# 振り子運動に及ぼす<br>流体の内部粘性の影響

Sir George Gabriel Stokes

受理 1850 年 12 月 9 日
訳と注：伊藤榮信
2015 年 10 月 23 日

http://mural.uv.es/daroig/documentos/stokes1850.pdf より本論文をダウンロード

振り子から得られた大変重要な結論が研究者の大きな注目を集め，彼らによって細心の精度の実験が成されている．特に振り子の測定は最新で最高の正確さであり，有名な実験の中でも最高のランクに位置するものであろう．

この後かなりの長さの前文が続くが省略する．

## PART I
### 解析的研究
### 第 1 節

流体中で振動する物体，すなわち流体中の振り子の一般的な方程式．方程式の従う一般的な法則．振動する平面の方程式の解．

以下省略

### 第 2 節

無限に広い流体中で振動する球の場合と，同一中心をもつ球内部で振動する球の解．

以下省略

$$f_1''(r) - \frac{2}{r^2} f_1(r) = 0, \tag{33}$$

以下省略

$$P_r = p - 2\mu \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r},\ \ T_\theta = -\mu \left( \frac{\mathrm{d}R}{r\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r} - \frac{\Theta}{r} \right), \tag{46}$$

## 第 3 節

無限に広い流体中で中心軸と直交する方向に振動する無限の長さをもつ円柱の解.

24. 中心軸上の 1 点をとり吊るした長い円柱を考え，無限に広い流体中で振り子のように振動させる．中心軸と垂直な 2 枚の平面で囲まれた円筒部分に作用する抵抗力は同じ速度で振動する無限の長さの円柱の一部に作用する抵抗力とほぼ同一であるといえる．棒の両端付近に位置する箇所に対しては，この抵抗力は明らかにかなり誤差のあるものであろう；しかし棒の直径がその長さに対してかなり小さいものと仮定するならば，この誤差は極端に小さくなるはずである．

よって，無限の長さの円柱が流体中で中心軸と直交する方向に振動していることを想定するならば，2 次元内の運動と考えられ，よって流体の運動の決定が必要となる．この問題の解の様子については説明の必要はないであろう．原理的には既に議論した球の場合と同様である.，現時点で (33) あたりまでは問題は何がしか簡単のようにも見えるが，その後はずっと難しくなる．

25. 円柱の中心軸に垂直な平面を $xy$ 平面にとり，その原点を円柱中心軸の平均位置に設定し，$x$ 軸の方向は円柱の運動方向にある．方程式 (2),(3) はこの場合

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= \mu \left( \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} \right) - \rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= \mu \left( \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} \right) - \rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\}, \tag{66}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = 0, \tag{67}$$

(67) により，$u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x$ は全導関数となる．よって

$$u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x = \mathrm{d}\chi, \tag{68}$$

である[1]．(66) の 2 つの式から微分することにより，$p$ を消去すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\right)\chi = 0, \tag{69}$$

を得る[2]．前と同様

$$\chi = \chi_1 + \chi_2, \tag{70}$$

とする．ここで

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\right)\chi_1 = 0, \tag{71}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\chi_2 = 0, \tag{72}$$

である．(66) と (68) から

$$\mathrm{d}p = \mu'\rho\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\chi - \mu'\rho\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\chi$$

であるから[3]，(70)，(71)，(72) を使うと

$$\mathrm{d}p = \rho\left(\frac{\mathrm{d}^2\chi_1}{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}^2\chi_1}{\mathrm{d}t\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right), \tag{73}$$

---

[1] 伊藤注：(67) から，

$$u = \frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\chi}{\partial x} \qquad \because \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right) = 0$$

従って，$\chi$ の全導関数

$$\mathrm{d}\chi = \frac{\partial\chi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\chi}{\partial x}\mathrm{d}x = u\mathrm{d}y - v\mathrm{d}x$$

なお，この当時は偏微分記号 $\partial$ が使われていなかったようである．

[2] 伊藤注：ここで $\mu' = \mu/\rho$ である．$u = \partial\chi/\partial x$ であるから (66) の第 1 式から

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)u = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

を作り，この両辺を $x$ で偏微分したものと，(66) の第 2 式についても同様の計算をした結果は

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}$$

$\nabla^2 p = 0$ であるから，これらを加えたものがゼロとなる．

[3] 伊藤注：全導関数より

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y = \mu'\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\partial}{\partial t}\right)u\mathrm{d}x + \mu'\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\partial}{\partial t}\right)v\mathrm{d}y$$

$$= \mu'\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y}\mathrm{d}x + \mu'\rho\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(-\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\mathrm{d}y$$

とした．

を得る．

26．極座標 $r, \theta$ に移る．ここで $\theta$ は $x$ 軸から測られ，こうすることで (68), (71)，(72)，(73) から

$$Rr\mathrm{d}\theta - \Theta\mathrm{d}r = \mathrm{d}\chi, \tag{74}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\right)\chi_1 = 0, \tag{75}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\chi_2 = 0, \tag{76}$$

$$\mathrm{d}p = \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\chi_1}{\mathrm{d}r}r\mathrm{d}\theta - \frac{\mathrm{d}\chi_1}{r\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}r\right), \tag{77}$$

が得られる．(74) 式の $R, \Theta$ は各々動径ベクトルに沿うものと直交するものである．

27．$a$ を円柱の半径とし，前と同じように，円柱の運動は方程式

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = c\mathrm{e}^{\sqrt{-1}nt} = c\mathrm{e}^{\mu' m^2 t}, \tag{78}$$

となるから[4]，円柱表面に関連する条件は

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\mathrm{d}\chi}{r\mathrm{d}\theta} = \cos\theta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = c\cos\theta\mathrm{e}^{\mu' m^2 t} \\ \Theta &= -\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = -c\sin\theta\mathrm{e}^{\mu' m^2 t} \end{aligned}\right\} r = a \text{ のとき}, \tag{79}$$

である．

(79) 式を含み (75) と (76) の一般式は

$$\chi_1 = \mathrm{e}^{\mu' m^2 t}\sin\theta F_1(r), \quad \chi_2 = \mathrm{e}^{\mu' m^2 t}\sin\theta F_2(r) \tag{80}$$

の形の解をもつ．これらを (75) と (76) と (79) 式へ代入すると

$$F_1''(r) + \frac{1}{r}F_1'(r) - \frac{1}{r^2}F_1(r) = 0, \tag{81}$$

$$F_2''(r) + \frac{1}{r}F_2'(r) - \frac{1}{r^2}F_2(r) - m^2F_2(r) = 0, \tag{82}$$

[4]伊藤注：第 2 節で議論しているようだが，訳者の関心が円柱外部の解についてであり，これに関してはこれ以上触れない．

$$F_1(a)+F_2(a)=ac, \quad F_1'(a)+F_2'(a)=c, \tag{83}$$

これ以外に，無限遠で速度がゼロとなる条件がある．

28．(81) の解は

$$F_1(r)=\frac{A}{r}+Br, \tag{84}$$

である．一方，(82) の解は有限項の形では得られない．

後者の方程式を簡単化するため $F_2(r)=F_3'(r)$ とする．これを (82) に代入し，1 回積分すると

$$F_3''(r)+\frac{1}{r}F_3'(r)-m^2F_3(r)=0, \tag{85}$$

を得る[5]．この式に積分定数を加える必要はない．何故なら，$F_3(r)+C=F_3(r)$ とすればよい．

(85) の解として $r$ の冪が増大する級数を見つけるため，まず (85) に代わって，第 2 項に $1-\delta$ をかけた式を考える[6]．そしてこの新しい方程式で $F_3(r)=A_Ix^\alpha+B_Ix^\beta+\cdots$ を仮定し，任意の指数 $\alpha,\beta,\cdots$ と任意定数 $A_I,B_I,\cdots$ を決定すると

$$F_3(r)=A_I\left\{1+\frac{m^2r^2}{2(2-\delta)}+\frac{m^4r^4}{2\cdot4(2-\delta)(4-\delta)}+\cdots\right\}$$

$$+A_{II}r^\delta\left\{1+\frac{m^2r^2}{2(2+\delta)}+\frac{m^4r^4}{2\cdot4(2+\delta)(4+\delta)}+\cdots\right\}$$

$$=(A_I+A_{II}+A_{II}\delta\log r)\left\{1+\frac{m^2r^2}{2^2}+\frac{m^4r^4}{2^2\cdot4^2}+\cdots\right\}$$

---

[5]伊藤注：代入した式は

$$F_3'''(r)+\frac{1}{r}F_3''(r)-\frac{1}{r^2}F_3'(r)-m^2F_3'(r)=0$$

となるが，第 1，2，4 項を積分したものは

$$\int_a^r F_3'''(r)\mathrm{d}r=F_3''(r)+C,\quad \int_a^r\frac{1}{r}F_3''(r)\mathrm{d}r,\quad \int_a^r F_3'(r)\mathrm{d}r=F_3(r)+C',$$

となる．しかし，第 3 項に部分積分を適用すると

$$\int_a^r-\frac{1}{r^2}F_3'(r)\mathrm{d}r=\left.\frac{1}{r}F_3'(r)\right|^r-\int_a^r\frac{1}{r}F_3''(r)\mathrm{d}r$$

この右辺第 2 項と上の第 2 項がキャンセルする．

[6]伊藤注：つまり

$$F_3''(r)+(1-\delta)\frac{1}{r}F_3'(r)-m^2F_3(r)=0, \tag{85'}$$

という常微分方程式となる．テキストには顕には書かれていないが $\delta\ll1$ としている．

$$+\frac{1}{2}(A_I - A_{II})\delta\left\{\frac{m^2r^2}{2^2}S_1 + \frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2}S_2 + \frac{m^6r^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}S_3 + \cdots\right\} + O(\delta^2)$$

を得る[7]．ここで

$$S_i = 1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1} + \cdots + i^{-1}, \tag{86}$$

である．

今，

$$A_I = C - A_{II}, \quad A_{II} = D\delta^{-1},$$

として，上の式に代入すると，$\delta$ を消去することができて

$$F_3(r) = (C + D\log r)\left(1 + \frac{m^2r^2}{2^2} + \frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2} + \cdots\right)$$

$$-D\left(\frac{m^2r^2}{2^2}S_1 + \frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2}S_2 + \frac{m^6r^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}S_3 + \cdots\right), \tag{87}$$

となる[8]．この式に現れる級数は全ての $r$ に対して明らかに収束するものである[9]；しかしながら，$r$ が無限大になるとき何が起こるかという情報をもたらしてくれない．ただ，$F_3(r)$ は $r$ とともに無限大とはならないという条件から $C$ と $D$ との間の一つの関係式が導かれる．

式 (85) の解は減少する冪と指数関数との積で表される解をもつだろう．それを

$$F_3(r) = \mathrm{e}^{\pm mr}(A_i r^\alpha + B_i r^\beta + \cdots)$$

と置く．「定積分と無限級数というクラスの数値解」という論文で既にこの形の解を与えている． その結果は

$$F_3(r) = C'\mathrm{e}^{-mr}r^{-\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{1^2}{2\cdot 4mr} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4(4mr)^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2\cdot 4\cdot 6(4mr)^3} + \cdots\right\}$$

$$+D'\mathrm{e}^{mr}r^{-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1^2}{2\cdot 4mr} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4(4mr)^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2\cdot 4\cdot 6(4mr)^3} + \cdots\right\}, \tag{88}$$

---

[7]伊藤注：この導出にはかなりのスペースが必要となる．よって，このページの脚注欄ではスペースをとれず，最後のページに記した．

[8]伊藤注：そのまま計算すると第 2 項の項の係数は

$$\frac{1}{2}(A_I - A_{II})\delta = \frac{1}{2}(C\delta - 2D)$$

となるが，$\delta$ の 1 次の項となり，無視している．

[9]伊藤注：収束性の確認は脚注では煩雑になるので末尾の「補記」に記した．

である[10]．　これらの級数は，全ての場合に究極的には発散するのだが[11]，$mr$ の絶対値 (modulus) が大きい場合に数値的には有用である．そればかりではなく，いったん $D'=0$ としておけば，$F_3(r)$ は $r$ について無限大とはならず，$D'$ が $C$ と $D$ の関数として表現できるとという仮定のもとに，$C$ と $D$ との間に要請される関係式を得ることができる．

29．このことは (85) の解を異なる形の解で表現することにより実現される．この解の形は既に知られている．ちょっと変形する (transform) ことによりそれは

$$F_3(r)=\int_0^{\pi/2}\{C''+D''\log(r\sin^2\omega)\}(e^{mr\cos\omega}+e^{-mr\cos\omega})\mathrm{d}\omega, \qquad (89)$$

であり[12]，$C'',D''$ は任意の定数である．(89) の指数関数を展開し，各項を別々に積分すると，実際に (87) と同じ形で表現することがわかる．この変形 (transformation) には定積分の減少型漸化式

$$P_i=\int_0^{\pi/2}\cos^{2i}\omega\log\sin\omega\mathrm{d}\omega$$

が必要となる．部分積分，つまり $\cos\omega\log\sin\omega\mathrm{d}\omega$ を積分し，$\cos^{2i-1}\omega$ を微分することで，$P_{i-1}$ に依存する $P_i$ を作ることができる．$P_0=Q_0, P_1=(1/2)Q_1$ とし，一般の場合には

$$P_i=\frac{1\cdot 3\cdots(2i-1)}{2\cdot 4\cdots(2i)}Q_i$$

で，ここで

$$Q_i=Q_0-\{2^{-1}+4^{-1}+\cdots+(2i)^{-1}\}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{4}S_i$$

である[13]．

(87) と (89) 式の等価性を確かめたが，$C,D$ と $C'',D''$ の関係式を見つけ

[10]伊藤注：$F_3=\mathrm{e}^{mr}(c_0r^{-p}+c_1r^{-p-1}+c_2r^{-p-1}+\cdots)$ と展開し，$F_3', F_3''$ を計算し，それらを (85) に代入して各次数の係数がゼロとなるようにする．例えば

$$r^{-p-1}:\ \ m(1-2p)c_0=0,\Longrightarrow p=\frac{1}{2},\ \ r^{-p-2}:(-2mp-m)c_1+p^2c_0=0\Longrightarrow c_1=\frac{1}{8m}c_0$$

[11]伊藤注：例えば正項級数 ($D'$ が係数の方) の収束を考える．一般項を以下のように書いて，収束判定をすると

$$a_n=\frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{(2\cdot 1)\cdots(2n)(4mr)^n}\Longrightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)4mr}\to\infty\ \ (n\to\infty)$$

となり，発散する．

[12]伊藤注：これが (87) と同じ形の解になっていることを示すにはやはり，かなりのスペースを要するので．末尾の「(89) 式関連」の所に記した．

[13]伊藤注：この導出も末尾に記した．

るためには，(87) と (89) 式の最初の 2 項だけを書き下すだけで充分である．すなわち

$$C + D\log r = \pi C'' + \pi D'' \log r + 2\pi D'' \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

よって

$$C = \pi C'' + 2\pi \log\left(\frac{1}{2}\right) D'', \quad D = \pi D'', \tag{90}$$

が得られた．

$D'$ と $C'', D''$ との間の関係を求めるより困難なステップが残っている．この目的のために $r$ が無限大のときの (89) 式 2 番目の部分である ( ) 内の極限値を求めてみよう．まず，実部が正の 2 つの複素数 $\Omega, \Omega'$ を考え，$\Omega$ の実部が $\Omega'$ の実部よりも大きいとして，$r$ を無限大にもっていくと，$\epsilon^{\Omega r}$ は究極的には $\epsilon^{\Omega' r}$ と比較にならないほど大きくなる[14]．たとえ $r\epsilon^{\Omega' r}$ としても事態は同じで，もっと正確に述べるならば，最初の式の絶対値 (modulus) は後者の 2 つの絶対値よりも比較にならないほど大きい．従って，(89) 式の $F_3(r)$ の極限式を探す場合，$\omega$ の積分範囲 $[0, \pi/2]$ を $[0, \omega_1]$ と置き換える．ここで $\omega_1$ は好きなだけ小さくできる正の量で，$r$ を無限大としたときゼロとなるものとする．また同じ理由から，2 番目の指数関数は無視する．$\cos\omega = 1 - \lambda$ としよう．よって

$$\sin^2\omega = 2\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right), \quad \mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{2\lambda - \lambda^2}} = \left(1 + \frac{\lambda}{4} + \cdots\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{2\lambda}}$$

と書くことができる．こうして (積分区間)$\lambda$ の極限は 0 と $\lambda_1$ となるだろう．ここで $\lambda_1 = 1 - \cos\omega_1$ である．$\log(1-\lambda/2)$ は極限でゼロとなり[15]，$1+\lambda/4+\cdots$ は極限で 1 となるから，(89) から

$$\text{limit of } F_3(r) = \mathrm{e}^{mr} \times \text{limit of } \int_0^{\lambda_1} (C'' + D'' \log 2\lambda r)\mathrm{e}^{-m\lambda r}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{2\lambda}}$$

を得る[16]．　ここで $\lambda = \lambda' r^{-1}$ とすると，$\lambda'$ の積分区間の極限は 0 と $\lambda_1 r$ となる．よって被積分関数の 2 番目は $r$ とともに無限大となる．したがって

$$\text{limit of } F_3(r) = \frac{1}{\sqrt{2r}}\mathrm{e}^{mr}\int_0^{\infty}(C'' + D''\log 2\lambda')\mathrm{e}^{-m\lambda'}\lambda'^{-1/2}\mathrm{d}\lambda', \tag{91}$$

[14]伊藤注：公開されているこの論文は原典を再度タイプしたものであろう．よって，原典での自然対数の底である e が読み取れず，敢えて $\epsilon$(イプシロン) でタイプしなおしたように思える．もしも底 e でなく $\epsilon$(イプシロン) であるとするならば，文中に何らかの注釈が加えられるはずであるが，一切無い．ここでは $r$ が大きい場合の $F_3(r)$ の形に注目している．すなわち $\mathrm{e}^{mr\cos\omega}$ の指数で $\Omega \equiv \cos\omega$ とし $\Omega$ が 1 をとるあたりがこの全体の積分で重要となることを言っている．

[15]伊藤注：(89) 式の被積分関数 $\log r \sin^2\omega$ の部分で

$$\log r\sin^2\omega = \log r + \log 2\lambda\,(1-\lambda/2) = \log r + \log 2\lambda + \log(1-\lambda/2)$$

の最後の項を指す．

[16]原注：「limit」という用語はここでは次のような意味で使っている．すなわち $\phi(r)$ が $f(r)$ に対する比 $(\phi(r)/f(r))$ が極限で等しくなるとき，$f(r)$ は $\phi(r)$ の「limit」であるよばれる．ではあるが，$f(r)$ と $\phi(r)$ がゼロとなったり，無限大になったりする場合は，$\phi(r)$ の「limit」は，通常の用語「limit」に従い，ゼロもしくは無限大とよばれる．

と書き換えられた[17].

さて，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{-1/2} \mathrm{d}x = \pi^{1/2}$$

であり，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x = \Gamma(s)$$

の[18]両辺を $s$ で微分した後，$s = 1/2$ とすると

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{-1/2} \log x \mathrm{d}x = \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$$

を得る[19]．$x = m\lambda'$ としてこれらの式に代入すると

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-m\lambda'} \lambda'^{-1/2} \mathrm{d}\lambda' = \pi^{1/2} m^{-1/2}$$

と

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-m\lambda'} \lambda'^{-1/2} \log \lambda' \mathrm{d}\lambda' = m^{-1/2}\left[\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) - \pi^{1/2} \log m\right]$$

を得る[20]．ここで $m^{-1/2}$ の値の実部は正となるようにとっている．これらを (91) 式に代入すると

$$\text{limit of } F_3(r) = \left(\frac{\pi}{2mr}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{mr}\left\{C'' + \left(\pi^{-1/2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) - \log\frac{m}{2}\right) D''\right\}$$

が得られ，更に (88) と比べると

$$D' = \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{C'' + \left(\pi^{-1/2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) - \log\frac{m}{2}\right) D''\right\}, \tag{92}$$

を得る．

30．こうして，以下の条件から $C$ と $D$ の関係式を見つけることが可能となった．その条件とは円柱から無限に離れた点で流体の運動が無限大とならないための条件である．任意定数 $A, B, C, D$ を決定することに何の困難もない．まず $B = 0$ とする．そうでなければ無限遠で速度は有限とならない．次に (83) の 2 つの方程式は，それらを組み合わせることで，$A, C, D$ を決定する役目を果たす．このように流体の運動は完全に決定され，$F_1(r), F_3(r)$ は (84)

[17]伊藤注：巧妙な手口で，元は角度 $\omega$ の積分であったものをあたかも $r$ もしくは $\lambda'$ の積分であるかのようにすり替えている．発端は $\cos\omega = 1 - \lambda$ としたところから始まる．無限大に発散する量を有限の値で求めるという，どこか「くりこみ」を思わせる方法である．

[18]伊藤注：もちろんガンマ関数である．

[19]伊藤注：積分の収束性を末尾で確かめた．

[20]伊藤注：被積分関数で $\log x = \log m\lambda' = \log m + \log \lambda'$ として，右辺に移項した．

と (87) で与えられる．(87) の級数は超幾何級数的には収束するのだが，$mr$ の絶対値が大きくなると急速に発散する．そしてこのような場合に，$F_3(r)$ の値を数値的に計算するために，(88) 式はもはや有用な解ではない．目的を満たすようにこれを解として取り上げるには定数 $C'$ を予め決定しておくことが要求される．それには円柱に作用する圧力の合力を計算することになるが，それはこの研究のメインの問題であり，たとえ (88) 式を採用したとしても $C'$ の値に関する知見を要請するべきではない[21]．

(92) で $D'=0$ とし，$C''$ と $D''$ の関係をその式から求め，(90) の 2 つの式を用い $C''$ と $D''$ を $C, D$ で表すと

$$C = \left(\log\frac{m}{8} - \pi^{-1/2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right) D, \tag{93}$$

が得られ[22]，$F_3(r) = F_2'(r)$，また $B=0$ に注意すると，(83) と (84) から

$$\frac{A}{a} + F_3'(a) = ac, \quad -\frac{A}{a} + F_3''(a) = ac,, \tag{94}$$

が得られる．よって

$$\frac{a^2c + A}{a^2c - A} = \frac{aF_3''(a)}{F_3'(a)}, \tag{95}$$

となる．この方程式から $A$ を決定することができる．何故なら，$F_3(a)$ は (87) で表すことができて，(95) 式の右辺は比 $C/D$ しか含んでおらず，この比は (93) で与えられている．また，もし $F_3(a)$ が (88) で表されたとすると，$D'=0$ である限り，$C'$ は消去されてしまう．

31．さて，流体が円柱に作用する力を表現してみよう．$F$ を円柱の長さ $\mathrm{d}\ell$ に作用する力とすると，この力は明らかに $x$ 軸方向に作用する力となる．よって (47) 式と同じ方法により

$$F = a\mathrm{d}\ell \int_0^{2\pi} (-P_r\cos\theta + T_\theta\sin\theta)_a \mathrm{d}\theta, \tag{96}$$

[21]原注：$C'$ はこの論文の最後で与えられる．

[22]伊藤注：(92) で $D'=0$ とした式から

$$C'' = -\left(\pi^{-1/2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) - \log\frac{m}{2}\right) D''$$

が得られ，(90) 式の $C''$ にこれを代入し，$\pi D'' = D$ を使うと

$$C = -\left(\pi^{-1/2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) - \log\frac{m}{2}\right)\pi D'' + 2\pi\log\left(\frac{1}{2}\right) D''$$

$$= -\pi^{-1/2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) D + \left[\log\frac{m}{2} + 2\log\left(\frac{1}{2}\right)\right] D = -\pi^{-1/2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) D + \log\frac{m}{8} D$$

が得られる．ここで $P_r, T_\theta$ は以前の (46) 式と同様の方法で $R$ と $\Theta$ の形で表現される[23]．これらの方程式の右辺 (right-hand menbers) を $\chi$ で表すと，$r$ に関する 2 階の導関数を含む項だけとなり，よって (70) と (75) と (76) とから

$$\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r} - \frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}\chi_2}{\mathrm{d}t}$$

となる．条件式 (79) から

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)_a = \frac{1}{a}\left(\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}\right)_a - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\theta}\right)_a = 0,$$

であり[24],

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{r\mathrm{d}\theta}\right)_a = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_a = -\frac{\sin\theta}{a}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{\Theta}{a}$$

を得る[25]ので

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}r}\right)_a = -\left(\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}r^2}\right)_a = \frac{1}{a}\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r}\right)_a + \frac{1}{a^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_a - \frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}\chi_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\mu'}\frac{\mathrm{d}\chi_2}{\mathrm{d}t}$$

となる[26]．　したがって，力の式は

$$F = a\mathrm{d}\ell\int_0^{2\pi}\left\{-p_a\cos\theta + \rho\left(\frac{\mathrm{d}\chi_2}{\mathrm{d}t}\right)_a\sin\theta\right\}\mathrm{d}\theta, \tag{97}$$

となる．

部分積分により

$$\int_0^{2\pi} p_a\cos\theta\mathrm{d}\theta = \left. p_a\sin\theta\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

が得られる．この第 1 項は積分の両端でゼロであるから消え，$\mathrm{d}p/\mathrm{d}\theta$ は (77) 式で与えられ[27]，それを代入すると

$$F = \rho a\mathrm{d}\ell\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\left\{a\left(\frac{\mathrm{d}\chi_1}{\mathrm{d}r}\right)_a + (\chi_2)_a\right\}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

---

[23]伊藤注：$P_r, T_\theta$ は動径方向の応力と，接線方向の応力で第 II 節に定義式のみを記した．

[24]伊藤注：原著では筆記ミスがある．修正をしておいた．すなわち

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_a = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)_a - \frac{1}{a^2}(Ra) = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{1}{a^2}\left(a\cos\theta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

[25]伊藤注：(79) 式から

$$\frac{\partial R}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right) = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \Theta$$

を使った．なお，円柱表面上では粘性により速度ゼロとなるので，接線方向速度 $\Theta$ はゼロ，$\Theta = 0$ である．

[26]伊藤注：(79) 式 2 番目の式から

$$\Theta = -\frac{\partial\chi}{\partial r} \quad よって\frac{1}{a}\left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)_a = -\frac{\Theta}{a}, \quad また \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}\right)_a = \frac{\Theta}{a}$$

[27]伊藤注：円柱表面上なので $\mathrm{d}r = 0$ に注意する．

となる．

(83) より，$F_3'(a) = F_2(a) = ac - F_1(a)$， $F_1(a) = A/a$ に注意すると，$A$ は (95) で与えられ，$\pi\rho a^2 \equiv M'$ とすると流体の質量は置き換えられ，

$$F = M'cn\mathrm{i}\left\{1 - 2\frac{aF_3''(a) - F_3'(a)}{aF_3''(a) + F_3'(a)}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

となり，微分方程式 (85) を使うことで

$$F = -M'cn\mathrm{i}\left\{1 - \frac{4F_3'(a)}{m^2aF_3(a)}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \tag{98}$$

が得られる[28].

$$1 - \frac{4F_3'(a)}{m^2aF_3(a)} = k - \mathrm{i}k', \tag{99}$$

としよう．ここで $k$ と $k'$ は実数として，前と同じように $kM'\mathrm{d}^2\xi/\mathrm{d}t^2$ は振動周期を変化させる $F$ の部分であり，$k'M'n\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t$ を振動の振れ幅は減少させる部分である[29].

$\mu'$ をゼロとすると，$m$ は無限大となり，(88) 式と (99) 式から，$D' = 0$ を思い起こすと，$k = 1, k' = 0$ となる．この結果は通常の流体力学の方程式から直接かつ単純に導ける[30].

32. 解析的な形が分かっている $k, k'$ を数値的に計算するための準備が全て整った．常に収束する級数 (87) をすべての場合で採用するが，$ma$ の絶対値が大きい場合には，$a$ に関して下降冪の級数を選んだ方が有用であろう．しかしながら，まずは上昇冪の級数を考える．

$ma$ の絶対値を $2\mathbf{m}$ とすると，つまり

$$ma = 2\mathbf{m}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}, \quad \mathbf{m} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{n}{\mu'}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mu'\tau}}, \tag{100}$$

---

[28] 伊藤注：原典では虚数単位を $\sqrt{-1}$ としているが，簡単のため i とした．1850 年頃には虚数単位をこのように記していたのか？　なお，この上の式とこの式の導出は末尾に記した．

[29] 伊藤注：第 II 節の (51) 式で行っているのだが，この節でも (78) 式で $\xi$ の方程式が定義されている．(98) 式は

$$F = -M'cn\mathrm{i}(k - \mathrm{i}k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = -M'\mathrm{i}kcn\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} - nM'k'c\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

と書けるから，

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} = \mathrm{i}cn\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

を上に代入すると

$$F = -M'k\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} - nM'k'\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$$

となる．この式から $k$ と $k'$ の意味を理解できる．

[30] 伊藤注：$\mu' = 0$ であるから粘性ゼロ，つまり非粘性流体であるから流体摩擦がゼロとなる．

とする[31]．ここで $\tau$ は休止から休止までの 1 周期の時間である．(99) にこの表記を代入すると

$$k - \mathrm{i}k' = 1 - \frac{\mathrm{i}aF_3'(a)}{\mathbf{m}^2 F_3(a)}. \tag{101}$$

簡単のため

$$\log_{\mathrm{e}} 4 + \pi^{-1/2}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\Lambda \tag{102}$$

とする．(87) と (93) から

$$\frac{1}{D}F_3(a) = \left(\log\mathbf{m} + \Lambda + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)\left(1 + \frac{\mathbf{m}^2}{1^2}\mathrm{i} - \frac{\mathbf{m}^4}{1^2\cdot 2^2} - \frac{\mathbf{m}^6}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\mathrm{i} + \cdots\right)$$

$$-\left(\frac{\mathbf{m}^2}{1^2}S_1\mathrm{i} - \frac{\mathbf{m}^4}{1^2\cdot 2^2}S_2 - \frac{\mathbf{m}^6}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}S_3\mathrm{i} + \cdots\right),$$

$$\frac{1}{D}aF_3'(a) = 1 + \frac{\mathbf{m}^2}{1^2}\mathrm{i} - \frac{\mathbf{m}^4}{1^2\cdot 2^2} - \cdots$$

$$+2\left(\log\mathbf{m} + \Lambda + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)\left(\frac{\mathbf{m}^2}{1^2}\mathrm{i} - \frac{\mathbf{m}^4}{1^2\cdot 2^2} - \cdots\right)$$

$$-2\left(\frac{\mathbf{m}^2}{1^2}S_1\mathrm{i} - \frac{\mathbf{m}^4}{1^2\cdot 2^2}S_2 - \frac{\mathbf{m}^6}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}S_3\mathrm{i} + \cdots\right),$$

更に,

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\mathbf{m}^2}{1} - \dfrac{\mathbf{m}^6}{1^2\cdot 2^2\cdot 3} + \cdots = M_o, \quad \dfrac{\mathbf{m}^4}{1^2\cdot 2} - \dfrac{\mathbf{m}^8}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4} + \cdots = M_e \\[2ex]
\dfrac{\mathbf{m}^2}{1^2} - \dfrac{\mathbf{m}^6}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2} + \cdots = M_o', \quad \dfrac{\mathbf{m}^4}{1^2\cdot 2^2} - \dfrac{\mathbf{m}^8}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2} + \cdots = M_e' \\[2ex]
\dfrac{\mathbf{m}^2}{1}S_1 - \dfrac{\mathbf{m}^6}{1^2\cdot 2^2\cdot 3}S_2 + \cdots = N_o, \quad \dfrac{\mathbf{m}^4}{1^2\cdot 2}S_2 - \dfrac{\mathbf{m}^8}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4}S_4 + \cdots = N_e \\[2ex]
\dfrac{\mathbf{m}^2}{1^2}S_1 - \dfrac{\mathbf{m}^6}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}S_3 + \cdots = N_o', \quad \dfrac{\mathbf{m}^4}{1^2\cdot 2^2}S_2 - \dfrac{\mathbf{m}^8}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}S_4 + \cdots = N_e'
\end{array}\right\}, \tag{103}$$

$$\log\mathbf{m} + \Lambda = L, \tag{104}$$

[31]伊藤注：つまり

$$ma = 2\mathbf{m}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 2\mathbf{m}\{\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)\} = 2\mathbf{m}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

として，(101) へ代入し，i の符号を変え，整理すると

$$1+\frac{2}{\mathbf{m}^2}\frac{-LM_o+\frac{\pi}{4}M_e-\frac{1}{2}M_o'+N_o+\left\{\frac{\pi}{4}M_o+LM_e-\frac{1}{2}(1-M_e')-N_e\right\}\mathrm{i}}{-\frac{\pi}{4}M_o'+L(1-M_e')+N_e'+\left\{-LM_o'-\frac{\pi}{4}(1-M_e')+N_e'\right\}\mathrm{i}} \tag{105}$$

を得た．

33. $\pi^{-1/2}\Gamma'(1/2)$ の計算で補記に記したので，省略する．

34. $\mathbf{m}$ が大きいとき[32]，$a$ の下降冪となる級数解が利用できる．(88) で与えられた $F_3(a)$ の一般項は，$D'=0$ としたとき

$$(-1)^i C'\mathrm{e}^{-ma}\frac{[1\cdot 3\cdots(2i-1)]^2}{2\cdot 4\cdots(4ma)^i a^{1/2}}$$

であり，$F_3'(a)$ の一般項は

$$(-1)^{i-1}C'\mathrm{e}^{-ma}\frac{[1\cdot 3\cdots(2i-3)]^2}{2\cdot 4\cdots(4ma)^{i-1}a^{1/2}}\left\{m\frac{(2i-1)^2}{2i\cdot 4ma}-\frac{2i-1}{2a}\right\}$$

となる．そして { } 内を計算すると

$$-\frac{(2i-1)(2i+1)}{8ia}$$

であるから，

$$aF_3'(a)=C'\mathrm{e}^{-ma}ma^{1/2}\left\{-1-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4ma}+\frac{1^2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4(4ma)^2}-\cdots\right\}$$

を得，よって

$$\frac{aF_3'(a)}{F_3(a)}=-ma-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}(ma)^{-1}\cdots$$

が得られる[33]．

35. 多くの項が必要となったとき，以下の方法で係数の計算を簡単にでき

---

[32]伊藤注：非粘性の場合 $\mu'\to 0$．よって $\mathbf{m}\gg 1$ とできる．

[33]伊藤注：ここで

$$F_3(a)=C'\mathrm{e}^{-ma}a^{-1/2}\left\{1-\frac{1^2}{2\cdot 4ma}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4(4ma)^2}-\cdots\right\}$$

であるが，$F_3^{-1}$ の近似で

$$F_3^{-1}\propto\left\{1-\frac{1^2}{2\cdot 4ma}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4(4ma)^2}-\cdots\right\}^{-1}=1+\frac{1^2}{2\cdot 4ma}-\frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4(4ma)^2}+\left(\frac{1^2}{2\cdot 4ma}\right)^2+$$

として計算していることに注意．

る．

$$aF_3'(a) = v(a)F_3(a)$$

とすると，

$$F_3'(a) = a^{-1}v(a)F_3(a)$$

$$F_3''(a) = \left\{\frac{1}{a}v'(a) - \frac{1}{a^2}v(a) + \frac{(v(a))^2}{a^2}\right\}F_3(a)$$

が得られる．これらを (85) に代入すれば

$$av'(a) + \{v(a)\}^2 - m^2a^2 = 0, \tag{107}$$

を得る．

$$v(a) = -ma + A_0 + A_1(ma)^{-1} + A_2(ma)^{-2} + \cdots, \tag{108}$$

を仮定して，上の式に代入して係数を比較することで，$A_0 = -1/2$，さらに $i \geq 1$ で

$$2A_{i+1} = -iA_i + A_0A_i + A_1A_{i-1} + \cdots + A_iA_0$$

を得る[34]．漸化式が分数となることを避けるため

$$A_i = \frac{B_i}{2^{2i+1}}, \tag{109}$$

を導入すると

$$B_{i+1} = -2iB_i + B_0B_i + B_1B_{i-1} + \cdots + B_iB_0, \tag{110}$$

という公式となる[35]．この漸化式から $B_1, B_2, B_3, \cdots$ が簡単に算出され

$$\left.\begin{array}{l} B_0 = -1,\ \ B_1 = +1,\ \ B_2 = -4,\ \ B_3 = +25, \\ B_4 = -208,\ \ B_5 = +2146,\ \ B_6 = -26368, \\ B_7 = +375733,\ \ B_8 = -6092032, \end{array}\right\} \tag{111}$$

こうして，(100)，(101)，(108)，(109) 式から

$$k - \mathrm{i}k' = 1 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\mathbf{m}^{-1} - \frac{1}{2}B_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/4}\mathbf{m}^{-2} - \frac{1}{2^4}B_1\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}\mathbf{m}^{-3}\cdots, \tag{112}$$

[34]伊藤注：(110) 式の導出の箇所に記した．
[35]伊藤注：この (110) 式までを補記に記した．

を得る[36].

$$u_1 = 2\mathbf{m}^{-1},\quad u_2 = -\frac{1}{2}B_0\mathbf{m}^{-2},\quad u_3 = \frac{1}{16}B_0\mathbf{m}^{-3},\quad \cdots$$

$$u_i = (-1)^{i+1}\frac{1}{2}B_{i-2}8^{-i+2}\mathbf{m}^{-i}$$

と定義して，(112) で i の符号を変え[37]，更に

$$\eta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

とすると[38]

$$\left.\begin{aligned}
&k + \mathrm{i}k' = 1 + u_1\eta + u_2\eta^2 - u_3\eta^3 + u_4\eta^4 - u_5\eta^5 + \cdots,\\
&k = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}u_1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}u_3 - u_4 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}u_5 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}u_7 + u_8 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}u_9\cdots,\\
&k' = \sqrt{\tfrac{1}{2}}u_1 + u_2 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}u_3 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}u_5 - u_6 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}u_7 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}u_9\cdots,
\end{aligned}\right\} \tag{113}$$

と書くことができる．以下，数値と 3 行ほど略.

36. $\mathbf{m}$ が大きい場合，級数 (113) は最初収束するが，その後は発散する．そして収束から発散へと通過する近辺では $u_i$ は連続する数項でほぼ同じ値となるだろう．級数 (113) の最初の $i$ 項を計算した後，$u_i$ からのずれを含む公式により級数の計算を完成したい．そこで

$$u_i\eta^i - u_{i+1}\eta^{i+1} + u_{i+2}\eta^{i+2} - \cdots = \eta^i\{1 - \eta(1+\Delta) + \eta^2(1+\Delta)^2 - \cdots\}u_i$$

$$= \eta^i\{1+\eta(1+\Delta)\}^{-1}u_i = \frac{\eta^i}{1+\eta}\left\{1 - \frac{\eta}{1+\eta}\Delta + \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^2\Delta^2 - \cdots\right\}u_i$$

を得る[39]．さらに，

$$1 + \eta = 1 + \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}$$

[36]伊藤注：

$$k - \mathrm{i}k' = 1 + \frac{\mathrm{i}aF_3'}{\mathbf{m}^2F_3} = 1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathbf{m}^2}v(a)$$

であるから，この $v(a)$ に (108) を代入すればよい．このとき，$ma = \mathbf{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ であり，第 1 項では $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2}$, $\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$ を使う.

[37]伊藤注：つまり，$\mathrm{i} \to -\mathrm{i}$ とすることで，この前でも同じことを行っているが，これは位相を $\pi$ 進ませることである．若干疑問である.

[38]伊藤注：原典では $\eta$ ではなく，数字の「8」で代用している．つまり $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \equiv 8$ としているがさすがに混乱を招きそうなので $\eta$ を使った.

[39]伊藤注：説明が無いが，$u_{i+1} = (1+\Delta)u_i$ を仮定しているらしい．よって，最初の和は公

$$\eta(1+\eta)^{-1} = \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/8}$$

したがって，$k, k'$ に加えられるの量は $k$ に対して

$$(-1)^i\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\left\{\cos\frac{2i-1}{8}\pi u_i - \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\cos\frac{2i}{8}\pi\Delta u_i\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\right)^2\cos\frac{2i+1}{8}\pi\Delta^2 u_i\cdots\right\}, \tag{114}$$

であり，$k'$ に対しては

$$(-1)^i\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\left\{\sin\frac{2i-1}{8}\pi u_i - \frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\sin\frac{2i}{8}\pi\Delta u_i\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{8}\right)^2\sin\frac{2i+1}{8}\pi\Delta^2 u_i\cdots\right\},$$

である．

37．以下の表に 40 個の異なる $\mathbf{m}$ に対する $k$ と $k'$ の値を載せた．$\mathbf{m}=1$ から $\mathbf{m}=1.5$ までに対しては (105) 式を使って計算した；残りの値に対しては級数 (113) により計算した．前者の計算で (103) で記された $M_o$ は小数点以下 6 位までの計算をした．

級数 (113) の計算では小数点以下 5 桁の計算をした．この級数は $\mathbf{m}=1.5$ では収束性が良く，この数値から，$k=1.952$ と $k'=1.153$ を算出した[40]．$\mathbf{m}=1.5$ と次の 2，3 の値では，(113) の $\mathbf{m}^{-5}$ 次までの計算をし，残りは (114) 式から計算した．$\mathbf{m}^2k$ と $\mathbf{m}^2k'$ の値を 2 列で表示し，円柱に作用する力の 2 成分を明示した．これは流体の性質と振動周期を一定にした場合に，円柱の半径が変化するときの値である．4 つの重要な数値がこの結果に収められている[41]．　(103)，(104)，(105) を使った数値計算は，関数の数が増える

比が $-\eta(1+\Delta)$ の等比数列の和の公式であり，次の分解は

$$\eta^i\frac{1}{1+\eta(1+\Delta)} = \eta^i\frac{1}{1+\eta-\eta+\eta(1+\Delta)} = \eta^i\frac{1}{(1+\eta)\{1-\eta/(1+\eta)+\eta(1+\Delta)/(1+\eta)\}}$$

ここで分母だけを計算すると

$$(1+\eta)\left[1-\frac{\eta}{1+\eta}+\frac{\eta(1+\Delta)}{1+\eta}\right] = (1+\eta)\left(1+\frac{\Delta}{1+\eta}\right)$$

よって

$$\eta^i\frac{1}{1+\eta(1+\Delta)} = \frac{\eta^i}{1+\eta}\left\{\frac{1}{1+\frac{\Delta}{1+\eta}}\right\}$$

[40]伊藤注：下の表と若干ずれはあるが．表では $\mathbf{m}=1.5, k=1.951, k'=1.163$

[41]伊藤注：以下の表は一部である．すべての値は原典を参考にされたい．

| $\mathbf{m}$ | $k$ | $k'$ | $\mathbf{m}^2k$ | $\mathbf{m}^2k'$ | $\mathbf{m}$ | $k$ | $k'$ | $\mathbf{m}^2k$ | $\mathbf{m}^2k'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\infty$ | $\infty$ | 0 | 0 | 2.1 | 1.677 | 0.7822 | 7.395 | 3.592 |
| 0.1 | 19.70 | 48.63 | 0.1970 | 0.4863 | 2.2 | 1.646 | 0.7421 | 7.966 | 3.592 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 1.5 | 1.951 | 1.163 | 4.389 | 2.595 | 3.6 | 1.394 | 0.4305 | 18.06 | 5.580 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 2.0 | 1.711 | 0.8268 | 6.845 | 3.307 | $\infty$ | 1 | 0 | $\infty$ | $\infty$ |

と非常に労力を要するものとなる．$\mathbf{m}$ の値が増大するにつれ 2 つの理由から計算は困難になる．まず関数 $M_o$ の計算が長くなり，2 つ目は (105) の分母分子の絶対値が小さくなり始めると，結果の精度を確保するために関数 $M_o$ と積 $LM_o$ の計算にはより大きな精度が要求される．一方，下降冪の級数 (113) の計算は反対に簡単である．

表の最初の方を除いては，$\mathbf{m}^2k'$ と $\mathbf{m}^2(k-1)$ がほぼ一定であるということである．したがって表の最初の方では $\mathbf{m}$ に対する $k$ もしくは $k'$ を載せていない．$\mathbf{m}^2k-\mathbf{m}^2$，$\mathbf{m}^2k'$ は補間により計算できる．表のまさに最初では，補間がうまくいかない．しかし，このようなケースでは (103)，(104)，(105) を使わざるを得ないが，$\mathbf{m}$ が小さい場合には比較的計算は容易である．$\mathbf{m}=4$ 以上にすることはあまり意味がないように思われる．何故なら $\mathbf{m}$ が 4 よりも大きくなると，級数 (113) は急速に収束しやすくなり $k$ と $k'$ を充分精度よくしかも簡単に計算できる．

38．関数 $k$ と $k'$ の動きを調べてみよう．

$\mathbf{m}$ が小さいときには，(105) 式の分母分子の $\mathbf{m}$ の冪を無視することができ，対数項と定数項だけを考慮すればよい．こうして

$$k+\mathrm{i}k' = 1 - \frac{\mathbf{m}^{-2}\mathrm{i}}{L-\frac{1}{4}\pi\mathrm{i}}$$

を得るが[42]，これから

$$\mathbf{m}^2(k-1) = \frac{\frac{1}{4}\pi}{L^2+(\frac{1}{4}\pi)^2}, \quad \mathbf{m}^2k' = \frac{-L}{L^2+(\frac{1}{4}\pi)^2} \tag{115}$$

が導かれる．$L$ は (102) と (104)，もしくは (104) と (106) で与えられる．$\mathbf{m}$ がゼロとなると，$\mathbf{m}$ の対数を含む $L$ は発散するが，極限ではより緩慢に増加する．(115) 式から明らかなように，$\mathbf{m}$ とともにゼロとなるのだが，$\mathbf{m}^2$ がかけられた 2 つの関数 $k-1$ と $k'$ は非常にゆっくりと減少する．よって $\mathbf{m}$ がかなり変化しても，これらはあまり変化しない．円柱の半径 $a$ が変化すると

[42]伊藤注：(105) 式の分子分母で $M, N, M', N'$ は全てゼロとなり，分子は $-\mathrm{i}/2$ のみで，分母は $L$ と $-\pi\mathrm{i}/4$ だけとなる．

き，他の全てを一定にしておくと，$a$ の変動とともに $\mathbf{m}$ も変化し，一般に振動周期と振れ幅に依存する力 $F$ の成分はそれぞれ $a^2k$ と $a^2k'$ とともに変化する．よって，振り子の実験で球を支えるようなものに使われる小さな半径の円柱の場合には，半径をかなり変化させても，ワイヤーに作用する抵抗力による周期や振れ幅の変化は小さい．単純な形である (115) 式は，理論が適用できるかどうかの実験に通常使われる細いワイヤーに対しても充分な精度の式である；

$\mathbf{m} = 0.3$ もしくは $0.4$ から表の終わりまでを考えた場合，最も異なる点は $\mathbf{m}^2(k-1)$ と $\mathbf{m}^2k'$ がほぼ一定にとどまるということである．したがって，$\mathbf{m}$ のかなりの範囲にわたり，各々の関数は $A + B\mathbf{m}$ という形の式でよく表現できる．$\mathbf{m}$ がかなり大きい場合には，(113) 式の 2 番目と 3 番目の式の最初の 2 つの項がかなり精度の良い $k$ と $k'$ を与える．何故なら，$\mathbf{m}^{-1}, \mathbf{m}^{-2}, \mathbf{m}^{-3}$ と減少するなかで，$\mathbf{m}^{-1}$ と $\mathbf{m}^{-2}$ の係数は他の項よりかなり大きいからである．これらの式で $a^2$ より後ろを無視すると

$$k = 1 + \sqrt{2}\mathbf{m}^{-1}, \quad k' = \sqrt{2}\mathbf{m}^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{m}^{-2}$$

を得る．　半径 $a$ に関するこれらの近似式は係数は異なるものの，球に対して得られた式とかなり良く似ていることに注意すべきである．

以上で第 3 節 (円柱部分) は終わり．

# 補記：各式の導出

**(86) 式までの導出**

$$F_3 = c_0 r^q + c_1 r^{q+1} + c_2 r^{q+2} + \cdots ,$$

とすると，

$$F_3' = q c_0 r^{q-1} + (q+1) c_1 r^q + (q+2) c_2 r^{q+1} + \cdots ,$$

$$F_3'' = q(q-1) c_0 r^{q-2} + (q+1) q c_1 r^{q-1} + (q+2)(q+1) c_2 r^q + \cdots ,$$

となるのでこれを脚注の (85') 式に代入し $r$ の次数順に係数がゼロになることを課す.

$$r^{q-2}: \quad c_0 q(q-1) + (1-\delta) c_0 q = 0, \Longrightarrow c_0 q(q-\delta) = 0, \quad \therefore \; q = 0, \quad \text{or} \quad \delta$$

$$r^{q-1}: \quad c_1 q(q+1) + c_1 (1-\delta)(q+1) = 0 \Longrightarrow c_1(1-\delta) = 0 \quad \therefore \; c_1 = 0,$$

$$r^q: \quad c_2 (q+1)(q+2) + (1-\delta)(q+2) c_2 - c_0 m^2 = 0,$$

$$\Longrightarrow c_2 (q+2)(q-\delta+2) = c_0 m^2,$$

よって，

$$q = 0 \;\text{ のとき }\; c_2 = \frac{m^2}{2(2-\delta)}, \qquad q = \delta \;\text{ のとき }\; c_2 = \frac{m^2}{2(2+\delta)}$$

として係数と次数が決定される．よって，まず

$$F_3(r) = A_I \left\{ 1 + \frac{m^2 r^2}{2(2-\delta)} + \frac{m^4 r^4}{2\cdot 4(2-\delta)(4-\delta)} + \cdots \right\}$$

$$+ A_{II} r^\delta \left\{ 1 + \frac{m^2 r^2}{2(2+\delta)} + \frac{m^4 r^4}{2\cdot 4(2+\delta)(4+\delta)} + \cdots \right\}, \tag{86.1}$$

が得られる.

次に $\delta \ll 1$ であるから各項は

$$\frac{m^2 r^2}{2(2-\delta)} \approx \frac{m^2 r^2}{2^2} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right), \qquad \frac{m^2 r^2}{2(2+\delta)} \approx \frac{m^2 r^2}{2^2} \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) \tag{86.2}$$

$$\frac{m^4 r^4}{2\cdot 4(2-\delta)(4-\delta)} \approx \frac{m^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) \left( 1 + \frac{\delta}{4} \right) \approx \frac{m^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} \left( 1 + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} \right),$$

$$\frac{m^4r^4}{2\cdot 4(2+\delta)(4+\delta)} \approx \frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\left(1-\frac{\delta}{4}\right) \approx \frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1-\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{4}\right), \tag{86.3}$$

(86.2)，(86.3) 等を (86.1) へ代入すると

$$F_3 = A_I\left\{1+\frac{m^2r^2}{2^2}+\frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2}+\cdots\right\}+\frac{\delta}{2}A_I\left\{\frac{m^2r^2}{2^2}\frac{1}{1}+\frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\cdots\right\}$$

$$+A_{II}r^\delta\left\{1+\frac{m^2r^2}{2^2}+\frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2}+\cdots\right\}-\frac{\delta}{2}A_{II}r^\delta\left\{\frac{m^2r^2}{2^2}\frac{1}{1}+\frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\cdots\right\}, \tag{86.4}$$

ここで，簡単だが $r^\delta$ を次のように書き換える：$\delta \ll 1$ なので $r^\delta = 1+t$ とする．ただし $t \ll 1$ である．前の式の自然対数をとると $\log r^\delta = \log(1+t) \approx t - t^2/2 + \cdots$ であるから，$t \approx \log r^\delta$ となる．元へ戻ると $r^\delta = 1+t = 1+\log r^\delta = 1+\delta\log r$ を得る．これを (86.4) へ代入し，$\delta$ の 1 次までをとったのが問題の式である． □

**(87) 式の収束性**

級数 $F_3(r)$ の一般項 $a_n$ を

$$a_n = (C + D\log r - DS_n)\frac{(mr)^{2n}}{(2\cdot 1)^2(2\cdot 2)^2\cdots(2n)^2}$$

とする．$mr$ は実数とし，$r>1$，$C>0$，$D>0$ とする．しかしながら，係数が $C+D\log r - DS_n$ であるため，任意の $r$ に対して $F_3(r)$ は正項級数とはならない．よって，まずは絶対収束を考える．

$$|a_n| = (C + D\log r + DS_n)\frac{(mr)^{2n}}{(2\cdot 1)^2(2\cdot 2)^2\cdots(2n)^2}$$

とすることで正項級数として，項比判定法を使う：

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(C+D\log r + DS_{n+1})\dfrac{(mr)^{2(n+1)}}{(2\cdot 1)^2(2\cdot 2)^2\cdots(2n)^2(2n+2)^2}}{(C+D\log r + DS_n)\dfrac{(mr)^{2n}}{(2\cdot 1)^2(2\cdot 2)^2\cdots(2n-2)^2(2n)^2}}$$

$$= \frac{C+D\log r + DS_{n+1}}{C+D\log r + DS_n}\frac{(mr)^2}{(2n+2)^2}, \tag{87.1}$$

ここで

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1}$$

であるから，

$$C+D\log r+DS_{n+1}=C+D\log r+DS_n+\frac{D}{n+1}$$

であり，(87.1) の係数は

$$\frac{C+D\log r+DS_{n+1}}{C+D\log r+DS_n}=1+\frac{D}{(C+D\log r+DS_n)(n+1)}, \tag{87.2}$$

となるから，$n\to\infty$ で (87.2)$\to 1$ である．分母の $S_n$ が気になる場合，オイラー定数 $\gamma=0.5772156649\cdots$ を使えば $S_n\approx\log n+\gamma$ と見積もることができるので

$$\frac{C+D\log r+DS_{n+1}}{C+D\log r+DS_n}=1+\frac{D}{(C+D\log r+D\log n+D\gamma)(n+1)}, \tag{87.3}$$

となり，$n\to\infty$ で (87.3)$\to 1$ である．これらを考慮すると，任意の $r$ に対して (87.1) は $n\to\infty$ で

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left\{1+\frac{D}{(C+D\log r+DS_n)(n+1)}\right\}\frac{(mr)^2}{(2n+2)^2}<1$$

となるので，$F_3(r)$ は絶対収束する．よってもとの $F_3(r)$ は収束する． □

**(89) 式関連**

積分を以下のように 2 つに分ける：

$$F_3(r)=\int_0^{\pi/2}\{C''+D''\log(r\sin^2\omega)\}(e^{mr\cos\omega}+e^{-mr\cos\omega})\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_0^{\pi/2}\{C''+D''\log r\}(e^{mr\cos\omega}+e^{-mr\cos\omega})\mathrm{d}\omega$$

$$+\int_0^{\pi/2}2D''\log\sin\omega(e^{mr\cos\omega}+e^{-mr\cos\omega})\mathrm{d}\omega, \tag{89.1}$$

次に，被積分関数内の指数関数の和は，展開することで

$$e^{mr\cos\omega}+e^{-mr\cos\omega}=2+\frac{2}{2!}(mr\cos\omega)^2+\frac{2}{4!}(mr\cos\omega)^4+\cdots, \tag{89.2}$$

とすることができる．

(89.1) の 2 つに分けた積分で，最初の方は，係数が定数であるから，単純に $i=1,2,\cdots$ とし，公式

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2i}\omega\mathrm{d}\omega=\frac{2i-1}{2i}\cdot\frac{2i-3}{2i-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

を使えばよい．よって

$$\{C'' + D''\log r\}\left(2\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2}\frac{m^2r^2}{2^2} + 2\frac{\pi}{2}\frac{m^4r^4}{4!}\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \cdots\right)$$

$$= \{C'' + D''\log r\}\pi\left(1 + \frac{m^2r^2}{2^2} + \frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2} + \cdots\right), \tag{89.3}$$

となり，前の部分を示すことができた．

(89.1) の 2 つに分けた積分で，2 番目の方を示すには $P_i$ を具体的に先ず求めておく．$P_0 = Q_0$ である．

$$P_1 = \frac{1}{2}Q_1 = \frac{1}{2}\left(Q_0 - S_1\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(Q_0 - \frac{1}{1}\frac{\pi}{4}\right),\ \ Q_0 = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P_2 = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}Q_2 = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\left(Q_0 - S_2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\left\{Q_0 - \frac{1}{1}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right\}$$

よって．(89.1) の 2 つに分けた 2 番目の積分で被積分関数に (89.2) を代入し，その積分を $P_i$ を使って書くと

$$\int_0^{\pi/2} 2D''(\log\sin\omega)2\left(1 + \frac{1}{2}(mr\cos\omega)^2 + \frac{1}{24}(mr\cos\omega)^4 + \cdots\right)\mathrm{d}\omega$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} D''\left(\log\sin\omega + \frac{m^2r^2}{2}\cos^2\omega\log\sin\omega + \frac{m^4r^4}{24}\cos^4\omega\log\sin\omega + \cdots\right)\mathrm{d}\omega$$

$$= 4D''P_0 + 4D''P_1\frac{m^2r^2}{2} + 4D''P_2\frac{m^4r^4}{24} + \cdots$$

$$= 4D''Q_0 + 4D''\frac{1}{2}\left(Q_0 - S_1\frac{\pi}{4}\right)\frac{m^2r^2}{2} + 4D''\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\left(Q_0 - S_2\frac{\pi}{4}\right)\frac{m^4r^4}{24} + \cdots$$

$$= 4D''Q_0\left(1 + \frac{m^2r^2}{2^2} + \frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2} + \cdots\right) - 4D''\frac{\pi}{4}\left(\frac{m^2r^2}{2^2}S_1 + \frac{m^4r^4}{2^2\cdot 4^2}S_2 + \cdots\right), \tag{89.4}$$

よって，$F_3$ =(89.3)+(89.4) となる． □

**$P_i = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2i-1)}{2\cdot 4\cdots(2i)}Q_i$ の証明**

$$P_i = \int_0^{\pi/2}\cos^{2i}\omega\log\sin\omega\mathrm{d}\omega, \tag{89.5}$$

上の積分に対して部分積分を行う

$$P_i = \int_0^{\pi/2} (\cos\omega \log\sin\omega) \cos^{2i-1}\omega \mathrm{d}\omega = \left[\int \cos\omega \log\sin\omega \mathrm{d}\omega \cdot \cos^{2i-1}\omega\right]_0^{\pi/2}$$

$$+(2i-1)\int_0^{\pi/2} (\sin\omega \log\sin\omega - \sin\omega)\sin\omega \cos^{2i-2}\omega \mathrm{d}\omega, \qquad (89.6)$$

となる．ここで，記すまでもないが部分積分の先頭の項の中の積分は次のようにした．$\sin\omega = t$ とする．

$$\int \cos\omega \log\sin\omega \mathrm{d}\omega = \int \log t \mathrm{d}t = t\log t - t = \sin\omega \log\sin\omega - \sin\omega$$

である．よって，(89.6) の右辺第 1 項はゼロとなる．(89.6) の積分を続けると

$$P_i = (2i-1)\int_0^{\pi/2} \left\{\sin^2\omega \cos^{2i-2}\omega \log\sin\omega - \sin^2\omega\cos^{2i-2}\omega\right\} \mathrm{d}\omega$$

$$= (2i-1)\left[\int_0^{\pi/2}\left\{\cos^{2(i-1)}\omega - \cos^{2i}\omega\right\}\log\sin\omega \mathrm{d}\omega - \int_0^{\pi/2}\sin^2\omega\cos^{2i-2}\omega \mathrm{d}\omega\right]$$

$$= (2i-1)(P_{i-1} - P_i) - (2i-1)\int_0^{\pi/2}\sin^2\omega\cos^{2i-2}\omega \mathrm{d}\omega$$

上の式を整理すると

$$P_i = \frac{2i-1}{2i}P_{i-1} - \frac{2i-1}{2i}\int_0^{\pi/2}\sin^2\omega\cos^{2i-2}\omega \mathrm{d}\omega, \qquad (89.7)$$

となる．以下，右辺第 2 項の積分を行う．

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2\omega\cos^{2i-2}\omega \mathrm{d}\omega = \int_0^{\pi/2}(\cos^{2i-2}\omega - \cos^{2i}\omega)\mathrm{d}\omega = I_{2i-2} - I_{2i}$$

ここで，$I_{2i}$ は積分公式

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2i}\omega \mathrm{d}\omega = \frac{2i-1}{2i}\cdot\frac{2i-3}{2i-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ただし，$I_0 = \pi/2$．よって，

$$I_{2i-2} - I_{2i} = I_{2i-2}\left(1 - \frac{2i-1}{2i}\right) = \frac{1}{2i}I_{2i-2}$$

これを (89.7) に代入すると

$$P_i = \frac{2i-1}{2i}\left[P_{i-1} - \frac{1}{2i}I_{2i-2}\right], \qquad (89.8)$$

を得る．例えば，

$$P_1 = \frac{1}{2}\left[P_0 - \frac{1}{2}I_0\right] = \frac{1}{2}\left[P_0 - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[P_0 - S_1\frac{\pi}{4}\right]$$

$$P_2 = \frac{3}{4}\left[P_1 - \frac{1}{4}I_2\right] = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\left(P_0 - \frac{1}{2}I_0\right) - \frac{1}{4}I_2\right] = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\left(P_0 - \frac{1}{2}I_0 - \frac{1}{2}I_2\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}\frac{1}{2}\left(P_0 - S_2\frac{\pi}{4}\right)$$

となり，$P_i$ が導かれた．　　$\square$

**(98) 式の導出**

まずは

$$F = \rho a \mathrm{d}\ell \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\left\{a\left(\frac{\mathrm{d}\chi_1}{\mathrm{d}r}\right)_a + (\chi_2)_a\right\}\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

の計算をする．

$$\chi_1 = \mathrm{e}^{int}\sin\theta F_1(r),\quad F_1(r) = \frac{A}{r},\qquad \chi_2 = \mathrm{e}^{int}\sin\theta F_2(r),\quad F_2(r) = F_3'(r)$$

であるから，

$$F = \rho a \mathrm{d}\ell \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\left\{-a\frac{A}{a^2} + F_2(a)\right\}\mathrm{e}^{int}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \rho a \mathrm{d}\ell\left\{-\frac{A}{a} + ac - F_1(a)\right\}in\mathrm{e}^{int}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \rho a \mathrm{d}\ell\left\{-2\frac{A}{a} + ac\right\}in\mathrm{e}^{int}\pi$$

を得る．ここで，(83) より，$F_2(a) = ac - F_1(a)$ を使った．また，$F_1(a) = A/a$ であり，$\theta$ に関する積分結果は $\pi$ となる．$A$ は (95) で与えられ

$$A = \frac{a^2c(aF_3'' - F_3')}{aF_3'' + F_3'}$$

である．これを上の式に代入すると

$$F = \rho a \mathrm{d}\ell\left\{ac - 2ac\frac{a^2c(aF_3'' - F_3')}{aF_3'' + F_3'}\right\}in\mathrm{e}^{int} = M'cn\mathrm{i}\left\{1 - 2\frac{aF_3''(a) - F_3'(a)}{aF_3''(a) + F_3'(a)}\right\}\mathrm{e}^{int}$$

が得られた．$\pi\rho a^2 \equiv M'$．

更に { } 内を計算すると

$$\frac{aF_3''(a) + F_3'(a) - 2(aF_3''(a) - F_3'(a))}{aF_3''(a) + F_3'(a)} = \frac{-(aF_3''(a) + F_3'(a)) + 4F_3'(a)}{aF_3''(a) + F_3'(a)}$$

となるから

$$F = -M'cn\mathrm{i}\left\{1 - \frac{4F_3'(a)}{aF_3''(a) + F_3'(a)}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

が得られる．ここで微分方程式 (85) より $aF_3''(a) + F_3'(a) = am^2F_3(a)$ が得られるから，これを分母に代入すれば (98) 式が得る． □

**$\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{-1/2}\log x\mathrm{d}x = \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$ の収束性**

$\mu-$ テストにより証明する．$x \to 0$ のとき $\log x \gg -x^{-1/3}$ つまり，$|\log x| \ll |-x^{-1/3}|$ となることを使う．$x \to 0$ で

$$x^\mu|f(x)| = x^\mu|\mathrm{e}^x x^{-1/2}\log x| < x^\mu \mathrm{e}^x|x^{-1/2}(-x^{-1/3})| = \mathrm{e}^x x^{\mu-5/6}$$

よって，$\mu = 5/6 < 1$ ととると

$$\lim_{x\to 0} x^\mu|f(x)| < \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^x = 1$$

となり，$\lim_{x\to 0} x^\mu|f(x)|$ =有限確定となる．よって，この積分は収束する．

Stokes は $\pi^{-1/2}\Gamma'(1/2)$ を数値的に解いている．ただし $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を使う．

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma'(1/2) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\Gamma(s)\right|_{s=1/2} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\frac{\Gamma(s+1)}{s}\right|_{s=1/2} = \left.\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\Gamma(s+1) - \frac{1}{s}\right)\right|_{s=1/2}$$

として，$\Gamma(s+1)$ の常用対数に関する Legendre 表を使って計算したとあり，その値を

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma'(1/2) = -1.9635102,\quad \Lambda = +0.5772158, \tag{106}$$

としている．一方，Simpson1/3 の公式で同じ値を計算した結果は

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma'(1/2) = -1.9826038$$

となった．なお，この数値積分での分割数は [0, 1] を 80000 分割，[1, 200] を 10000 分割した． □

**(110) 式までの導出**

$v(a)$ の式と微分方程式を変数 $y = ma$ で書き直すと，(107) と (108) 式は各々

$$yv'(y) - \{v(y)\}^2 - y^2 = 0, \tag{110.1}$$

$$v(y) = -y + A_0 + \frac{1}{y}A_1 + \frac{1}{y^2}A_2 + \frac{1}{y^3}A_3 + \cdots, \tag{110.2}$$

$$v'(y) = -1 - \frac{1}{y^2}A_1 - \frac{2}{y^3}A_2 - \frac{3}{y^4}A_3 - \cdots$$

となるから，これらを (110.1) へ代入して，$y$ の冪順でその係数を並べる：

$y^1:\quad -2A_0 - 1 = 0,\ \therefore\ A_0 = -\frac{1}{2}$

$y^0:\quad (A_0)^2 - 2A_1 = 0,\ \therefore\ A_1 = \frac{1}{2}A_0^2 = \frac{1}{8}$

$y^{-1}:\quad -2A_2 + 2A_0A_1 - A_1 = 0,\ \therefore\ 2A_2 = -A_1 + 2A_0A_1$

$y^{-2}:\quad -2A_2 + A_1^2 + 2A_0A_2 - 2A_3 = 0,\ \therefore\ 2A_3 = -2A_2 + 2A_0A_2 + A_1^2$

を続けることで，$A_i$ の漸化式を得ることができる．さらに，例えば

$$A_2 = A_0A_1 - \frac{1}{2}A_1$$

としてしまうと，分数がでてきてしまうのでこれを避けるため (109) 式を導入する．よって，(110) 式は得られる．　□