Faxenの法則

伊藤榮信

2012年3月6日

無限領域内の粘性流体の流れを考え，その流速分布を $\mathbf{u}(\mathbf{x})$(静止系に対する速度) とする．すなわち流体の圧力 $p(\mathbf{x})$ と速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は Stokes 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad -\nabla p(\mathbf{x}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

を満たす．流れの中には境界も物体も存在しないとする．今，流体中 $\mathbf{x}_0$ に中心をもつ半径 a の球面 A_0 を考え，その上に密度 $\mathbf{F}$ の力を分布させたとすると (図 1)，上記の流速分布 $\mathbf{u}$ は変化する．流体中には何の境界も無いとしているので，この力の面分布による $\mathbf{x}$ における流速の増加は

$$\frac{1}{8\pi\mu} \int_{A_0} I_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') F_j(\mathbf{x}') \mathrm{d}A(\mathbf{x}'), \tag{2}$$

で与えられる．ここで

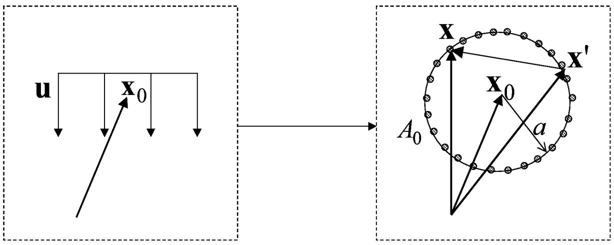

図 1: 無限領域中での流速分布 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ とポイントフォースの分布．

$$I_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}|} + \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^3} \tag{3}$$

である (Stokeslet もしくは Oseen テンソル)．もしこの力の面分布が剛体球を表わすとするならば，A_0 上の速度は

$$\mathbf{U} + \Omega \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \tag{4}$$

で表される．すなわち，$\mathbf{U}$ は球の静止系に対する並進速度で Ω は球の角速度である．よって，$\mathbf{F}$ を決定する積分方程式は

$$u_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{8\pi\mu} \int_{A_0} I_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') F_j(\mathbf{x}') \mathrm{d}A(\mathbf{x}') = U_i + \{\Omega \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\}_i, \tag{5}$$

が A_0 の各点で満たされることである．

この関係式を面 A_0 上 $\mathbf{x}$ について積分する．$\mathbf{x}'$ を A_0 の点とするなら

$$\int_{A_0} I_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathrm{d}A(\mathbf{x}) = \frac{16}{3}\pi a\delta_{ij}$$

となることが分かり (補計算 1)，この関係式を使うことで

$$\mathbf{U} = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{A_0}\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathrm{d}A(\mathbf{x}) + \frac{1}{6\pi a\mu}\int_{A_0}\mathbf{F}(\mathbf{x}')\mathrm{d}A(\mathbf{x}'), \tag{6}$$

が得られる (右辺角速度項は積分でゼロとなる)．この最後の項は球に作用する正味の力と考えられ (例えば，重力－浮力)，これは速度 $\mathbf{U}_0$ に比例する (すなわち $6\pi\mu a\mathbf{U}_0$) ので

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \frac{1}{4\pi a^2}\int_{A_0}\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathrm{d}A(\mathbf{x}), \tag{7}$$

が得られる．流体中の球の並進速度に対するこの式は流体に境界が存在しない場合についてのみ適用できるものである．もし何か別の境界が存在する場合には，A_0 上の力の分布による速度増加は (2) と，その力の鏡像による速度との和となる．以上は Batchelor[1] による議論で，関係式 (7) を第 1 Faxén の法則と呼んでいる (Oseen1927).

例えば静止流体中，すなわち $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$，を落下する球の速度 $\mathbf{U}_0$ は，

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}$$

となる．

さて，(7) 式最右辺は半径 a の球面上の速度の平均を算出しているようであるが，この速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ を球の中心 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ の周りで形式的に Taylor 級数に展開すると

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)_i\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i} + \frac{1}{2!}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)_i(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)_j\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x_i x_j} + \cdots \tag{8}$$

となる．ここで $i,j = 1,2,3$ もしくは $i,j = x,y,z$ である．この式を球面 A_0 上で積分すると

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{A_0}\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathrm{d}A(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \frac{a^2}{6}\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{x}_0), \tag{9}$$

が得られる．ただし，Stokes 流を考えているため $\nabla^4\mathbf{u} = \mathbf{0}$ を考慮している．この計算は簡単だが便宜を考え補計算 2 に記した．Faxén の法則は通常

$$\mathbf{F} = 6\pi\mu a\mathbf{U} - 6\pi\mu a\left\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \frac{a^2}{6}\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)\right\}(= 6\pi\mu a\mathbf{U}_0),$$

という形で表現される．

補計算 1

$$\int_{A_0} I_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathrm{d}A(\mathbf{x}) = \frac{16}{3}\pi a\delta_{ij}\text{の計算}$$

図 1 を参考のもとに以下の計算を行う.

$$\int_{A_0} \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathrm{d}A(\mathbf{x}) + \int_{A_0} \frac{1}{8\pi\mu}\int_{A_0} I_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')F_j(\mathbf{x}')\mathrm{d}A(\mathbf{x}')\mathrm{d}A(\mathbf{x}) \tag{10}$$

上の式の第 2 項ではまず $\mathbf{x}$ についての積分を行う．その際の積分には図 2 の

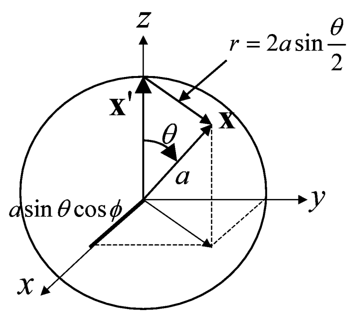

図 2: ポイントフォースの面上での積分.

記号の基に実行する.

$i = j$ のとき

$$I_{ii} = \frac{1}{r} + \frac{(x_i - x_i')(x_i - x_i')}{r^3}$$

$$\int_{A_0} \frac{1}{r}\mathrm{d}A = \int_{A_0} \frac{1}{2a\sin(\theta/2)}a^2\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = 2\pi a^2\int_0^\pi \frac{2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)}{2a\sin(\theta/2)}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 4\pi a \tag{11}$$

$i = j$ かつ $x_i = x$ の場合 (図のように $\mathbf{x}$'=(0,0,a) であることに注意)

$$\int_{A_0} \frac{(x-x')^2}{r^3}\mathrm{d}A = \int_{A_0} \frac{(a\sin\theta\cos\phi)^2}{r^3}a^2\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{A_0} \frac{(a\sin\theta\cos\phi)^2}{8a^3\sin^3(\theta/2)}a^2 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$$

$$= a\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \cos^3\frac{\theta}{2}\cos^2\phi\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\phi}{2}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi \cos^3\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$= a\pi \int_0^{\pi} \left(1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi a \tag{12}$$

よって，(11)+(12) 式より $16\pi a/3$ が得られる．

補計算 2

前と同様，積分は図 2 の記号の基に実行する．まず Taylor 級数

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \frac{1}{2!}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_j \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i x_j} + \cdots$$

の右辺第 2 項の $x_i = x_1 = x$ の場合について計算する．また計算を簡単化するため $\mathbf{x}_0$ を原点として計算する．

$$\int_{A_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \mathrm{d}A = \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} \int_{A_0} a \sin\theta \cos\phi \mathrm{d}A$$

$$= \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a \sin\theta \cos\phi (a^2 \sin\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta) = \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}_0} a^3 \int_0^{\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\times \int_0^{2\pi} \cos\phi \mathrm{d}\phi = 0$$

となり，他の成分も同じ．よって流速の 1 階偏導関数の項はゼロとなる．なお

$$\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}_0}$$

と略記した．次に Taylor 級数 2 階導関数部で例えば $x_i x_j = x_i x_i = x^2$ とすると，

$$\frac{1}{2!}\int_{A_0} x^2 \left.\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2}\right|_{\mathbf{x}_0} \mathrm{d}A = \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2}\right|_{\mathbf{x}_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (a \sin\theta \cos\phi)^2 (a^2 \sin\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta)$$

$$= \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2}\right|_{\mathbf{x}_0} a^4 \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{4\pi a^4}{6} \left.\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

が得られる．また，例えば $x_i x_j = xy$ の場合の積分はゼロとなり，その他の $i \neq j$ の場合も対称性からゼロとなる．

更に，3 階偏導関数の場合も全てゼロとなる．このように Taylor 級数展開 (8) の収束性については何もいえないが，その面上での積分を考えた (8) 式は 2 項で完結する．

参考文献

[1] Batchelor, G. K., Sedimentation in a dilute dispersion of spheres. J. Fluid Mech., Vol.52 pt.2, p.245, 1972.