γ 準備体操：6 要素 Tr 展開

$-\mathrm{Tr}\left[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}\right]-$

伊藤榮信

2014 年 9 月 23 日

Dirac 粒子の散乱計算での最終段階には γ 行列が現れ，そのやっかいな計算を γ 体操というらしい．この γ 行列の 6 個の積で構成される量のトレース (行列の対角和のことで Tr で記す) を計算するための具体式を導いた．簡単で，面倒なだけの導出であるが，面倒なだけにあまり見当たらない式なので，馬鹿げているが,「隙間」の話題とした．

1　対角和 Tr に関して

対角和 Tr とは，例えば，2×2 の正方行列の場合

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Tr}[A] = a_{11} + a_{22} = \sum_{i}^{2} a_{ii} \tag{1}$$

である．すなわち，行列 A の (i,j) 要素 a_{ij} をとり添字の j を $j = i$ とするならば，$a_{ij} \to a_{ii}$ これは対角要素となる．次にこの要素 a_{ii} を i で和をとるならば対角和，つまりトレースである．

Tr 公式 I

$$\mathrm{Tr}[AB] = \mathrm{Tr}[BA] \tag{2}$$

証明

この 2 つの行列の積の結果に得られる行列の (i,j) 要素は $\sum_k a_{ik}b_{kj}$ となる．ここで添字の j を $j = i$ とするならば，$\sum_k a_{ik}b_{ki}$ となり，これは対角要素である．更に i について和をとればトレースとなる．

$$\mathrm{Tr}[AB] = \sum_i \left(\sum_k a_{ik}b_{ki} \right) = \sum_i \sum_k a_{ik}b_{ki} = \sum_k \left(\sum_i b_{ki}a_{ik} \right) = \mathrm{Tr}[BA]$$

となる．

Tr 公式 I'

$$\mathrm{Tr}[AQB] = \mathrm{Tr}[QBA] \tag{3}$$

(3) の確認　例 1

A を 2 列の横ベクトル $A = (a_1, a_2)$ の (1×2) 行列，Q を 2 行 2 列 (2×2) の行列 Q_{ij}，B を縦ベクトル $B^{\mathrm{T}} = (b_1, b_2)$ の (2×1) ベクトルとする．よって，$(1 \times 2)(2 \times 2)(2 \times 1)$ の積であるから，結果は (1×1) すなわちスカラーとなる，n 次正方行列の $n = 1$ という特別のケースである．つまり

$$AQB = (a_1 \;\; a_2) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 Q_{11} b_1 + a_1 Q_{12} b_2 + a_2 Q_{21} b_1 + a_2 Q_{22} b_2 = \sum_{i,j}^{2} a_i Q_{ij} b_j$$

よって，

$$\mathrm{Tr}[AQB] = a_1 Q_{11} b_1 + a_1 Q_{12} b_2 + a_2 Q_{21} b_1 + a_2 Q_{22} b_2 = \sum_{i,j}^{2} a_i Q_{ij} b_j$$

したがって，

$$\mathrm{Tr}[AQB] = Q_{11} b_1 a_1 + Q_{12} b_2 a_1 + Q_{21} b_1 a_2 + Q_{22} b_2 a_2 = \sum_{i,j}^{2} Q_{ij} b_j a_i$$

とするならば，和の内容は異なるが (1)，(2) 式と同じ形で述べることができる．

一方，

$$QBA = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (a_1 \;\; a_2) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q_{11} b_1 a_1 + Q_{12} b_2 a_1, \;\; ** \\ **, \;\; Q_{21} b_1 a_2 + Q_{22} b_2 a_2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\mathrm{Tr}[QBA] = Q_{11} b_1 a_1 + Q_{12} b_2 a_1 + Q_{21} b_1 a_2 + Q_{22} b_2 a_2 = \sum_{i,j}^{2} Q_{ij} b_j a_i$$

となり，$\mathrm{Tr}[AQB] = \mathrm{Tr}[QBA]$ が確認できた．

(3) の確認　例 2

A, Q, B をすべて $(n \times n)$ の正方行列とする．よって，$(n \times n)(n \times n)(n \times n)$ の積であるから，結果は $(n \times n)$ 正方行列となる．行列の積の定義より，結果の (i, j) 要素は

$$[AQB]_{i,j} = \sum_{k,\ell} a_{ik} Q_{k\ell} b_{\ell j}$$

となるから，この行列の対角要素は $j = i$ とすることで得られ，さらに，その i についての和をとれば対角要素の和，すなわちトレースとなる．

$$\mathrm{Tr}[AQB] = \sum_i [AQB]_{ii} = \sum_i \left(\sum_{k,\ell} a_{ik} Q_{k\ell} b_{\ell i} \right) = \sum_{i,k,\ell} a_{ik} Q_{k\ell} b_{\ell i}$$

となる．一方

$$\mathrm{Tr}[QBA] = \sum_i [QBA]_{kk} = \sum_k \left(\sum_{\ell,i} Q_{k\ell} b_{\ell i} a_{ik} \right) = \sum_{k,\ell,i} Q_{k\ell} b_{\ell i} a_{ik}$$

$$= \sum_{i,k,\ell} a_{ik} Q_{k\ell} b_{\ell i} = \mathrm{Tr}[AQB]$$

であるから，$\mathrm{Tr}[AQB] = \mathrm{Tr}[QBA]$ が示せた．

Tr 公式 II

α, β を複素数とし，A, B を任意の行列とすると

$$\mathrm{Tr}[\alpha A + \beta B] = \alpha \mathrm{Tr}[A] + \beta \mathrm{Tr}[B] \tag{4}$$

2　γ 行列と Tr

Dirac 方程式に使用される γ 行列は 4×4 行列である．すなわち

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

である．γ^μ に対して

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=\left\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\right\}=2g^{\mu\nu}\mathbf{I} \tag{6}$$

が成立する．ここで慣性系の計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は $\mu=\nu$ の場合，$g^{\mu\mu}=(1,-1,-1,-1)$ で $\mu\neq\nu$ の場合 $g^{\mu\nu}=0$ となる．また $\mathbf{I}$ は 4×4 単位行列である．

したがって

$$\mathrm{Tr}[\gamma^0]=\mathrm{Tr}[\gamma^1]=\mathrm{Tr}[\gamma^2]=\mathrm{Tr}[\gamma^3]=0,$$

である．

一方 4 元ベクトルを $a=(a_0,a_1,a_2,a_3)$ とした場合

$$\gamma^\mu a_\mu=\gamma^0a_0-\gamma^1a_1-\gamma^2a_2-\gamma^3a_3\equiv\not{a} \tag{7}$$

として，$\not{a}$ なる量を新たに導入する．以下，上下に現れるギリシャ文字 $\mu,\nu,\cdots$ については $\mu=0,1,2,3$ と 4 個の和をとり，アルファベット $i,j,\cdots$ については $i=1,2,3$ の 3 個の和をとる．具体的な量として，4 元ベクトルのエネルギー運動量 $p_\mu=(p_0,\boldsymbol{p})=(E,p_1,p_2,p_3)$ の場合

$$\gamma^\mu p_\mu=\gamma^0E-\gamma^1p_1-\gamma^2p_2-\gamma^3p_3\equiv\not{p} \tag{8}$$

となる．

今回の話題で基本となる式は,

//

$$\not{a}\not{b}=2(a\cdot b)-\not{b}\not{a} \tag{9}$$

$$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}]=4(a\cdot b) \tag{10}$$

$$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}\cdots\not{z}]=\mathrm{Tr}[\not{b}\cdots\not{z}\not{a}] \tag{11}$$

//

(9) の証明

$$\not{a}\not{b}=(\gamma^0a_0-\gamma^ia_i)(\gamma^0b_0-\gamma^jb_j)=(\gamma^0)^2a_0b_0-\gamma^i\gamma^0a_ib_0-\gamma^0\gamma^ja_0b_j+\gamma^i\gamma^ja_ib_j$$

$$=(\gamma^0)^2a_0b_0-\gamma^i\gamma^0a_ib_0-\gamma^0\gamma^ja_0b_j+(\gamma^1)^2a_1b_1+(\gamma^2)^2a_2b_2+(\gamma^3)^2a_3b_3+\gamma^k\gamma^\ell a_kb_\ell$$

となる．ここで $k\neq\ell$ である．$(\gamma^0)^2=\mathbf{I}$, $(\gamma^i)^2=-\mathbf{I}$ であり，$\gamma^\mu\gamma^\nu=-\gamma^\nu\gamma^\mu$，$\mu\neq\nu$ であるから

$$=(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)\mathbf{I}-\gamma^i\gamma^0a_ib_0-\gamma^0\gamma^ja_0b_j+\gamma^k\gamma^\ell a_kb_\ell \tag{12}$$

$$= 2(a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)\mathbf{I} - (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)\mathbf{I}$$

$$+\gamma^0\gamma^i b_0 a_0 + \gamma^j\gamma^0 b_j a_0 - \gamma^\ell\gamma^k b_\ell a_k$$

$$= 2(a\cdot b) - \{(\gamma^0)^2 b_0 a_0 - \gamma^0\gamma^i b_0 a_i - \gamma^j\gamma^0 b_j a_0 + \gamma^i\gamma^j a_i b_j\} = 2(a\cdot b) - \not{b}\not{a}$$

□

(10) の証明

$\mathrm{Tr}[\mathbf{I}] = 4$ であり，また $\mu \neq \nu$ の場合，$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 0$ であることに注意して，(12) 式を使うと

$$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}] = (a\cdot b)\mathrm{Tr}[\mathbf{I}] - a_i b_0 \mathrm{Tr}[\gamma^i\gamma^0] - a_0 b_j \mathrm{Tr}[\gamma^0\gamma^j] + a_k b_\ell \mathrm{Tr}[\gamma^k\gamma^\ell] = 4(a\cdot b)$$

となることが分かる．しかし，これにはもっとエレガントな証明もある．

$$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}] = \mathrm{Tr}[\not{b}\not{a}] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu + \gamma^\nu b_\nu \gamma^\mu a_\mu\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[a_\mu b_\nu(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[a_\mu b_\nu \left\{\gamma^\mu,\, \gamma^\nu\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[a_\mu b_\nu 2g^{\mu\nu}\mathbf{I}\right] = a_\mu b^\mu \mathrm{Tr}[\mathbf{I}] = 4(a\cdot b)$$

を得る．ここで (6) 式と，添字の上げ下げとしての計量テンソルの性質を使い，$a_\mu b_\nu g^{\mu\nu} = a_\mu b^\mu$ を使った． □

(11) の確認

(1)$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}] = \mathrm{Tr}[\not{b}\not{a}]$ の場合 (一部で和の記号も記す．)

$\not{a}\not{b} = \gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu = a_\mu b_\nu \gamma^\mu\gamma^\nu$ であるが，ここで μ, ν について 0〜3 までの和がとられていることに注意する．これらの和の中で，例えば μ, ν を $\mu = 0$，$\nu = 1$ の項を考える．その 4×4 行列の $(\alpha\delta)$ 要素は

$$(\not{a}\not{b})^{01}_{\alpha\delta} = \sum_{\beta=0}^{3} a_0 b_1 (\gamma^0)_{\alpha\beta}(\gamma^1)_{\beta\delta}$$

であるから，対角要素は $\delta \to \alpha$ としたものである．なお，$(\gamma^0)_{\alpha\beta}$ や $(\gamma^1)_{\beta\delta}$ は複素数のスカラーであることを注意しておく．よって，この項のトレースは

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{a}\not{b})^{01}\right] = a_0 b_1 \sum_{\alpha=0}^{3}\left\{\sum_\beta (\gamma^0)_{\alpha\beta}(\gamma^1)_{\beta\alpha}\right\} = a_0 b_1 \sum_{\alpha\beta}(\gamma^0)_{\alpha\beta}(\gamma^1)_{\beta\alpha}$$

である．同様に $\not{b}\not{a}$ の上と同じ項を考える．

$$(\not{b}\not{a})^{10}_{\alpha\delta} = b_1 a_0 \sum_\beta (\gamma^1)_{\alpha\beta}(\gamma^0)_{\beta\delta}$$

であるから，対角要素は $\delta \to \alpha$ としたものである．よってそのトレースは

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{b}\not{a})^{10}\right] = b_1 a_0 \sum_{\alpha} \left\{ \sum_{\beta} (\gamma^1)_{\alpha\beta} (\gamma^0)_{\beta\alpha} \right\} = b_1 a_0 \sum_{\alpha\beta} (\gamma^1)_{\alpha\beta} (\gamma^0)_{\beta\alpha}$$

$$= a_0 b_1 \sum_{\beta\alpha} (\gamma^0)_{\beta\alpha} (\gamma^1)_{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}\left[(\not{a}\not{b})^{01}\right]$$

このように対応する項はすべて等しくなるから，Tr の公式 II を用いて全ての項の和をとれば

$$\mathrm{Tr}\,[\not{a}\not{b}] = \mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{a}]$$

が示せる．

(2)$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}\cdots\not{z}] = \mathrm{Tr}[\not{b}\cdots\not{z}\not{a}]$ の場合

$$\not{a}\not{b}\cdots\not{z} = a_\mu b_\nu \cdots z_\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \cdots \gamma^\rho$$

ここでも添字 $\mu\nu\cdots\rho$ のすべてについて 0〜3 までの和となっているが，その中の $\mu = 0, \nu = 1, \cdots \rho = 1$ となる項を考える．この 1 つの項で 4×4 行列 γ の任意の数の積の結果はやはり 4×4 行列である．その $(\alpha\delta)$ 要素は

$$(\not{a}\not{b}\cdots\not{z})^{01\cdots1}_{\alpha\delta} = a_0 b_1 \cdots z_1 \sum_{\beta,\epsilon,\cdots,\lambda} (\gamma^0)_{\alpha\beta} (\gamma^1)_{\beta\epsilon} \cdots (\gamma^1)_{\lambda\delta}$$

であるから，対角要素は $\delta \to \alpha$ としたものである．よってそのトレースは

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{a}\not{b}\cdots\not{z})^{01\cdots1}\right] = a_0 b_1 \cdots z_1 \sum_{\alpha=0}^{3} \left\{ \sum_{\beta,\epsilon,\cdots,\lambda} (\gamma^0)_{\alpha\beta} (\gamma^1)_{\beta\epsilon} \cdots (\gamma^1)_{\lambda\alpha} \right\}$$

$$= a_0 b_1 \cdots z_1 \sum_{\alpha,\beta,\cdots,\lambda} (\gamma^0)_{\alpha\beta} (\gamma^1)_{\beta\epsilon} \cdots (\gamma^1)_{\lambda\alpha}$$

となる．一方 $\not{a}$ を最後尾に巡回させたものの $\not{b}\cdots\not{z}\not{a}$ の $(\alpha\delta)$ 要素は

$$(\not{b}\cdots\not{z}\not{a})^{1\cdots10}_{\alpha\delta} = b_1 \cdots z_1 a_0 \sum_{\beta,\epsilon,\cdots,\lambda} (\gamma^1)_{\alpha\beta} \cdots (\gamma^1)_{\sigma\lambda} (\gamma^0)_{\lambda\delta}$$

と書かれる．ただし，b 以降 z 以前のスラッシュ量 $\not{c}$ の並びは，巡回する前の式と同じとする．よって，$\delta \to \alpha$ とした対角要素の和をとると

$$\mathrm{Tr}\left[(\not{b}\cdots\not{z}\not{a})^{1\cdots10}\right] = b_1 \cdots z_1 a_0 \sum_{\alpha=0}^{3} \left\{ \sum_{\beta,\epsilon,\cdots,\lambda} (\gamma^1)_{\alpha\beta} \cdots (\gamma^1)_{\sigma\lambda} (\gamma^0)_{\lambda\alpha} \right\}$$

$$= a_0 b_1 \cdots z_1 \sum_{\alpha,\beta,\cdots,\lambda} (\gamma^1)_{\alpha\beta} \cdots (\gamma^1)_{\sigma\lambda} (\gamma^0)_{\lambda\alpha}$$

$$= a_0 b_1 \cdots z_1 \sum_{\lambda,\alpha,\beta,\cdots,} (\gamma^0)_{\lambda\alpha}(\gamma^1)_{\alpha\beta}\cdots(\gamma^1)_{\sigma\lambda} = \mathrm{Tr}\left[(\not{a}\not{b}\cdots\not{z})^{01\cdots1}\right]$$

となる．再度，$(\gamma^0)_{\lambda\alpha}$ や $(\gamma^1)_{\sigma\lambda}$ は複素数のスカラーであることを注意しておく．$\not{a}\not{b}\cdots\not{z}$ と $\not{b}\cdots\not{z}\not{a}$ の添字 $\mu\nu\cdots\rho$ のすべてについて対応する項が一致することと Tr の公式 II によりそれらの総和を考えるならば

$$\mathrm{Tr}[\not{a}\not{b}\cdots\not{z}] = \mathrm{Tr}[\not{b}\cdots\not{z}\not{a}]$$

の等号の成立を確認できる．

以上を使い次の二つの公式を導く．

公式 I

$$\mathrm{Tr}\left[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\right] = 4[(a\cdot b)(c\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c) - (a\cdot c)(b\cdot d)] \tag{13}$$

公式 I の導出

導出の指針は，関係式 (9) を使い $\not{a}$ を右へ移行し，$\not{a}$ を右端にまでもって行き，等式 (11) を使うことである．

$$\mathrm{Tr}\left[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\right] = \mathrm{Tr}\left[2\{(a\cdot b) - \not{b}\not{a}\}\not{c}\not{d}\right] = 2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\left[\not{c}\not{d}\right] - \mathrm{Tr}\left[\not{b}\not{a}\not{c}\not{d}\right]$$

$$= 8(a\cdot b)(c\cdot d) - \mathrm{Tr}\left[\not{b}\not{a}\not{c}\not{d}\right] = 8(a\cdot b)(c\cdot d) - \mathrm{Tr}\left[\not{b}\{2(a\cdot c) - \not{c}\not{a}\}\not{d}\right]$$

$$= 8(a\cdot b)(c\cdot d) - 2(a\cdot c)\mathrm{Tr}\left[\not{b}\not{d}\right] + \mathrm{Tr}\left[\not{b}\not{c}\not{a}\not{d}\right] = 8(a\cdot b)(c\cdot d) - 8(a\cdot c)(b\cdot d)$$

$$+\mathrm{Tr}\left[\not{b}\not{c}\not{a}\not{d}\right] = 8(a\cdot b)(c\cdot d) - 8(a\cdot c)(b\cdot d) + \mathrm{Tr}\left[\not{b}\not{c}\{2(a\cdot d) - \not{d}\not{a}\}\right]$$

$$= 8(a\cdot b)(c\cdot d) - 8(a\cdot c)(b\cdot d) + 2(a\cdot d)\mathrm{Tr}\left[\not{b}\not{c}\right] - \mathrm{Tr}\left[\not{b}\not{c}\not{d}\not{a}\right]$$

$$= 8(a\cdot b)(c\cdot d) - 8(a\cdot c)(b\cdot d) + 8(a\cdot d)(b\cdot c) - \mathrm{Tr}\left[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\right]$$

$$\therefore \quad 2\mathrm{Tr}\left[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\right] = 8(a\cdot b)(c\cdot d) - 8(a\cdot c)(b\cdot d) + 8(a\cdot d)(b\cdot c)$$

が得られ，両辺を 2 で割れば (13) 式が導出される． □

公式 II

$$\mathrm{Tr}\left[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}\right] = 4(a\cdot b)[(c\cdot d)(e\cdot f) - (c\cdot e)(d\cdot f) + (c\cdot f)(d\cdot e)]$$

$$-4(a\cdot c)[(b\cdot d)(e\cdot f) - (b\cdot e)(d\cdot f) + (b\cdot f)(d\cdot e)]$$

$$+4(a\cdot d)[(b\cdot c)(e\cdot f) - (b\cdot e)(c\cdot f) + (b\cdot f)(c\cdot e)]$$

$$-4(a\cdot e)[(b\cdot c)(d\cdot f)-(b\cdot d)(c\cdot f)+(b\cdot f)(c\cdot d)]$$

$$+4(a\cdot d)[(b\cdot c)(d\cdot e)-(b\cdot d)(c\cdot e)+(b\cdot e)(c\cdot d)] \tag{14}$$

公式 II の導出

公式 I の導出と全く同じである．

$$\mathrm{Tr}\,[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]=\mathrm{Tr}\,[\{2(a\cdot b)-\not{b}\not{a}\}\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{a}\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]$$

$$=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-\mathrm{Tr}\,[\not{b}\{2(a\cdot c)-\not{c}\not{a}\}\not{d}\not{e}\not{f}]=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{d}\not{e}\not{f}]$$

$$+\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{a}\not{d}\not{e}\not{f}]=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{d}\not{e}\not{f}]+\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\{2(a\cdot d)-\not{d}\not{a}\}\not{e}\not{f}]$$

$$=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{d}\not{e}\not{f}]+2(a\cdot d)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{e}\not{f}]-\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{a}\not{e}\not{f}]$$

$$=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{d}\not{e}\not{f}]+2(a\cdot d)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{e}\not{f}]-\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\{2(a\cdot e)-\not{e}\not{a}\}\not{f}]$$

$$=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{d}\not{e}\not{f}]+2(a\cdot d)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{e}\not{f}]-2(a\cdot e)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{f}]$$

$$+\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\not{a}\not{f}]=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{d}\not{e}\not{f}]+2(a\cdot d)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{e}\not{f}]$$

$$-2(a\cdot e)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{f}]+\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\{2(a\cdot f)-\not{f}\not{a}\}]$$

$$=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{d}\not{e}\not{f}]+2(a\cdot d)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{e}\not{f}]-2(a\cdot e)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{f}]$$

$$+2(a\cdot f)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}]-\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}\not{a}]$$

よって

$$2\mathrm{Tr}\,[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{d}\not{e}\not{f}]+2(a\cdot d)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{e}\not{f}]$$

$$-2(a\cdot e)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{f}]+2(a\cdot f)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}]$$

すなわち

$$\mathrm{Tr}\,[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]=(a\cdot b)\mathrm{Tr}\,[\not{c}\not{d}\not{e}\not{f}]-(a\cdot c)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{d}\not{e}\not{f}]+(a\cdot d)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{e}\not{f}]$$

$$-(a\cdot e)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{f}]+(a\cdot f)\mathrm{Tr}\,[\not{b}\not{c}\not{d}\not{e}]$$

が得られる．この後は公式 I を使って各 4 つの積に関するトレースを計算し代入すれば公式 II(14) が得られる． □