楕円体内部のポテンシャル

伊藤榮信

1989 年 6 月 30 日
改訂：2020 年 7 月 22 日

一様に帯電した楕円体内部のポテンシャル[1]

電荷が一様に分布した楕円体内部のポテンシャル

$$\phi = \pi\rho abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\sigma} - \frac{y^2}{b^2+\sigma} - \frac{z^2}{c^2+\sigma}\right) \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)}}$$

を導出する．

次式で定義される楕円体を考える：

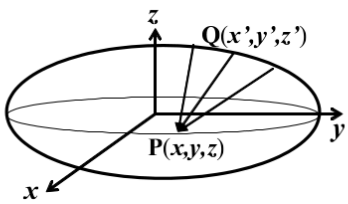

図 1: 楕円体のポテンシャル

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

一様な電荷密度を ρ とするとこの電荷分布による点 P でのポテンシャル $\phi(\mathrm{P})$ は

$$\phi(P) = \int\int\int \frac{\rho(x', y', z')}{r} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' \tag{2}$$

で表される（符号のマイナスは省略した）．ここで r は P=(x, y, z)，Q=(x', y', z') とし

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{3}$$

[1] ここで，この題材をとりあげた理由は弾性体接触問題での Hertz の理論にあり，Hertz の公式を導く際に必要となるからであった．

である．いま，上記積分を実行するため球座標 (r,θ,ϕ) を導入すると，点 Q の座標は

$$x' = x + r\sin\theta\cos\phi, \quad y' = y + r\sin\theta\sin\phi, \quad z' = z + r\cos\theta \tag{4}$$

となる．(2) 式を若干書き換える．(x,y,z) 系から (r,θ,ϕ) への変換を考え，体積素片は $\mathrm{d}V = r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega = r^2\mathrm{d}r(\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi)$ である．$\mathrm{d}\Omega$ は立体角である．まずは動径方向の積分のみを考える[2]．よって

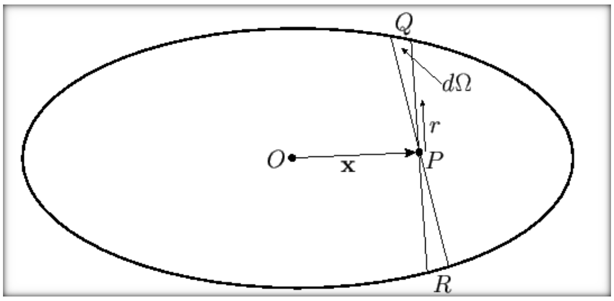

図 2: 動径 $r' = |\mathrm{PQ}|, r'' = |\mathrm{PR}|$　図は脚注のサイトから引用

$$\mathrm{d}\phi(P) = \int^{r} \frac{\rho}{r}\mathrm{d}V = \int_0^{r'} \frac{\rho}{r}\mathrm{d}V + \int_{r''}^{0} \frac{\rho}{(-r)}\mathrm{d}V \tag{5}$$

さらに，動径 r の積分をすすめると (図 2)

$$\mathrm{d}\phi(P) = \rho\left(\int_0^{r'} r\mathrm{d}r + \int_0^{r''} r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\Omega = \frac{\rho}{2}({r'}^2 + {r''}^2)\mathrm{d}\Omega \tag{6}$$

楕円体上の点は (x',y',z') であることに注意して (4) 式を (1) 式へ代入すると以下の 2 次方程式を得る．

$$Lr^2 + 2Mr + N = 0 \tag{7}$$

ここで

$$\begin{aligned} L &= \frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}, \\ M &= \frac{x\cos\phi\sin\theta}{a^2} + \frac{y\sin\phi\sin\theta}{b^2} + \frac{z\cos\theta}{c^2}, \\ N &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1. \end{aligned} \tag{8}$$

[2] ここからの議論は https://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluid/node262.html を参考とした．今回の改訂はここから (10) 式までの部分で，三角関数の積分部分が分かりやすくなったと思います．

(6) 式の r', r'' はこの 2 次方程式の解である．よって，$r' + r'' = -2M/L$ であり $r'r'' = N/L$ である．これを考慮して (6) 式の被積分関数を書き換えると

$$r'^2 + r''^2 = (r' + r'')^2 - 2r'r'' = \frac{4M^2}{L^2} - 2\frac{N}{L} \tag{9}$$

となる．

動径方向の積分で 2 つに分割したことから，2 重に積分することを避けると (1/2 をかける)，ポテンシャル $\phi(P)$ が

$$\phi(P) = \frac{\rho}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{4M^2}{L^2} - 2\frac{N}{L}\right)\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \tag{10}$$

として得られる．

(10) の積分で被積分関数の第 1 項の中で，クロスタームである xy, yz, zx の項の積分は対称性から 0 となる．なお，M^2 の具体的な形は

$$M^2 = \frac{x^2\cos^2\phi\sin^2\theta}{a^4} + \frac{y^2\sin^2\phi\sin^2\theta}{b^4} + \frac{z^2\cos^2\theta}{c^4}$$
$$+\frac{2xy\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta}{a^2b^2} + \frac{2yz\sin\phi\sin\theta\cos\theta}{b^2c^2} + \frac{2zx\cos\phi\sin\theta\cos\theta}{c^2a^2}$$

こうしてポテンシャル $\phi(\mathrm{P})$ は

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{P}) = \frac{1}{2}\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}&\left\{\frac{2}{L^2}\left(\frac{x^2\cos^2\phi\sin^2\theta}{a^4} + \frac{y^2\sin^2\phi\sin^2\theta}{b^4} + \frac{z^2\cos^2\theta}{c^4}\right)\right.\\ &\left.-\frac{1}{L}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\right\}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\ &= V_0 - V_1x^2 - V_2y^2 - V_3z^2,\end{aligned} \tag{11}$$

ここで，

$$V_0 = \frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{L}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$V_1 = \frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{La^2} - \frac{2\cos^2\phi\sin^3\theta}{L^2a^4}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$V_2 = \frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{Lb^2} - \frac{2\sin^2\phi\sin^3\theta}{L^2b^4}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$V_3 = \frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{Lc^2} - \frac{2\cos^2\theta\sin\theta}{L^2c^4}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

さて，$L = L(a, b, c)$ であることに注意すると，

$$-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{V_0}{a}\right) = V_1, \quad -\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{V_0}{b}\right) = V_2, \quad -\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{V_0}{c}\right) = V_3 \tag{12}$$

なる関係式が得られる．したがって，V_0 の積分さえ計算できればあとはこれの a, b, c に関する導関数を計算することで (11) 式はすべて求められる．さて V_0 の積分の中に現れる関数は $\cos^2\phi$，$\sin^2\theta$，$\sin\theta$ といった形の関数のみであるから，これらの周期性を考慮するなら積分区間を以下のように変更できる：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \longrightarrow 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}$$

よって，

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{\dfrac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{b^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{c^2}}$$

と書ける．次に ϕ に関する積分を行なうため，被積分関数の分母を

$$\begin{aligned}&\frac{\cos^2\phi\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\phi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}{c^2}\\&=A^2\cos^2\phi+B^2\sin^2\phi\end{aligned}$$

と書き改める．ここで

$$A=\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}},\quad B=\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}}$$

と変形し，積分公式を利用し

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{A^2\cos^2\phi+B^2\sin^2\phi}}=\left[\frac{1}{AB}\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\tan\phi\right)\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2AB}$$

を得る．ゆえに

$$\begin{aligned}V_0&=2\pi\rho\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{c^2}}\sqrt{\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{c^2}}}\\&=2\pi\rho ab\int_0^{\pi/2}\frac{c^2\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}}{\sqrt{a^2+c^2\tan\theta}\sqrt{b^2+c^2\tan^2\theta}}\end{aligned}$$

となる．ここで $c\tan\theta=\sqrt{\sigma}$ とすると，その積分範囲は $0<\sigma<\infty$ で

$$\frac{c\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{2\sqrt{\sigma}},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{c^2+\sigma}}$$

であるから，

$$\begin{aligned}V_0&=2\pi\rho abc\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma}\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)}2\sqrt{\sigma}}\\&=\pi\rho abc\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)}}\end{aligned}$$

また，V_1 は

$$V_1 = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{V_0}{a}\right) = \pi\rho abc\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\sigma}{(a^2+\sigma)\sqrt{(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)}}$$

であり，V_2, V_3 も同様に得られるから，これら全てを (11) 式に代入し整理すると最終的に

$$\phi = \pi\rho abc\int_0^\infty \left(1-\frac{x^2}{a^2+\sigma}-\frac{y^2}{b^2+\sigma}-\frac{z^2}{c^2+\sigma}\right)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)}}$$

が導出される．