chebyshev Differentiation Matrix をここでは Chebyshev 微分演算行列と訳し, 更に D 演算行列と省略する. この演算行列の導出は興味深いですがそれには触れない. この D 演算行列の要素は以下のように定義される. 第 2 種 Chebyshev 点で  $[-1, 1]$  を  $N$  分割した場合の C 演算子行列は  $(N+1, N+1)$  であり, その要素  $D_{ij}$  は

$$D_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \quad D_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6},$$

$$D_{ii} = \frac{-y_i}{2(1 - y_i^2)}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (37)$$

$$D_{ij} = \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j (y_i - y_j)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N-1,$$

$$c_i = \begin{cases} 2, & i = 0 \text{ or } N, \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. (対角成分については Xu and Hale の論文がある.)

この行列の精度を確認するために  $u(y) = e^y \sin 5y$  としてその導関数  $D * u$

を求める。もちろん、導関数  $u'(y) = e^y(\sin 5y + 5 \cos 5y)$  である。図には D 微分演算行列の結果  $D * u$  (○) と導関数  $u'(y)$  との値 (△) とをプロットした。分割数  $N = 20$  である。全ての点で○の中に△が入っていることが分かる。更に、分割数  $N = 20$  の場合の誤差  $E = D * u - e^y(\sin 5y + 5 \cos 5y)$  も

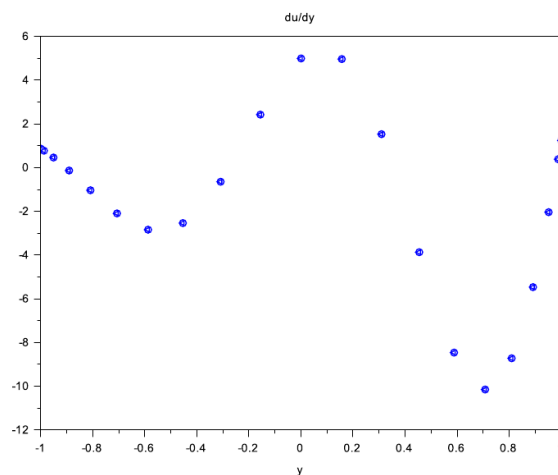


図 2:  $D * u$  ○ と  $u'(y) = e^y(\sin 5y + 5 \cos 5y)$  △,

確認した。最大誤差は  $y = 1$  で  $E = 7.0 \times 10^{-10}$  以下である。

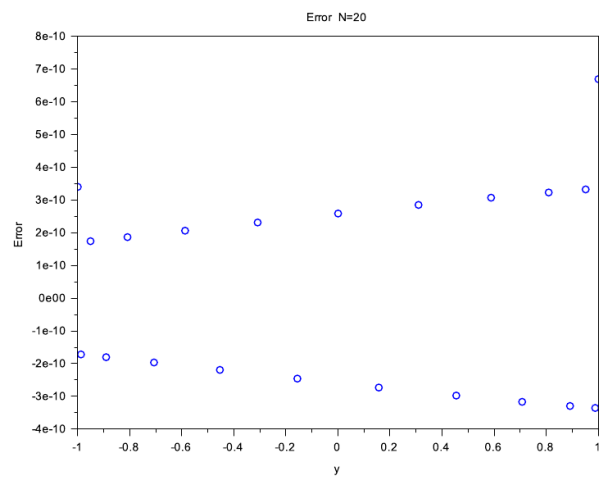


図 3: 誤差  $E = D * u - e^y(\sin 5y + 5 \cos 5y)$ ,

## 参考文献

- [1] Trefethen, L. N.: *2000 Spectral Methods in Matlab, SIAM*,
  - [2] Higgins, B. G.: Solution of the Orr-Sommerfeld Equation for Plane Poiseuille Flow *UCDavis August 2013*,
  - [3] 巽友正, 後藤金英.: 数理解析とその周辺 13 「流れの線形安定性理論」, 産業図書, 1976 年
  - [4] Orszag, S.A: Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *J. Fluid Mech.* **50** (1971) part 4, pp.689-703
  - [5] Dongarra, J. J., Straughan, B. , Walker, D.W.: Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems, *Applied Numerical Mathematics*, **22**(1996), pp. 399-434
  - [6] Schlichting, H.: *Boundary-Layer Theory, Sixth Edition*, McGRAW-HILL, 1968
  - [7] Canuto. C. et al: *Spectral Methods, Fundamentals in Single Domains*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006
  - [8] Mohammad, M. K., Mohammad, E.: Numerical Solution for the Falkner-Skan Boundary Layer Viscous Flow over a Wedge, *International Journal Of Engineering And Science* **3** (2013) Issue 10, pp.18-36
  - [9] Theofilis, V.: The discrete temporal eigenvalue spectrum of the generalised Hiemenz flow as solution of the Orr-Sommerfeld equation, *Journal of Engineering Mathematics* **28**(1994): pp241-259.
  - [10] M.G. Macaraeg, C.L. Street and M.Y. Hussaini, NASA TP-2858 (1988).
  - [11] Jordinson, R: The flat plate boundary layer. Part 1. Numerical integration of the Orr- Sommerfeld equation, *J. Fluid Mech.* **43** (1970) pp.801-811
- Xu, K. and Hale, N. 2015 Explicit construction of rectangular differentiation matrices, *IMA Journal of Numerical Analysis Advance Access* published April 26, 2015