続：変形 Bessel 関数の初等関数による表現

伊藤榮信

2012 年 4 月 20 日

1　はじめに

以下の一連の常微分方程式を考える：ただし，従属変数上のドットは $\cdot = \mathrm{d}/\mathrm{d}r$

1) 円筒座標系での Brinkman 方程式 (Longitudinal flow) の一部

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{r}\dot{\phi} - \phi = 0 \tag{1.1}$$

2) 湯川ポテンシャル (核力) を表す方程式

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{\phi} - \phi = 0 \tag{1.2}$$

3) 円筒座標系での Brinkman 方程式 (Transverse flow) の一部

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{r}\dot{\phi} - \phi = 0 \tag{1.3}$$

4) 球座標系での Brinkman 方程式の一部

$$\ddot{\phi} + \frac{4}{r}\dot{\phi} - \phi = 0 \tag{1.4}$$

すなわち，これらは $\dot{\phi}/r$ の係数が 1〜4 へと規則的に変化した方程式である．

また，これらの方程式のうち (1.2) の解は湯川ポテンシャル

$$\phi = \frac{\mathrm{e}^{-r}}{r} \tag{1.5}$$

であり，(1.4) の解は Brinkman 方程式の厳密解より，

$$\phi = \frac{1+r}{r^3}\mathrm{e}^{-r} \tag{1.6}$$

であることが分かっている．実際，各解を対応する方程式に代入すれば解であることを確認することができる．また，解 (1.6) は，解 (1.5) から得られる．

さて，Buevich 等[1]は表面には出していないが Brinkman 方程式の解を求める際に，微分方程式

$$\ddot{\phi}_n + \frac{2(n+1)}{r}\dot{\phi}_n - \phi_n = 0 \tag{1.7}$$

[1] Journal Applied Mathematics and Mechanics 1972 p.452 または PMM Vol.36 No.3, 1972, pp.480-493

とその解

$$\phi(r)_n = \left(\frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}\right)^n \frac{\mathrm{e}^{-r}}{r} \tag{1.8}$$

を使用している．これによれば，(1.2) と (1.4) は各々$n = 0$ と 1 の場合である．(1.7) 式の解が (1.8) 式となることの証明を最後のセクションに記した．なお，原点で意味を持つ解は

$$\phi(r)_n = \left(\frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}\right)^n \frac{\sinh r}{r} \tag{1.9}$$

である．

2　変形 Bessel 関数への変形

変形 Bessel 関数とは次の常微分方程式の解である：

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) w = 0 \tag{2.1}$$

この解を変形 Bessel 関数といい

$$w(z) = K_\nu(z)$$

で通常表わされる．

2.1　微分方程式 (1.1)

(1.1) 式は上記の定義式で $\nu = 0$ の場合に相当する．そこでこの解を $\phi = K_0(r)$ と表記する．それでは，他の 3 つの方程式は定義式 (2.1) に帰着できるのかという問題となる．

2.2　微分方程式 (1.2)

そこで微分方程式 (1.2) の $\Phi(r)$ に対して

$$\phi(r) = \frac{y}{r^a} \tag{2.2}$$

なる変換を行う．すなわち

$$\dot{\phi} = -a\frac{y}{r^{a+1}} + \frac{\dot{y}}{r^a} \tag{2.3}$$

$$\ddot{\phi} = a(a+1)\frac{y}{r^{a+2}} - 2a\frac{\dot{y}}{r^{a+1}} + \frac{\ddot{y}}{r^a} \tag{2.4}$$

である．これらを (1.2) 式に代入すると

$$a(a+1)\frac{y}{r^{a+2}} - 2a\frac{\dot{y}}{r^{a+1}} + \frac{\ddot{y}}{r^a} + \frac{2}{r}\left(-a\frac{y}{r^{a+1}} + \frac{\dot{y}}{r^a}\right) - \frac{y}{r^a} = 0$$

$$\frac{\ddot{y}}{r^a} + (2-2a)\frac{\dot{y}}{r^{a+1}} + a(a+1)\frac{y}{r^{a+2}} - 2a\frac{y}{r^{a+2}} - \frac{y}{r^a} = 0$$

となり，更に分母の y^a をはらうと

$$\ddot{y} + (2-2a)\frac{1}{r}\dot{y} - \left\{1 - a(a+1)\frac{1}{r^2} + 2a\frac{1}{r^2}\right\}y = 0$$

となるので定義式 (2.1) に合致させるには，

$$2 - 2a = 1 \longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

となればよい．この値で y の係数を計算し，微分方程式を書き直すと

$$\ddot{y} + \frac{1}{r}\dot{y} - \left(1 + \frac{1}{4r^2}\right)y = 0 \tag{2.5}$$

となる．これは定義式 (2.1) の $\nu = \pm 1/2$ に対応するので $y = K_{\pm 1/2}(r)$ となるが，以降 ν が正の場合のみを記すので $y = K_{1/2}(r)$ である．

2.3 微分方程式 (1.3)

微分方程式 (1.3) の $\Phi(r)$ に対しても同様の変換を行い，すなわち (2.2)-(2.4) 式を (1.3) 式に代入すると，

$$a(a+1)\frac{y}{r^{a+2}} - 2a\frac{\dot{y}}{r^{a+1}} + \frac{\ddot{y}}{r^a} + \frac{3}{r}\left(-a\frac{y}{r^{a+1}} + \frac{\dot{y}}{r^a}\right) - \frac{y}{r^a} = 0$$

$$\frac{\ddot{y}}{r^a} + (3-2a)\frac{\dot{y}}{r^{a+1}} + a(a+1)\frac{y}{r^{a+2}} - 3a\frac{y}{r^{a+2}} - \frac{y}{r^a} = 0$$

となるので，これが定義式 (2.1) となるには

$$3 - 2a = 1 \longrightarrow a = 1$$

である．よって

$$\ddot{y} + \frac{1}{r}\dot{y} - \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)y = 0 \tag{2.6}$$

が得られる．したがって $y = K_1(r)$ となる．

2.4 微分方程式 (1.4)

これまでと同様の計算を行うなら

$$a(a+1)\frac{y}{r^{a+2}} - 2a\frac{\dot{y}}{r^{a+1}} + \frac{\ddot{y}}{r^a} + \frac{4}{r}\left(-a\frac{y}{r^{a+1}} + \frac{\dot{y}}{r^a}\right) - \frac{y}{r^a} = 0$$

$$\frac{\ddot{y}}{r^a} + (4-2a)\frac{\dot{y}}{r^{a+1}} + a(a+1)\frac{y}{r^{a+2}} - 4a\frac{y}{r^{a+2}} - \frac{y}{r^a} = 0$$

であるから，a は次の式から決定され

$$4 - 2a = 1 \longrightarrow a = \frac{3}{2},$$

これを代入すると

$$\ddot{y} + \frac{1}{r}\dot{y} - \left(1 + \frac{9}{4r^2}\right)y = 0 \tag{2.7}$$

が得られる．したがって，$y = K_{3/2}(r)$ である．

3 一般化，n

1 階導関数の係数が n の場合を考える．つまり

$$\ddot{\phi} + \frac{n}{r}\dot{\phi} - \phi = 0 \tag{3.1}$$

という微分方程式の変形 Bessel 関数への帰着を行う．前の節同様の計算を行うと

$$n - 2a = 1 \longrightarrow a = \frac{n-1}{2} \tag{3.2}$$

また，微分方程式左辺最後の項は

$$a(a+1)\frac{y}{r^2} - na\frac{y}{r^2} - y$$

となるから，これに $a = (n-1)/2$ を代入すると

$$\frac{(n-1)}{2}\frac{(n+1)}{2}\frac{y}{r^2} - n\frac{n-1}{2}\frac{y}{r^2} - y = -\left(1 - \frac{n^2-1}{4r^2} + \frac{2n^2-2n}{4r^2}\right)y$$

$$= -\left(1 + \frac{n^2-2n+1}{4r^2}\right)y = -\left\{1 + \frac{(n-1)^2}{4r^2}\right\}y$$

である．したがって (3.1) 式：

$$\ddot{\phi} + \frac{n}{r}\dot{\phi} - \phi = 0$$

は $\phi = y/r^a$ の変換により

$$\ddot{y} + \frac{1}{r}\dot{y} - \left\{1 + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}{r^2}\right\}y = 0 \tag{3.3}$$

に帰着できる．

4 新たな方程式の導出と $n+1$

(3.1) 式をもう一度微分し，$\dot{\phi}=\psi$ とおくと

$$\ddot{\psi}+\frac{n}{r}\dot{\psi}-\left(1+\frac{n}{r^2}\right)\psi=0 \tag{4.1}$$

が得られる．この方程式に対してこれまで同様の変換 $\psi=y/r^a$ を行うと，微分方程式左辺最後の項は

$$a(a+1)\frac{y}{r^2}-na\frac{y}{r^2}-\frac{n}{r^2}y-y$$

となる．これに $a=(n-1)/2$ を代入すると

$$\frac{(n-1)}{2}\frac{(n+1)}{2}\frac{y}{r^2}-n\frac{n-1}{2}\frac{y}{r^2}-\frac{n}{r^2}y-y=-\left(1-\frac{n^2-1}{4r^2}+\frac{2n^2-2n}{4r^2}+\frac{4n}{4r^2}\right)y$$

$$=-\left(1+\frac{n^2-2n+1}{4r^2}+\frac{4n}{4r^2}\right)y=-\left\{1+\frac{(n+1)^2}{4r^2}\right\}y$$

となる．よって，(4.1) 式から新たに

$$\ddot{y}+\frac{1}{r}\dot{y}-\left\{1+\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{r^2}\right\}y=0 \tag{4.2}$$

が得られる．

5 変形 Bessel 関数の初等関数による表現

解が得られている (1.2) 式からはじめる．この場合，$n=2$ であり，$a=1/2$ である．また解は $\phi=\mathrm{e}^{-r}/r$ である．(2.5) 式も考慮すると

$$\phi=\frac{\mathrm{e}^{-r}}{r}=\frac{y}{r^{1/2}}$$

$$\phi=\frac{\mathrm{e}^{-r}}{r}=\frac{K_{1/2}}{r^{1/2}} \tag{5.1}$$

となるので

$$K_{1/2}=\frac{\mathrm{e}^{-r}}{\sqrt{r}} \tag{5.2}$$

さらに前節より，

$$\dot{\phi}=-\frac{\mathrm{e}^{-r}}{r^2}-\frac{\mathrm{e}^{-r}}{r}=-\frac{1+r}{r^2}\mathrm{e}^{-r}=\psi$$

とすると，

$$\psi=-\frac{1+r}{r^2}\mathrm{e}^{-r}=\frac{y}{r^{1/2}}$$

つまり

$$\psi=-\frac{1+r}{r^2}\mathrm{e}^{-r}=\frac{K_{3/2}}{r^{1/2}} \tag{5.3}$$

これより

$$K_{3/2}=-\frac{1+r}{r^{3/2}}\mathrm{e}^{-r} \tag{5.4}$$

となる．

まとめ

次の方程式の解が分かっているとする：

$$\ddot{\phi}+\frac{n}{r}\dot{\phi}-\phi=0$$

それを $\phi=\phi_n$ とする．(3.3) 式から

$$\phi_n=\frac{K_{(n-1)/2}}{y^{(n-1)/2}}$$

より

$$\bullet\ K_{(n-1)/2}=\phi_n y^{(n-1)/2}$$

が求まる．更に，

$$\frac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}r}=\psi_n$$

とすると (4.2) 式より

$$\psi_n=\frac{K_{(n+1)/2}}{y^{(n-1)/2}}$$

が得られるので，

$$\bullet\ K_{(n+1)/2}=\psi_n y^{(n-1)/2}$$

が得られる．

以上のように，1 つの解，ϕ_n，が分かっている場合 2 つの変形 Bessel 関数が得られ，この循環を続けることにより連続する変形 Bessel 関数が得られる．これをより正確な形にするには数学的帰納法を使うべきであろう．なお，これと同等の式は (証明はないが) より一般的な形で岩波数学公式集 III，p.174 にある．

6 (1.7) 式の解

(1.7) 式の解が (1.8) 式となることを数学的帰納法により証明する．$n=0$ から始めるので若干変則的であるが，大きな問題ではない．

I. $n=0$ の場合，(1.7) 式の解が $\phi_0 = \mathrm{e}^{-r}/r$ であることは既に確認している．
II. $n=m$ の場合

$$\ddot{\phi}_m + \frac{2(m+1)}{r}\dot{\phi}_m - \phi_m = 0 \tag{6.1}$$

の解が

$$\phi_m = \left(\frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}\right)^m \frac{\mathrm{e}^{-r}}{r} \tag{6.2}$$

であるとする．
III. $n=m+1$ の場合，微分方程式は

$$\ddot{\phi}_{m+1} + \frac{2(m+2)}{r}\dot{\phi}_{m+1} - \phi_{m+1} = 0 \tag{6.3}$$

となり，その解が

$$\phi_{m+1} = \left(\frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}\right)^{m+1} \frac{\mathrm{e}^{-r}}{r} = \mathrm{D}\phi_m \tag{6.4}$$

であればよい．ここで

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}$$

とした．さて，1 階の導関数は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\phi_{m+1} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\phi_m + \mathrm{D}\dot{\phi}_m = -\frac{1}{r}\mathrm{D}\phi_m + \mathrm{D}\dot{\phi}_m \tag{6.5}$$

であり，更に 2 階の導関数は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\phi_{m+1} = \frac{2}{r^2}\mathrm{D}\phi_m - \frac{2}{r}\mathrm{D}\dot{\phi}_m + \mathrm{D}\ddot{\phi}_m \tag{6.6}$$

である．(6.4)-(6.6) を (6.3) の左辺に代入し計算すると

$$\underbrace{-\frac{2(m+1)}{r^2}\mathrm{D}\phi_m + \frac{2(m+1)}{r}\mathrm{D}\dot{\phi}_m}\,+\mathrm{D}\ddot{\phi}_m - \mathrm{D}\phi_m \tag{6.7}$$

が得られるが，先頭の 2 項は

$$\frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}\left\{\frac{2(m+1)}{r}\dot{\phi}\right\} = \mathrm{D}\left\{\frac{2(m+1)}{r}\dot{\phi}\right\}$$

とまとめることができるので，(6.7) 式は

$$\mathrm{D}\left\{\ddot{\phi}_m + \frac{2(m+1)}{r}\dot{\phi}_m - \phi_m\right\}$$

となる．よって，II より { } 内はゼロであるので，(6.4) 式で表される解が (6.3) 式を満たすことが確認されたので，$n=m+1$ の場合 (6.1) 式が成立する．